

ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΡΟΧΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΣΧΟΙΝΙΟΥ ΠΟΥ ΠΕΡΙΒΑΛΛΕΙ ΤΟ ΑΥΛΑΚΙ ΤΗΣ

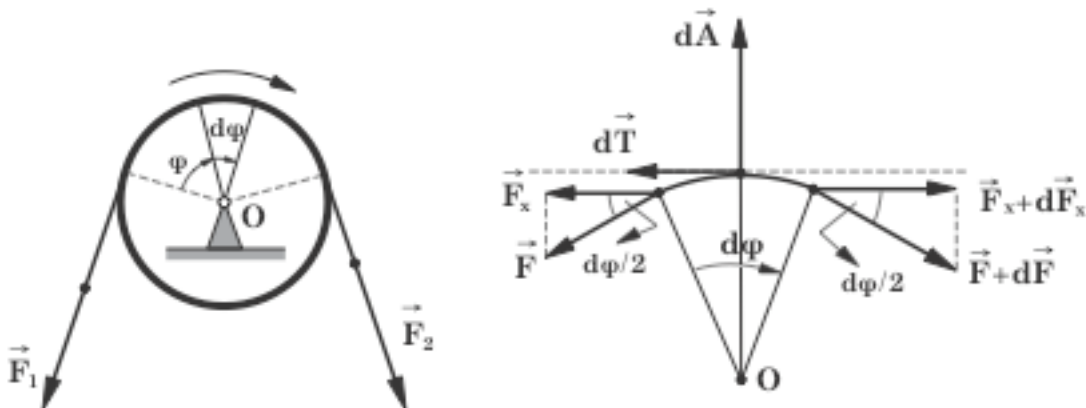
Παραδειγμα

1ο

Ένα αβαρές σχοινί περιβάλλει το αυλάκι μιας σταθερής τροχαλίας, η οποία μπορεί να στρέφεται περί οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Εάν φ_0 είναι η γωνία υπό την οποία φαίνεται εκ του κέντρου της τροχαλίας το τμήμα του σχοινιού που είναι σ' επαφή με την τροχαλία και μ ο συντελεστής οριακής τριβής ανάμεσα στο σχοινί και την τροχαλία, να δείξετε ότι για να ισορροπεί η τροχαλία πρέπει τα μέτρα των τάσεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ του σχοινιού να ικανοποιούν την σχέση:

$$e^{-\mu\varphi_0} \leq F_2/F_1 \leq e^{\mu\varphi_0}$$

ΛΥΣΗ: Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα του σχοινιού που περιβάλλει τον λαιμό της τροχαλίας, το οποίο φαίνεται εκ του κέντρου της υπό την στοιχειώδη γωνία $d\varphi$ (σχ. 1). Το τμήμα αυτό δέχεται τις δυνάμεις $\vec{F}$ και $\vec{F} + d\vec{F}$ στις άκρες του από τα εκατέρωθεν αυτού μέρη του σχοινιού, οι οποίες είναι εφαπτο



Σχήμα 1

μενικές της τροχαλίας και την δύναμη επαφής από την τροχαλία, η οποία αναλύεται στην εφαπτομενική τριβή $d\vec{T}$ και στην κάθετη αντίδραση $d\vec{A}$, της οποίας ο φορέας διέρχεται από το κέντρο της τροχαλίας. Λόγω της ισορροπίας του στοιχειώδους τμήματος, κατά την διεύθυνση της εφαπτομένης στο μέσον του θα ισχύει:

$$(F + dF) \cos(d\varphi/2) - F \cos(d\varphi/2) + dT = 0 \Rightarrow$$

$$F + dF - F + dT = 0 \Rightarrow dF = dT \quad (1)$$

Η (1) πρέπει να ισχύει και στην περίπτωση οριακής ισορροπίας του σχοινιού, δηλαδή όταν επίκειται η ολίσθησή του στο αυλάκι της τροχαλίας και τότε η (1) παίρνει την μορφή:

$$dF = \mu dA \quad (2)$$

Εξάλλου η ισορροπία του στοιχειώδους τμήματος που εξετάζουμε, κατά την κάθετη επί την εφαπτομένη διεύθυνση, μας επιτρέπει να γράψουμε την σχέση:

$$(F + dF) \eta \mu(d\phi/2) + F \eta \mu(d\phi/2) - dA = 0 \Rightarrow$$

$$F d\phi/2 + dF d\phi/2 + F d\phi/2 = dA$$

Όμως το γινόμενο $dF \cdot d\phi/2$ είναι διαφορικό δεύτερης τάξεως και μπορεί να παραλειφθεί, οπότε θα έχουμε:

$$F d\phi = dA \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (3) παίρνουμε:

$$dF = \mu F d\phi \Rightarrow dF/F = \mu d\phi \quad (4)$$

Ολοκληρώνοντας την (4) έχουμε:

$$\int_{F_1}^{F_2} (dF/F) = \int_0^{\phi_0} (\mu d\phi) \Rightarrow \ln(F_2/F_1) = \mu \phi_0 \Rightarrow$$

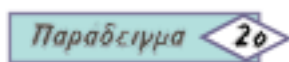
$$F_2/F_1 = e^{\mu\phi_0} \Rightarrow F_2 = F_1 e^{\mu\phi_0} \quad (5)$$

Η σχέση (5) ισχύει όταν η τροχαλία ισορροπεί οριακά με τάση να στραφεί δεξιόστροφα, οπότε $F_2 > F_1$. Αν η τροχαλία ισορροπεί οριακά με τάση να στραφεί αριστερόστροφα, τότε $F_2 < F_1$ και η αντίστοιχη σχέση είναι:

$$F_1 = F_2 e^{\mu\phi_0} \Rightarrow F_2 = F_1 e^{-\mu\phi_0} \quad (5)$$

Άρα για να ισορροπεί η τροχαλία πρέπει να ισχύει:

$$e^{-\mu\phi_0} \leq F_2/F_1 \leq e^{\mu\phi_0}$$



Η ράβδος ΑΓ του σχήματος (2) είναι ομογενής με βάρος $\vec{w}_1$ και μπορεί να στρέφεται περί το αρθρωμένο άκρο της Γ. Το οριζόντιο αβαρές σχοινί που συγκρατεί την ράβδο υπό κλίση $\phi = \pi/4$ ως προς την οριζόντια διεύθυνση περιβάλλει το αυλάκι μίας σταθερής τροχαλίας, η οποία μπορεί να στρέφεται περί οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Εάν το τμήμα του σχοινιού που είναι σε επαφή με το αυλάκι της τροχαλίας φαίνεται από το κέντρο της υπο γωνία $\pi/2$ και ο συντελεστής οριακής τριβής ανάμεσα στο σχοινί και

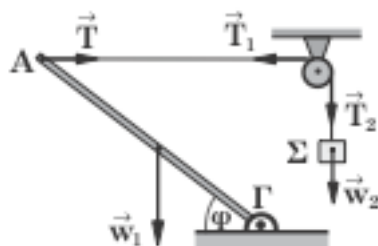
την τροχαλία είναι μ , με $\mu\pi \ll 1$, να δείξετε ότι το σύστημα ισορροπεί εφ' όσον ισχύει η σχέση:

$$\frac{w_1\sqrt{2}}{4}\left(1 - \frac{n\pi}{2}\right) \leq w_2 \leq \frac{w_1\sqrt{2}}{4}\left(1 + \frac{n\pi}{2}\right)$$

ΛΥΣΗ: Στην ράβδο ΑΓ ενεργεί το βάρος της $\vec{w}_1$, η τάση $\vec{T}$ του οριζόντιου σχοινιού που την συγκρατεί και η αντίδραση της αρθρώσεως, της οποίας ο φορέας διέρχεται από το άκρο Γ της ράβδου (σχ. 2). Λόγω της ισορροπίας της ράβδου το άθροισμα των ροπών των τριών αυτών δυνάμεων περί το άκρο της Γ είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή έχουμε την σχέση:

$$\Sigma \tau_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow T L \eta \mu \varphi - w_1 (L/2) \sigma \nu \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$T \eta \mu (\pi/4) = (w_1/2) \sigma \nu (\pi/4) \Rightarrow T = w_1/2 \quad (1)$$



Σχήμα 2

Όμως ισχύει $T=T_1$, όπου $\vec{T}_1$ η τάση του οριζόντιου σχοινιού στο σημείο επαφής του με την τροχαλία, οπότε η (1) γράφεται:

$$T_1 = w_1/2 \quad (2)$$

Εξάλλου η ισορροπία του σώματος Σ και το γεγονός ότι το σχοινί είναι αβαρές εξασφαλίζουν ότι η τάση $\vec{T}_2$ του κατακόρυφου κλάδου του σχοινιού που συγκρατεί το σώμα είναι ίση με το βάρος $\vec{w}_2$ του σώματος, δηλαδή ισχύει $T_2=w_2$. Όμως στο προηγούμενο παράδειγμα αποδείχθηκε η σχέση:

$$e^{-\mu\pi/2} \leq \frac{T_1}{T_2} \leq e^{\mu\pi/2} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} e^{-\mu\pi/2} \leq \frac{w_1}{2w_2} \leq e^{\mu\pi/2} \Rightarrow$$

$$2e^{-\mu\pi/2} \leq \frac{w_1}{w_2} \leq 2e^{\mu\pi/2} \Rightarrow \frac{w_1}{2} e^{-\mu\pi/2} \leq w_2 \leq \frac{w_1}{2} e^{\mu\pi/2} \quad (3)$$

Τα αναπτύγματα κατά Maclaurent των εκθετικών όρων $e^{\mu\pi/2}$ και $e^{-\mu\pi/2}$ επιτρέπουν τις σχέσεις:

$$e^{\mu\pi/2} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 + \dots$$

και

$$e^{-\mu\pi/2} = 1 - \frac{1}{1!}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)^2 - \dots$$

οι οποίες λόγω του δεδομένης συνθήκης $\mu\pi \ll 1$, προσεγγιστικά γράφονται:

$$e^{\mu\pi/2} \approx 1 + \frac{\mu\pi}{2} \quad \text{και} \quad e^{-\mu\pi/2} \approx 1 - \frac{\mu\pi}{2}$$

Έτσι η (1) παίρνει την μορφή:

$$\frac{w_1\sqrt{2}}{4}\left(1 - \frac{\mu\pi}{2}\right) \leq w_2 \leq \frac{w_1\sqrt{2}}{4}\left(1 + \frac{\mu\pi}{2}\right)$$

που αποτελεί και την αποδεικτέα σχέση.

P.M. fysikos