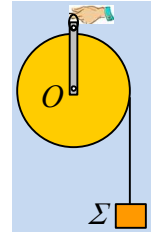


3.6. Σύνθετα θέματα στερεού. Ομάδα Δ΄.

3.5.61. Μια κινούμενη τροχαλία.

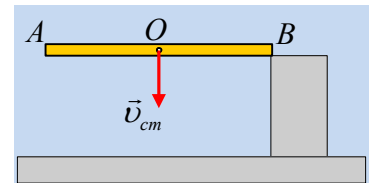
Γύρω από μια τροχαλία μάζας $M=0,8\text{kg}$ έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου έχουμε δέσει ένα σώμα Σ μάζας $m=0,1\text{kg}$. Συγκρατούμε τα δυο σώματα με τα χέρια μας, ώστε το νήμα να είναι τεντωμένο (χωρίς να ασκεί δυνάμεις στα σώματα) και σε μια στιγμή $t_0=0$, αφήνουμε το σώμα Σ να κινηθεί, ενώ συγκρατούμε σταθερή την τροχαλία. Τη στιγμή $t_1=1\text{s}$ αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης στην τιμή $F_2=11\text{N}$, μέχρι τη στιγμή t_2 που η τροχαλία αποκτά ταχύτητα $v_2=1\text{m/s}$.



- i) Να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης την οποία ασκούσαμε στην τροχαλία από $0-t_1$.
 - ii) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_2 .
 - iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας του σώματος Σ σε συνάρτηση με το χρόνο από $0-t_2$.
 - iv) Ποιες ενεργειακές μεταβολές εμφανίζονται στο χρονικό διάστημα $\Delta t=t_2-t_1$; Πώς συνδέονται οι μεταβολές αυτές με τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται στα σώματα;
- Για την τροχαλία ως προς τον άξονα περιστροφής της $I= \frac{1}{2} MR^2$, ενώ $g=10\text{m/s}^2$.

3.5.62. Μια ράβδος συγκρούεται με ένα σκαλοπάτι.

Μια ομογενής ράβδος AB μήκους ℓ και μάζας M πέφτει ελεύθερα και σε μια στιγμή το άκρο της B κτυπά στην πάνω πλευρά ενός λείου σκαλοπατιού. Ελάχιστα πριν την κρούση, το κέντρο μάζας O της ράβδου έχει κατακόρυφη ταχύτητα $v_{cm}=2\text{m/s}$, ενώ το άκρο A έχει μηδενική ταχύτητα.



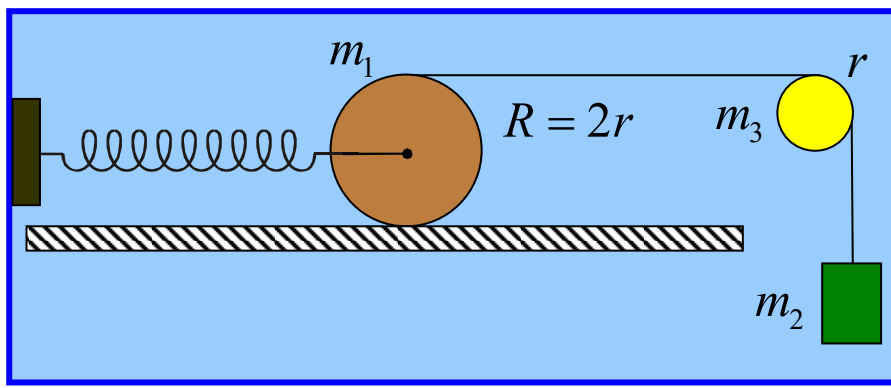
- i) Ποια η ταχύτητα του άκρου B της ράβδου ελάχιστα πριν την κρούση;
- ii) Κατά τη διάρκεια της κρούσης της ράβδου με το σκαλοπάτι:
 - α) Η δύναμη που ασκήθηκε στη ράβδο από το σκαλοπάτι, είναι κατακόρυφη.
 - β) Η ορμή της ράβδου παραμένει σταθερή.
 - γ) Η στροφορμή της ράβδου παραμένει σταθερή.
 - δ) Η στροφορμή της ράβδου παραμένει σταθερή ως προς κατάλληλα επιλεγμένο σημείο.
- iii) Αν το άκρο B , αμέσως μετά την κρούση, έχει κατακόρυφη ταχύτητα με φορά προς τα πάνω μέτρου 1m/s , ενώ το άκρο A κατακόρυφη ταχύτητα με φορά προς τα κάτω μέτρου 3m/s , να εξετάσετε αν η κρούση είναι ελαστική ή όχι.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I= \frac{1}{12} M\ell^2$.

3.5.63. Μια δύσκολη ταλάντωση..... και όχι μόνο!

Δείξατε ότι ο κύλινδρος του σχήματος εκτελεί αρμονική ταλάντωση.

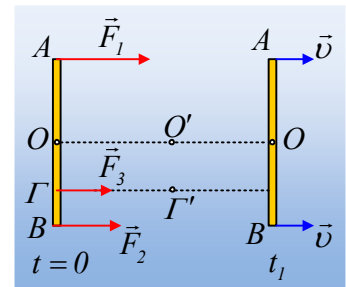
Υπολογίσατε το πλάτος και την περίοδο. Ουδέν σώμα του προβλήματος ολισθαίνει επί ουδενός.



Δίνονται: $m_1 = 2\text{kg}$, $m_2 = 1\text{kg}$, $m_3 = 1,5\text{kg}$ $k = 40 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

3.5.64. Επιταχυνόμενη ράβδος και ροπές.

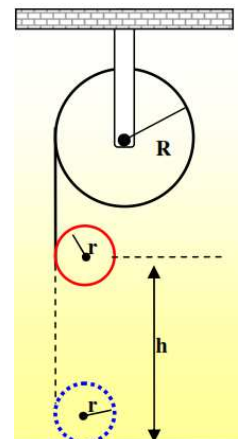
Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια ράβδος μήκους 2m και μάζας 10kg. Τη στιγμή $t=0$, ασκούνται στη ράβδο τρεις σταθερές οριζόντιες δυνάμεις, κάθετες στη ράβδο, όπως στο σχήμα, όπου $F_1=9\text{N}$ και $F_2=6\text{N}$. Τη στιγμή $t_1=2\text{s}$, τα άκρα της ράβδου έχουν ταχύτητες $v_A=v_B=v=4\text{m/s}$.



- i) Να υπολογιστεί το μέτρο της τρίτης δύναμης F_3 .
- ii) Να βρεθεί η απόσταση OG , του σημείου εφαρμογής της δύναμης F_3 από το μέσον O της ράβδου.
- iii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου, ως προς κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά:
 - α) από το σημείο O'
 - β) από το σημείο Γ' .
 του σχήματος.

3.5.65. Γιο – Γιο σε Τροχαλία και μια Ολίσθηση που μετατρέπεται σε Κύλιση

Η μεγάλη τροχαλία του διπλανού σχήματος έχει μάζα $M=4\text{kg}$, ακτίνα $R=0,2\text{m}$ και κρέμεται από σταθερό σημείο. Η μικρή τροχαλία έχει μάζα $m=2\text{kg}$ και ακτίνα $r=0,1\text{m}$. Την $t=0$ αφήνεται να πέσει κατακόρυφα και το αβαρές νήμα ξετυλίγεται και από τις δύο τροχαλίες. Αν την $t=0$ το κέντρο μάζας της τροχαλίας απέχει από το έδαφος $h = 1,6\text{m}$.



Να βρεθούν:

- α) Η τάση του νήματος, οι γωνιακές επιταχύνσεις των δύο τροχαλιών και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας της μικρής τροχαλίας.
- β) Ο χρόνος που χρειάζεται η τροχαλία να φτάσει στο δάπεδο. Πόσο σχοινί έχει ξετυλιχθεί από την κάθε τροχαλία την ίδια στιγμή;

γ) Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια στη μικρή τροχαλία καθώς και ο ρυθμός παραγωγής έργου σε αυτή την στιγμή $t = 0,2s$.

Τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος η μικρή τροχαλία δεν αναπηδά κατακόρυφα στο έδαφος μέσω ειδικού μηχανισμού απόσβεσης που φέρει, ενώ ξετυλίγεται και όλο το σχοινί που είναι περασμένο γύρω από αυτή και το εγκαταλείπει. Στη συνέχεια κινείται ελεύθερη στο οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει τριβή με το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ δαπέδου και τροχαλίας να είναι $\mu = 0,2$. Η τροχαλία συμπεριφέρεται σαν δίσκος. Να βρεθούν

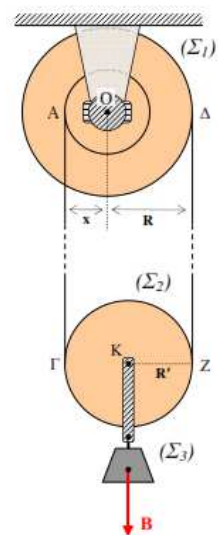
- δ) Ποια χρονική στιγμή θα ξεκινήσει ο δίσκος να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει και πόση είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας τη στιγμή αυτή;
- ε) Πόση απόσταση διανύει ο δίσκος μέχρι να ξεκινήσει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει; Πόση γωνία διαγράφει ο δίσκος μέχρι να ξεκινήσει να κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει;
- στ) Να γίνουν τα διαγράμματα της γωνιακής ταχύτητας, της ταχύτητας του κέντρου μάζας και της τριβής σε συνάρτηση με το χρόνο.
- ζ) Πόση θερμότητα εκλύεται μέχρι ο δίσκος να ξεκινήσει κύλιση χωρίς ολίσθηση;

Οι τροχαλίες θεωρούνται κυλινδρικά σώματα με ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής τους

$$I_M = \frac{1}{2}MR^2 \quad \text{και} \quad I_m = \frac{1}{2}mr^2 \quad \text{και} \quad g=10\text{m/s}^2.$$

3.5.66. Αναβατήριο με διπλή τροχαλία.

Η διπλή τροχαλία Σ_1 (δύο κολλημένοι δίσκοι) του σχήματος έχει εξωτερική ακτίνα $R = 0,2 \text{ m}$ και εσωτερική $x = R/2 = 0,1 \text{ m}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα O (κατά τη φορά του ρολογιού ή αντίθετα) με τη βοήθεια ηλεκτρικού κινητήρα που της ασκεί κατάλληλη ροπή τ . Στα δύο αυλάκια της είναι στερεωμένα και τυλιγμένα με αντίθετες φορές τα δύο άκρα μη εκτατού συρματόσκοινου.



Το ενδιάμεσο τμήμα του συρματόσκοινου είναι περασμένο γύρω από την περιφέρεια δεύτερης τροχαλίας Σ_2 ακτίνας R' , την οποία στηρίζει και μπορεί να τη στρέφει γύρω από τον κινητό της άξονα K χωρίς να ολισθαίνει στην περιφέρειά της. Τα τμήματα $ΑΓ$ και $ΔΖ$ του συρματόσκοινου είναι κατακόρυφα.

Από τον άξονα της τροχαλίας Σ_2 είναι κρεμασμένο σώμα Σ_3 βάρους $B = 2000 \text{ N}$, το οποίο ανυψώνεται αν τεθεί σε λειτουργία ο κινητήρας της τροχαλίας Σ_1 .

Υποθέτουμε ότι οι τροχαλίες και το συρματόσκοινο έχουν ασημαντή μάζα σε σχέση με τη μάζα του Σ_3 και ότι η ανύψωση γίνεται με μικρή σταθερή ταχύτητα.

- α) Με ποιά φορά πρέπει να στρέφεται η τροχαλία Σ_1 ώστε το σώμα Σ_3 να ανυψώνεται;
- β) Αν ο κινητήρας στρέφει την τροχαλία Σ_1 με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2 \text{ r/s}$, να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα ω' της τροχαλίας Σ_2 καθώς και την ταχύτητα ανύψωσης v_K του σώματος Σ_3 .

Να απεικονίσετε γραφικά τη σχέση $v_K(x)$ για $0 < x < R$.

γ) Αν το επιδιωκόμενο ύψος ανύψωσης είναι H , να υπολογίσετε το ελάχιστο απαιτούμενο μήκος S συρματόσκοινου που πρέπει να είναι αρχικά τυλιγμένο στον μικρό δίσκο της τροχαλίας Σ_1 .

δ) Να βρείτε τη ροπή τ που πρέπει να ασκεί ο κινητήρας στην τροχαλία Σ_1 και την ισχύ του P σε συνάρτηση με την ακτίνα x του μικρού δίσκου, καθώς επίσης και τον χρόνο ανύψωσης t σε ύψος H .

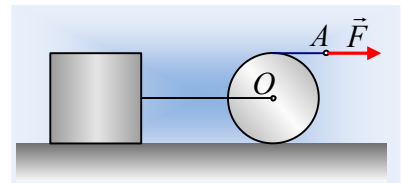
Να απεικονίσετε γραφικά τις σχέσεις $\tau(x)$, $P(x)$ και $t(x)$ για $0 < x < R$.

Εφαρμογή για $x = R/2 = 0,1 \text{ m}$ και $H = 10 \text{ m}$.

Θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

3.5.67. Ο κύλινδρος μεταφέρει τον κύβο;

Ένας κύλινδρος, μάζας $m=20\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,2\text{m}$ και ένας κύβος, μάζας $M=50\text{kg}$ ηρεμούν σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζουν συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,4$. Ένα αβαρές τεντωμένο οριζόντιο νήμα συνδέει το κέντρο του κυλίνδρου με τον κύβο, ενώ γύρω από τον κύλινδρο έχουμε τυλίξει ένα άλλο αβαρές νήμα, στο άκρο A του οποίου ασκούμε κάποια στιγμή μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F .

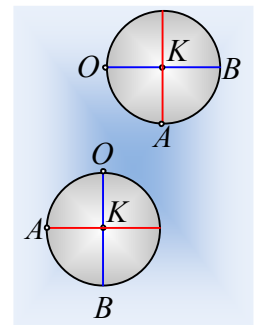


- Ποια είναι η μέγιστη τιμή της δύναμης F που μπορούμε να ασκήσουμε, χωρίς να κινηθούν τα σώματα;
- Αν τη στιγμή $t_0=0$ τραβήξουμε το άκρο του νήματος ασκώντας δύναμη $F_1=90\text{N}$, να υπολογιστούν τη στιγμή $t_1=2\text{s}$:
 - Η ταχύτητα του άκρου A .
 - Η ισχύς της δύναμης.
 - Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας κάθε σώματος.
- Ποιες θα ήταν οι αντίστοιχες απαντήσεις στα προηγούμενα υποερωτήματα, αν η ασκούμενη δύναμη F είχε μέτρο $F_2=155\text{N}$;

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2} mR^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

3.5.68. Ένας περιστρεφόμενος δίσκος αποδεσμεύεται.

Ένας ομογενής δίσκος, μάζας $M=6\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,6\text{m}$ μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από ένα σημείο O της περιφέρειάς του, σε ύψος $H=1,6\text{m}$ από το έδαφος. Φέρνουμε το δίσκο στη θέση του πρώτου σχήματος, ώστε η διάμετρος OB να είναι οριζόντια και τον αφήνουμε να κινηθεί.



- Να υπολογιστεί η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου, καθώς και η αρχική επιτάχυνση του σημείου A , στο άκρο της κατακόρυφης διαμέτρου του.
- Μετά από λίγο η διάμετρος OB γίνεται κατακόρυφη, όπως στο δεύτερο σχήμα. Για την θέση αυτή να βρεθούν:

α) Η στροφορμή του δίσκου κατά (ως προς) τον άξονα περιστροφής του.

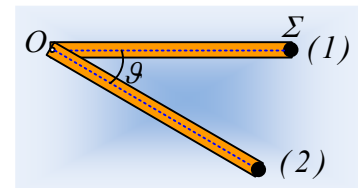
β) Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του δίσκου.

γ) η επιτάχυνση του σημείου Α.

iii) Αν τη στιγμή που ο δίσκος βρίσκεται στην παραπάνω θέση, αποδεσμεύεται από τον άξονα περιστροφής του και πέφτει ελεύθερα να υπολογίσετε την κινητική του ενέργεια τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$, ενώ η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του $I= \frac{1}{2} MR^2$.

3.5.69. Η ράβδος και η σημειακή μάζα.

Μια ομογενής ράβδος μήκους $\ell=1,5\text{m}$ και μάζας $m=3\text{kg}$ μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της Ο. Στο άλλο άκρο της ράβδου δένουμε ένα σώμα Σ, της ίδιας μάζας m με τη ράβδο και αμελητέων διαστάσεων (υλικό σημείο), οπότε έτσι δημιουργούμε ένα στερεό s. Φέρνουμε το στερεό στη θέση (1) ώστε η ράβδος να είναι οριζόντια και το αφήνουμε να κινηθεί.



i) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του στερεού s, ως προς τον άξονα περιστροφής του.

ii) Να βρεθεί η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του στερεού, καθώς και η δύναμη F που ασκείται στο σώμα Σ από τη ράβδο, αμέσως μόλις αφεθεί το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί.

iii) Μετά από λίγο, η ράβδος σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ , όπου $\eta\mu\theta=0,6$, ευρισκόμενη στη θέση (2). Για τη θέση αυτή ζητούνται:

α) Η κινητική ενέργεια του στερεού s.

β) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής του σώματος Σ, κατά (ως προς) τον άξονα περιστροφής στο Ο.

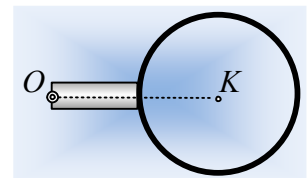
γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του στερεού s.

iv) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης F (που ασκεί η σανίδα στο σώμα Σ), από την θέση (1) μέχρι τη θέση (2).

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της στο Ο, $I_1= \frac{1}{3} m\ell^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

3.5.70. Εσωτερικές δυνάμεις και ροπές.

Μια ομογενής ράβδος μήκους $\ell=1\text{m}$ και μάζας $M=6\text{kg}$ μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της Ο. Στο άλλο άκρο της ράβδου προσκολλάται μια στεφάνη Σ, μάζας $m=0,6\text{kg}$ και ακτίνας $R=1\text{m}$, οπότε έτσι δημιουργούμε ένα στερεό s. Φέρνουμε το στερεό σε θέση τέτοια, ώστε η ράβδος να είναι οριζόντια και το αφήνουμε να κινηθεί.



i) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του στερεού s, ως προς τον άξονα περιστροφής του.

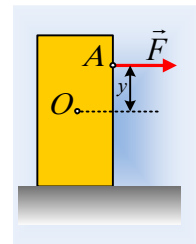
ii) Να βρεθεί η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του στερεού, καθώς και η αρχική επιτάχυνση του κέντρου Κ της στεφάνης.

- iii) Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκείται στην στεφάνη από τη δοκό, στην παραπάνω θέση.
- iv) Υποστηρίζεται ότι στη στεφάνη, εκτός της παραπάνω δύναμης ασκείται και κάποια επιπλέον ροπή από τη δοκό. Να εξετάσετε την ορθότητα ή μη της παραπάνω θέσης.
- v) Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στο στερεό s από την άρθρωση, μόλις αφηθεί να κινηθεί.
- vi) Να εξετάσετε αν η στεφάνη, πέρα από την άσκηση δύναμης, ασκεί επιπλέον και κάποια ροπή στη ράβδο.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα περιστροφής ο οποίος περνά από το μέσον της $I_{cm} = 1/12 Ml^2$ και $g=10\text{m/s}^2$.

3.5.71. Διερευνώντας την ανατροπή και την ολίσθηση.

Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας «όρθιος» ομογενής κύλινδρος, μάζας $M=60\text{kg}$, ακτίνας R και ύψους $4R$. Ασκούμε στο σημείο A , το οποίο απέχει κατακόρυφη απόσταση $y=R$ από το κέντρο μάζας O , μια οριζόντια δύναμη F , όπως στο σχήμα (η προβολή του κυλίνδρου στο επίπεδο κίνησής του).



- Ποιο το ελάχιστο μέτρο της δύναμης F για να ανατραπεί ο κύλινδρος, αν ο συντελεστής τριβής είναι αρκετά μεγάλος, ώστε να μην προηγηθεί ολίσθηση του κυλίνδρου;
- Στο σημείο A ασκούμε μεταβλητή οριζόντια δύναμη που το μέτρο της μεταβάλλεται με το χρόνο, σύμφωνα με την εξίσωση $F=4t$ (S.I.). Αν οι συντελεστές τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου έχουν τιμές $\mu=\mu_s=0,3$ ο κύλινδρος πρώτα θα ανατραπεί ή θα ολισθήσει;
- Ποια χρονική στιγμή θα ανατραπεί ο κύλινδρος;
- Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη στιγμή που αρχίζει να ανατρέπεται.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.