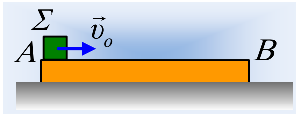
Ένα σύστημα, η ορμή και η ενέργεια



Μια λεπτή σανίδα ΑΒ, μήκους 4m και μάζας Μ=1kg, ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στη σανίδα και στο αριστερό άκρο της Α ηρεμεί ένα μικρό σώμα Σ, μάζας m=0,2kg. Κάποια στιγμή $t_0=0$ το Σ δέχεται στιγμιαίο κτύπημα, με αποτέλεσμα να αποκτήσει αρχική ταχύτητα $\upsilon_0=4m/s$ και να κινηθεί κατά μήκος της σανίδας. Αν τη στιγμή $t_1=1s$, το Σ έχει ταχύτητα $\upsilon_1=2m/s$, να βρεθούν τη χρονική αυτή στιγμή:

i) Η ταχύτητα της σανίδας.

ii) Οι ρυθμοί μεταβολής της ορμής, του σώματος Σ, της σανίδας και του συστήματος σώμα Σ-σανίδα.

iii) Η απόσταση του σώματος Σ από το άκρο Β της σανίδας.

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ και της σανίδας, καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας των τριβών.

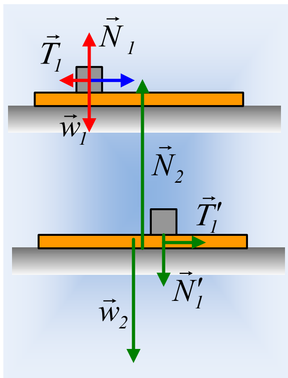
Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα η σανίδα αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει τριβή με συντελεστές τριβής $\mu_s=\mu=0,02$. Ξανά για τη στιγμή $t_1=1s$, να υπολογιστούν:

v) Οι ταχύτητες του Σ και της σανίδας.

vi) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ και της σανίδας, καθώς και ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας των τριβών.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ και στη σανίδα.

Για το σώμα Σ, $\Sigma F_y=0 \rightarrow N_1=w_1$

Για την σανίδα $\Sigma F_y=0 \rightarrow N_2=w_2+N_1'=w_2+N_1=w_2+w_1$.

i) Συνεπώς το σύστημα των δύο σωμάτων (Σ - σανίδα) είναι μονωμένο και από την ΑΔΟ παίρνουμε (θετική φορά προς τα δεξιά):

$$\vec{P}_{0,o\lambda}=\vec{P}_{1,o\lambda}\rightarrow$$

$$m\upsilon_0=m\upsilon_1+M\upsilon_2\rightarrow\upsilon_2=\frac{m(\upsilon_0-\upsilon_1)}{M}=\frac{0,2(4-2)}{1}m/s=0,4m/s$$

ii) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα Σ παίρνουμε:

$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}=\Sigma\vec{F}\rightarrow\frac{m\upsilon_1-m\upsilon_0}{\Delta t}=\Sigma F_x\rightarrow$$

$$T_1=\frac{m\upsilon_1-m\upsilon_0}{\Delta t}=\frac{0,2(2-4)}{1}N=-0,4N$$

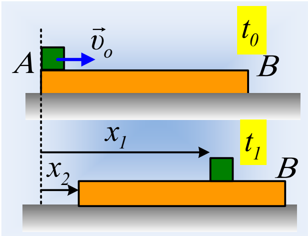
Όπου το πρόσημο (-) σημαίνει ότι έχει φορά προς τα αριστερά.

Αλλά η τριβή αυτή, τριβή ολίσθησης έχει σταθερό μέτρο, οπότε και για τη στιγμή t_1, θα έχουμε:

Για το σώμα Σ: $\frac{d\vec{P}_\Sigma}{dt} = \Sigma\vec{F} \rightarrow \frac{dP_\Sigma}{dt} = T_1 = -0{,}4\,{}^{kgm}\!/_{s^2}$.

Για τη σανίδα: $\frac{d\vec{P}_\sigma}{dt} = \Sigma\vec{F}_\sigma \rightarrow \frac{dP_\sigma}{dt} = T_1' = +0{,}4\,{}^{kgm}\!/_{s^2}$.

Για το σύστημα: $\frac{d\vec{P}_{o\lambda}}{dt} = \Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi} \rightarrow \frac{dP_{o\lambda}}{dt} = 0$



iii) Εφαρμόζουμε για το χρονικό διάστημα 0-1s το Θ.Μ.Κ.Ε για κάθε σώμα χωριστά και παίρνουμε:

Σώμα Σ: $K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{w_1} + W_{N_1} + W_{T_1} \rightarrow$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -T_1x_1 \rightarrow x_1 = \frac{m(\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2)}{2T_1} = \frac{0{,}2(2^2 - 4^2)}{2\cdot 0{,}4}m = 3m$$

Σανίδα: $K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{w_2} + W_{N_1'} + W_{N_2} + W_{T_1'} \rightarrow$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_2^2 - 0 = T_1x_2 \rightarrow x_2 = \frac{M\upsilon_2^2}{2T_1} = \frac{1\cdot 0{,}4^2}{2\cdot 0{,}4}m = 0{,}2m$$

Αλλά αν D η απόσταση του Σ από το άκρο Β τη στιγμή αυτή ισχύει x_1+D=x_2+L οπότε:

$$D=L+x_2-x_1=4m+0{,}2m-3m=1{,}2m$$

iv) Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας ενός σώματος, έχουμε με τη βοήθεια του Θ.Μ.Κ.Ε.:

$$\Delta K = \Sigma W = W_{\Sigma F} \rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F\cdot dx\cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{dt} = \Sigma F\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Όπου υ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος και α η γωνία μεταξύ της συνισταμένης δύναμης και της ταχύτητας. Έτσι στην περίπτωσή μας έχουμε:

Σώμα Σ: $\frac{dK_1}{dt} = \Sigma F\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha = -T_1\cdot\upsilon_1 = -0{,}4\cdot 2J/s = -0{,}8J/s$

Σανίδα: $\frac{dK_2}{dt} = \Sigma F\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha = T_1'\cdot\upsilon_2 = 0{,}4\cdot 0{,}4J/s = 0{,}16J/s$

Αλλά αν το σώμα Σ «χάνει» ενέργεια με ρυθμό 0,8J/s, ενώ η σανίδα «κερδίζει» ενέργεια με ρυθμό 0,16J/s, το υπόλοιπο (0,8 J/s -0,16 J/s =0,64 J/s) είναι ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της τριβής (Α.Δ.Ε.).

Ας το δούμε από μια άλλη οπτική γωνία. Για έναν παρατηρητή πάνω στη σανίδα, το σώμα Σ ολισθαίνει πάνω της με ταχύτητα u (την ονομάζουμε σχετική ταχύτητα του Σ ως προς τη σανίδα):

$$u=\upsilon_1-\upsilon_2=2m/s-0{,}4m/s=1{,}6m/s$$

Αλλά τότε η ισχύς της τριβής ολίσθησης θα είναι:

$$P_{T_1} = T_1\cdot u\cdot\sigma\upsilon\nu 180^o = -T_1\cdot u = -0{,}4\cdot 1{,}6J/s = -0{,}64J/s$$

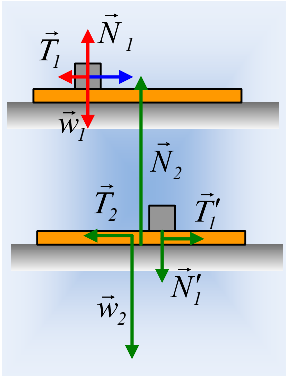
Η οποία μετράει το ρυθμό με τον οποίο η τριβή ολίσθησης μετατρέπει τη μηχανική ενέργεια σε θερμική.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω ισχύς γράφεται και:

$$P_{T_1} = -T_1 \cdot u = -T_1(\upsilon_1 - \upsilon_2) = -T_1\upsilon_1 + T_1\upsilon_2 = -0{,}8\ J/s + 0{,}16\ J/s = -0{,}64\ J/s$$

Επιβεβαιώνοντας αυτό που προηγουμένως εκφράσαμε μέσω της διατήρησης της ενέργειας!

v) Η κατάσταση είναι ακριβώς ίδια με προηγουμένως, με μόνη διαφορά ότι τώρα, στη σανίδα ασκείται δύναμη τριβής από το έδαφος, η T_2, όπως στο σχήμα. Αλλά αυτό με τη σειρά του συνεπάγεται ότι το σύστημα σώμα Σ- σανίδα δεν είναι πια μονωμένο!



Για το μέτρο της τριβής T_2 έχουμε:

$$T_2=\mu N_2=\mu(m+M)g=0{,}02(0{,}2+1)\cdot 10N=0{,}24N$$

Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για το σώμα Σ (θετική φορά προς τα δεξιά) παίρνουμε:

$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \Sigma\vec{F} \to \frac{m\upsilon_1' - m\upsilon_0}{\Delta t} = -T_1 \to$$

$$\upsilon_1' = \upsilon_0 - \frac{T_1 \cdot t_1}{m} = 4m/s - \frac{0{,}4 \cdot 1}{0{,}2}m/s = 2m/s$$

(ίδια με πριν, αφού όσον αφορά το Σ δεν άλλαξε κάτι). Αντίστοιχα για τη σανίδα:

$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \Sigma\vec{F} \to \frac{M\upsilon_2' - 0}{\Delta t} = T_1 - T_2 \to$$

$$\upsilon_2' = \frac{(T_1 - T_2)t_1}{M} = \frac{(0{,}4 - 0{,}24)1}{1}m/s = 0{,}16m/s$$

vi) Οι αντίστοιχοι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

Σώμα Σ: $\dfrac{dK_1}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = -T_1 \cdot \upsilon_1' = -0{,}4 \cdot 2J/s = -0{,}8J/s$

Σανίδα: $\dfrac{dK_2}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = (T_1' - T_2)\cdot \upsilon_2' = (0{,}4 - 0{,}24)\cdot 0{,}16J/s = 0{,}0256J/s$

Αλλά αν το σώμα Σ «χάνει» ενέργεια με ρυθμό 0,8J/s, ενώ η σανίδα «κερδίζει» ενέργεια με ρυθμό 0,0256J/s, το υπόλοιπο (0,8 J/s -0,0256J/s =0,7744 J/s) είναι ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της τριβής.

Σχόλιο:

Και στο τελευταίο ερώτημα θα μπορούσαμε να απαντήσουμε με βάση τη λογική του ερωτήματος iv). Θερμική ενέργεια εμφανίζεται στις επιφάνειες που τρίβονται, οπότε:

Μεταξύ Σ και σανίδας:

$$P_{T_1} = T_1 \cdot u' \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o = -T_1 \cdot u' = -0{,}4 \cdot 1(2 - 0{,}16)J/s = -0{,}736J/s$$

Μεταξύ σανίδας και επιπέδου:

$$P_{T_2} = T_2 \cdot \upsilon_2' \cdot \sigma\upsilon\nu 180^o = -T_2 \cdot \upsilon_2' = -0{,}24 \cdot 0{,}16 J/s = -0{,}0384 J/s$$

Οπότε συνολικά:

$$\frac{dQ_\theta}{dt} = \left|P_{T_1}\right| + \left|P_{T_2}\right| = 0{,}736 J/s + 0{,}0384 J/s = 0{,}7744 J/s$$

dmargaris@gmail.com