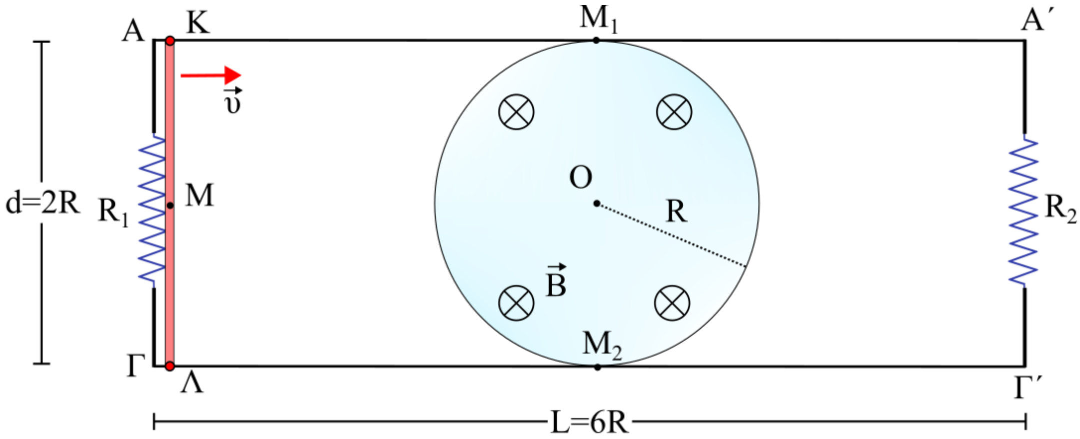
Κινούμενος αγωγός σε ΟΜΠ κυκλικής διατομής

Διαθέτουμε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο το οποίο καλύπτει το εσωτερικό ενός κυλίνδρου ακτίνας $R = 1m$. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι κατακόρυφη και έχει μέτρο $B = 1T$. Δύο παράλληλοι αγώγιμοι στύλοι ΑΑ΄ και ΓΓ΄ είναι οριζόντιοι, απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 2R = 2m$ και είναι αμελητέας ωμικής αντίστασης. Το οριζόντιο επίπεδο που οι στύλοι ορίζουν τέμνει το κυλινδρικό ομογενές μαγνητικό πεδίο και η διατομή είναι κύκλος κέντρου Ο. Στο εξωτερικό της κυκλικής αυτής περιοχής το μαγνητικό πεδίο είναι μηδενικό. Οι δύο στύλοι εφάπτονται του κύκλου αυτού στα μέσα τους M_1 και M_2 αντίστοιχα και έχουν μήκος $L = 6R = 6m$. Τα Α και Γ ενώνονται με αντιστάτη αντίστασης $R_1 = 4\Omega$, ενώ τα άκρα Α΄ και Γ΄ με αντιστάτη αντίστασης $R_2 = 4\Omega$. Ένας άλλος λεπτός αγωγός ΚΛ συνδέεται στα άκρα του με τους δύο στύλους, είναι διαρκώς κάθετος σε αυτούς, έχει μήκος $(K\Lambda) = d = 2m$ και αμελητέα αντίσταση, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο ΚΛ βρίσκεται πολύ κοντά στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ (θεωρούμε αμελητέα την απόστασή τους) και αρχίζει να κινείται προς το Α΄Γ΄ διατηρώντας με κατάλληλο τρόπο διαρκώς σταθερή την ταχύτητά του και με μέτρο ίσο με $\upsilon = 1m/s$. Εάν Μ το μέσον του ΚΛ τότε το ΟΜ είναι διαρκώς παράλληλο στους στύλους και η φορά της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι από τον αναγνώστη προς τη σελίδα στην κυκλική διατομή. Να θεωρήσετε ότι δεν ασκείται δύναμη τριβής από τους στύλους στον αγωγό ΚΛ κατά την κίνησή του.

Α. Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή που ο αγωγός ΚΛ αρχίζει να εισέρχεται στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου, τη χρονική στιγμή που εξέρχεται από αυτό καθώς και τη χρονική στιγμή που φθάνει στο Α΄Γ΄ άκρο.

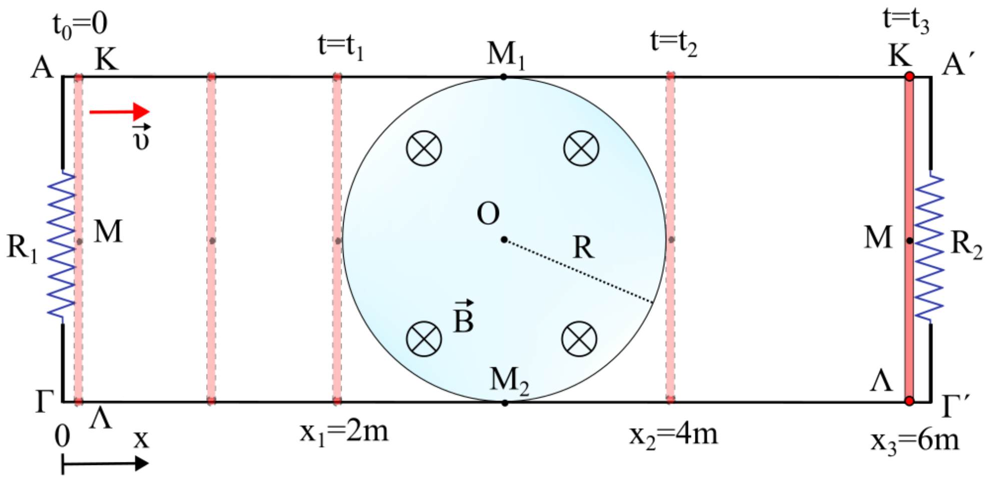
Β. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της ΗΕΔ από επαγωγή που αναπτύσσεται στον αγωγό ΚΛ κατά την κίνησή του, καθώς και τη χρονική εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος που τον διαρρέει, μέχρι αυτός να φθάσει στο Α΄Γ΄ άκρο.

Γ. Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης εξωτερικής δύναμης που πρέπει να ασκείται κάθετα στον ΚΛ και στο μέσο του Μ κατά την κίνησή του, ώστε αυτή να διατηρείται ισοταχής.

Δ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη ηλεκτρική ισχύ που καταναλώνεται συνολικά από το κύκλωμα κατά την κίνηση του ΚΛ.

Απάντηση

Α. Ο αγωγός ΚΛ εκτελεί μεταφορική κίνηση, η οποία είναι ευθύγραμμη ομαλή. Άρα, οι ζητούμενες χρονικές στιγμές (με βάση και το παρακάτω σχήμα) θα είναι:



είσοδος:

$$t_1 = \frac{x_1}{\upsilon} = \frac{\frac{L}{2} - R}{\upsilon} \Rightarrow t_1 = \frac{3-1}{1}s \Rightarrow \boxed{t_1 = 2s}$$

έξοδος:

$$t_2 = \frac{x_2}{\upsilon} = \frac{\frac{L}{2} + R}{\upsilon} \Rightarrow t_2 = \frac{3+1}{1}s \Rightarrow \boxed{t_2 = 4s}$$

τελική θέση:

$$t_3 = \frac{x_3}{\upsilon} = \frac{L}{\upsilon} \Rightarrow t_3 = \frac{6}{1}s \Rightarrow \boxed{t_3 = 6s}$$

Β. Για τα χρονικά διαστήματα που ο αγωγός ΚΛ βρίσκεται εξ ολοκλήρου εκτός του μαγνητικού πεδίου, δεν εμφανίζεται ΗΕΔ, με αποτέλεσμα να μην διαρρέεται και ο αγωγός από ηλεκτρικό ρεύμα. Επομένως,

Για $0 \leq t \leq t_1$:

$$E = 0 \text{ και } I = 0$$

Για $t_2 \leq t \leq t_3$:

$$E = 0 \text{ και } I = 0$$

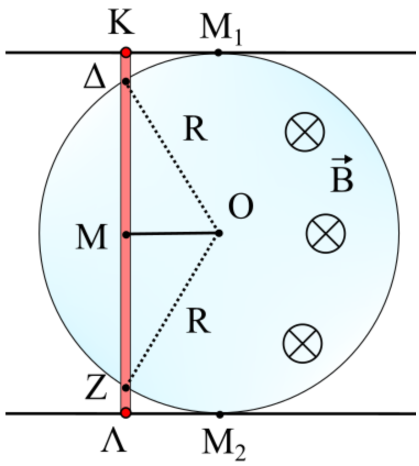
ΗΕΔ από επαγωγή εμφανίζεται στον κινούμενο αγωγό μόνον όταν τμήμα του βρίσκεται εντός του μαγνητικού πεδίου.

Δηλαδή, μόνον όταν $t_1 < t < t_2$.

Για το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα θα έχουμε ότι

$$E = B\upsilon\ell,$$

όπου ℓ το μήκος του τμήματος του αγωγού ΚΛ που βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο.



Στο παραπάνω σχήμα, φαίνεται η θέση του αγωγού ΚΛ μία χρονική στιγμή t, όπου $t_1 < t < t_2$, όπου μόνο το τμήμα του ΔΖ βρίσκεται εντός του πεδίου. Επειδή το τρίγωνο ΔΟΖ είναι ισοσκελές και η ΟΜ είναι διάμεσος, συμπεραίνουμε ότι είναι και μεσοκάθετος. Άρα, τα τρίγωνα ΔΜΟ και ΖΜΟ είναι ορθογώνια. Με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο ΔΜΟ έχουμε:

$$(\Delta M)^2 = (O\Delta)^2 - (OM)^2 \Rightarrow \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = R^2 - [R - \upsilon(t - t_1)]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = R^2 - R^2 + 2R\upsilon(t - t_1) - \upsilon^2(t - t_1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell = 2\sqrt{2R\upsilon(t - t_1) - \upsilon^2(t - t_1)^2}$$

Οπότε, για $t_1 < t < t_2$ είναι:

$$E = 2B\upsilon\sqrt{2R\upsilon(t - t_1) - \upsilon^2(t - t_1)^2} \Rightarrow E = 2\sqrt{2(t-2) - (t-2)^2} \quad (S.I.)$$

Δηλαδή

$$\boxed{E(t) = \begin{cases} 0, & 0s \le t \le 2s \\ 2\sqrt{2(t-2) - (t-2)^2}, & 2s < t < 4s \\ 0, & 4s \le t \le 6s \end{cases} \quad (S.I.)}$$

Οι αντιστάτες αντίστασης R_1 και R_2 είναι παράλληλα συνδεδεμένοι μεταξύ τους. Άρα

$$\frac{1}{R_{o\lambda}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{o\lambda} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{o\lambda} = \frac{4 \cdot 4}{4 + 4}\Omega \Rightarrow R_{o\lambda} = 2\Omega$$

Επομένως, με εφαρμογή του νόμου Ohm και σύμφωνα με τα παραπάνω, θα είναι:

$$\boxed{I(t)=\frac{E(t)}{R_{o\lambda}}=\begin{cases}0, & 0s\le t\le 2s\\ \sqrt{2(t-2)-(t-2)^2}, & 2s<t<4s\\ 0, & 4s\le t\le 6s\end{cases}\quad (S.I.)}$$

Γ. Επειδή ο αγωγός κινείται με σταθερή ταχύτητα, θα πρέπει κάθε χρονική στιγμή η συνισταμένη δύναμη που του ασκείται να είναι μηδενική. Εξωτερική δύναμη στον αγωγό θα πρέπει να ασκείται μόνον όταν αυτός διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα και κάποιο τμήμα βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο, καθώς στην περίπτωση αυτή θα δέχεται δύναμη Laplace από το πεδίο.

Επομένως, η κατάλληλη εξωτερική δύναμη θα πρέπει να είναι διαρκώς αντίθετη από την δύναμη Laplace στον αγωγό. Για το μέτρο δηλαδή της εξωτερικής δύναμης θα ισχύει ότι

$$F_{\varepsilon\xi}=F_L=BI\ell$$

Άρα, το μέτρο της θα μεγιστοποιηθεί όταν η δύναμη Laplace πάρει τη μέγιστή της τιμή. Αυτό συμβαίνει όταν μεγιστοποιείται τόσο η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό ΚΛ, όσο και το μήκος ℓ του τμήματός του που βρίσκεται μέσα στο ΟΜΠ.

Τα γεγονότα αυτά συμβαίνουν ταυτόχρονα και συγκεκριμένα τη χρονική στιγμή $t=3s$ όπου το μέσο Μ του ΚΛ ταυτίζεται με το κέντρο Ο του κύκλου και ο αγωγός ΚΛ βρίσκεται τότε εξ ολοκλήρου εντός του πεδίου. Οπότε:

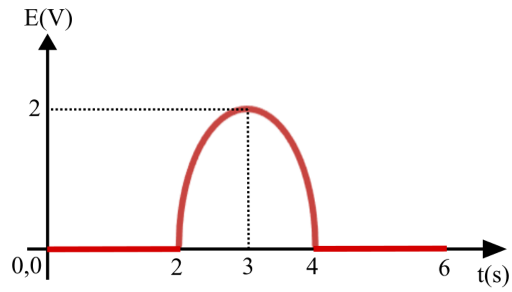
$$F_{\varepsilon\xi,max}=F_{L,max}=BI_{max}\ell_{max}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F_{\varepsilon\xi,max}=1\cdot\sqrt{2\cdot(3-2)-(3-2)^2}\cdot 2N\Longrightarrow \boxed{F_{\varepsilon\xi,max}=2N}$$

Δ. Η μέγιστη ηλεκτρική ισχύς που καταναλώνεται από την ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος επιτυγχάνεται τη χρονική στιγμή $t=3s$ όπου η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος μεγιστοποιείται. Είναι

$$P_{o\lambda,max}=I^2_{max}R_{o\lambda}\Longrightarrow P_{o\lambda,max}=\sqrt{2\cdot(3-2)-(3-2)^2}^{\,2}\cdot 2W\Longrightarrow \boxed{P_{o\lambda,max}=2W}$$

Σχόλιο: Η γραφική παράσταση της $E=E(t)$, για $0\le t\le 6s$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com