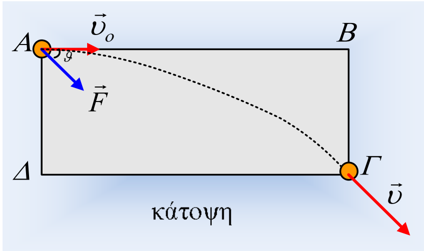
Μια οριζόντια «οριζόντια βολή»



Στην κορυφή Α ενός ορθογώνιου τραπεζιού ΑΒΓΔ με πλευρές (ΑΒ)=2,75m και (ΑΔ)=1m ηρεμεί μια μικρή σφαίρα μάζας m=0,8 kg. Σε μια στιγμή δέχεται ένα κτύπημα με αποτέλεσμα να αποκτήσει οριζόντια ταχύτητα υ_o στη διεύθυνση της ΑΒ ενώ ταυτόχρονα ασκείται πάνω της μια **σταθερή** δύναμη $\vec{F}$, μέτρου F=0,5N, η διεύθυνση της οποίας σχηματίζει γωνία θ με την διεύθυνση της ΑΒ, όπου ημθ=0,8 και συνθ=0,6. Η σφαίρα κινείται χωρίς τριβές και εγκαταλείπει το τραπέζι από την κορυφή Γ, όπως στο σχήμα.

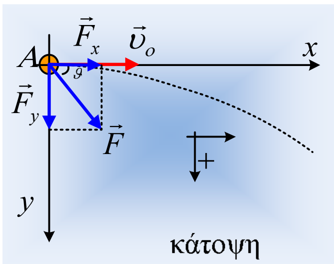
i) Επί πόσο χρόνο κινήθηκε πάνω στο τραπέζι η σφαίρα;

ii) Να υπολογιστεί η αρχική ταχύτητα υ_o.

iii) Πόση ενέργεια μεταφέρθηκε στη σφαίρα μέσω του έργου της δύναμης F από το Α στο Γ και ποια η μέση ισχύς της ασκούμενης δύναμης F;

iv) Με ποιο ρυθμό η δύναμη F μεταφέρει ενέργεια στη σφαίρα τη στιγμή t=0 (αμέσως μόλις αρχίσει να κινείται) και ελάχιστα πριν εγκαταλείψει το τραπέζι;

Απάντηση:



Θεωρούμε ένα σύστημα αξόνων x, y, όπως στο σχήμα, με αρχή την κορυφή του τραπεζιού Α και τον άξονα x πάνω στην πλευρά ΑΒ ενώ τον y στην ΑΔ. Αναλύοντας τη δύναμη F σε συνιστώσες πάνω στους άξονες, έχουμε F_x=F·συνθ και F_y=F·ημθ. Από το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής παίρνουμε:

$$\alpha_x = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{F_x}{m} = \frac{F\cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{m} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}6}{0{,}8} m/s^2 = \frac{3}{8} m/s^2$$

$$\alpha_y = \frac{\Sigma F_y}{m} = \frac{F_y}{m} = \frac{F\cdot \eta\mu\theta}{m} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}8}{0{,}8} m/s^2 = 0{,}5 m/s^2$$

Αλλά τότε με βάση την αρχή της επαλληλίας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε μια ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα, στον άξονα x και μια επίσης ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, στον άξονα y, γράφοντας τις εξισώσεις:

Άξονας x	Άξονας y
$\upsilon_x = \upsilon_o + \alpha_x t$ (1)	$\upsilon_y = \alpha_y t$ (3)
$x = \upsilon_o t + \frac{1}{2}\alpha_x t^2$ (2)	$y = \frac{1}{2}\alpha_y t^2$ (4)

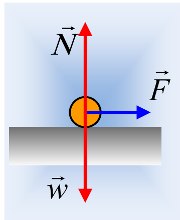
i) Τη στιγμή που η σφαίρα εγκαταλείπει το τραπέζι x=(ΟΔ) και λύνοντας την (4) ως προς t βρίσκουμε:

$$y=\frac{1}{2}\alpha_y t^2 \rightarrow t=\sqrt{\frac{2y}{\alpha_y}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1}{0,5}}s=2s$$

ii) Τη παραπάνω στιγμή (t=2s) η απόσταση στη διεύθυνση x που έχει διανύσει η σφαίρα, είναι x=(AB) και από την (2) παίρνουμε:

$$x=\upsilon_o t+\frac{1}{2}\alpha_x t^2 \rightarrow \upsilon_o=\frac{2x-\alpha_x t^2}{2t}=\frac{2\cdot 2,75-{}^{3}\!/_{8}\cdot 2^2}{2\cdot 2}m/s=1m/s$$

iii) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για τη σφαίρα από το Α στο Γ παίρνοντας:



$$K_\Gamma-K_A=W_w+W_N+W_F$$

Αφού οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, είναι αυτές που φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{1}{2}m\upsilon_o^2=0+0+W_F$$

Τη στιγμή όμως που η σφαίρα εγκαταλείπει το τραπέζι έχει ταχύτητα $\upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}$ όπου:

$$\upsilon_x=\upsilon_o+\alpha_x t=1m/s+\frac{3}{8}\cdot 2m/s=\frac{7}{4}m/s \text{ και}$$

$$\upsilon_y=\alpha_y t=0,5\cdot 2m/s=1m/s$$

Οπότε το έργο της δύναμης είναι:

$$W_F=\frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{1}{2}m\upsilon_o^2=\frac{1}{2}m\left(\upsilon^2-\upsilon_o^2\right)=\frac{1}{2}m\left[\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2\right)-\upsilon_o^2\right]\rightarrow$$

$$W_F=\frac{1}{2}0,8\left[\left(\left(\frac{7}{4}\right)^2+1^2\right)-1^2\right]J=\frac{49}{40}J$$

Ενώ για τη **μέση** ισχύ της δύναμης έχουμε:

$$P_\mu=\frac{W_F}{t}=\frac{{}^{49}\!/_{40}}{2}W=\frac{49}{80}W$$

iv) Ο στιγμιαίος ρυθμός με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στη σφαίρα, είναι η στιγμιαία ισχύς της δύναμης, η οποία είναι:

$$P=\frac{\Delta W_F}{\Delta t}=\frac{F\cdot\Delta x\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{\Delta t}=F\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Όπου α η γωνία μεταξύ δύναμης και ταχύτητας.

Αλλά τότε τη στιγμή t=0, η ισχύς είναι:

$$P_o=F\cdot\upsilon_o\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta=0,5\cdot 1\cdot 0,6W=0,3W$$

Σημείωση:

Με βάση τον υπολογισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \alpha_x \beta_x + \alpha_y \beta_y$, όπου α_x, α_y οι συνιστώσες του διανύσματος στους άξονες x και y και β_x, β_y οι αντίστοιχες συνιστώσες του β. Αλλά τότε η παραπάνω ισχύς θα μπορούσε να υπολογιστεί, με βάση τα μαθηματικά:

$$P_o = F_x \upsilon_o + F_y \upsilon_y = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 1W + 0 = 0{,}3W$$

Με βάση την παραπάνω σημείωση, τη στιγμή που η μπάλα εγκαταλείπει το τραπέζι, η ισχύς της δύναμης είναι:

$$P_{\tau\varepsilon\lambda} = F_x \upsilon_x + F_y \upsilon_y = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot \frac{7}{4} W + 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 1W = 0{,}925W$$

dmargaris@gmail.com