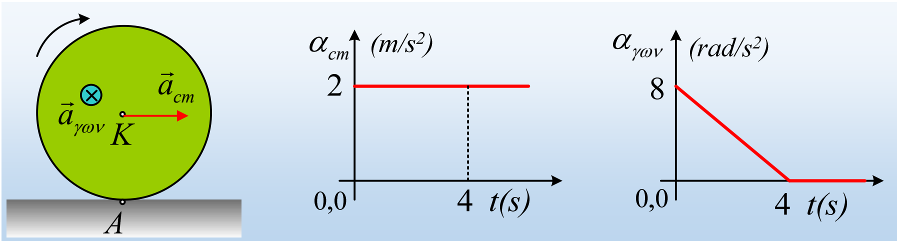
Μια διαφορετική κίνηση ενός τροχού

Ένας τροχός ακτίνας R=0,6m ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Τη στιγμή $t_o=0$ τίθεται σε κίνηση αποκτώντας επιτάχυνση κέντρου μάζας K $α_{cm}$, η οποία μεταβάλλεται όπως στο πρώτο από τα παρακάτω διαγράμματα και γωνιακή επιτάχυνση, όπως στο δεύτερο διάγραμμα και με κατευθύνσεις όπως στο σχήμα.



Να βρεθούν:

i) Η ταχύτητα του κέντρου Κ του τροχού, καθώς και η γωνιακή ταχύτητα του τροχού την στιγμή t_1=2s.

ii) Η ταχύτητα και η οριζόντια επιτάχυνση του σημείου επαφής του τροχού με το επίπεδο, σημείου Α, τις χρονικές στιγμές:

α) t_1= 2s,

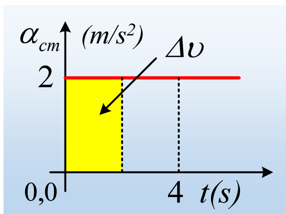
β) t_3= 6s.

Απάντηση:

Θεωρούμε την κίνηση του τροχού σύνθετη. Μια μεταφορική, ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση $α_{cm}=2m/s^2$ και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο, ο οποίος περνά από το κέντρο του Κ, με μεταβαλλόμενη γωνιακή επιτάχυνση, σύμφωνα με το 2º διάγραμμα.

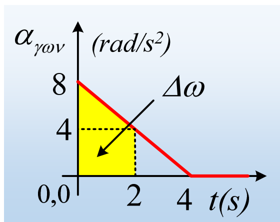
i) Για την μεταφορική κίνηση:

$$υ_{cm} = a_{cm}t \xrightarrow{t=2s} υ_{cm,1} = 2\cdot 2m/s = 4m/s$$



Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούσαμε να φτάσουμε υπολογίζοντας το εμβαδόν του κίτρινου ορθογωνίου, στο διάγραμμα $α_{cm}$-t, το οποίο είναι αριθμητικά ίσο με την αντίστοιχη μεταβολή της ταχύτητας $Δυ=υ_1-υ_0=υ_1$.

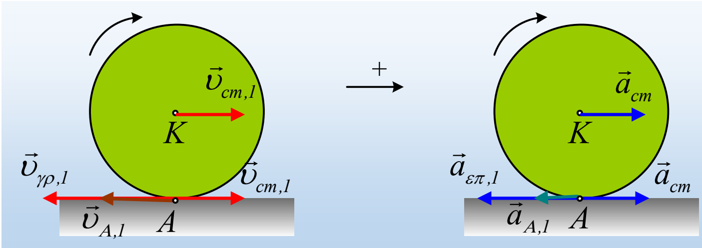
Εκμεταλλευόμενοι το αντίστοιχο διάγραμμα $α_{γων}$-t, μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίστοιχη μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας και τελικά την γωνιακή ταχύτητα $ω_1$, από το εμβαδόν του κίτρινου τραπεζίου:



$$Δω = ω_1 - ω_0 = ω_1 = \frac{8+4}{2}2\,{rad}/{s} = 12\,{rad}/{s}$$

ii) Στα παρακάτω σχήματα, έχουν σημειωθεί οι ταχύτητες του σημείου Α, όπου $υ_{cm}$ η ταχύτητα λόγω της μεταφορικής κίνησης και $υ_{γρ}$ η ταχύτητα εξαιτίας της στροφικής κίνησης. Αλλά και οι αντίστοιχες επιταχύνσεις $α_{cm}$ και $α_{επ}$, όπου $α_{επ}$ η επιτρόχια επιτάχυνση. Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι κατακόρυφη και δεν μας απασχολεί εδώ.

α) Για την στιγμή t_1=2s, η $υ_{cm}$ έχει υπολογιστεί παραπάνω, οπότε για την ταχύτητα του σημείου Α, θα έχουμε:



$$\vec{\upsilon}_{A,1} = \vec{\upsilon}_{cm,1} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho,1} \rightarrow$$

$$\upsilon_{A,1} = \upsilon_{cm,1} - \omega_1 R = 4\,{}^{m}\!/_{s} - 12 \cdot 0,6\,{}^{m}\!/_{s} = -3,2\,{}^{m}\!/_{s}$$

Ενώ για την οριζόντια επιτάχυνση, με βάση το 2ο σχήμα:

$$\vec{\alpha}_{A,1x} = \vec{a}_{cm,1} + \vec{a}_{\varepsilon\pi,1} \rightarrow$$

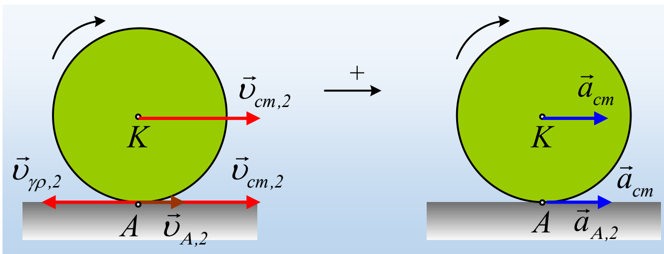
$$\alpha_{A,1} = \alpha_{cm} - \alpha_{\gamma\omega\nu} R = 2\,{}^{m}\!/_{s^2} - 4 \cdot 0,6\,{}^{m}\!/_{s} = -0,4\,{}^{m}\!/_{s^2}$$

β) Τη στιγμή t=4s $\alpha_{\gamma\omega\nu}=0$ και ο τροχός σταματά να επιταχύνεται στροφικά, οπότε η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή από κει και πέρα με μέτρο, ίσο με το εμβαδόν του χωρίου:

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\beta\upsilon = \frac{1}{2} 4 \cdot 8\,{}^{rad}\!/_{s} = 16\,{}^{rad}\!/_{s}$$

Ενώ η ταχύτητα του cm έχει τιμή:

$$\upsilon_{cm} = a_{cm} t \xrightarrow{t=6s} \upsilon_{cm,2} = 2 \cdot 6\,{}^{m}\!/_{s} = 12\,{}^{m}\!/_{s}$$



Έτσι, με βάση και το παραπάνω σχήμα, θα έχουμε:

$$\vec{\upsilon}_{A,2} = \vec{\upsilon}_{cm,2} + \vec{\upsilon}_{\gamma\rho,2} \rightarrow$$

$$\upsilon_{A,2} = \upsilon_{cm,2} - \omega_2 R = 12\,{}^{m}\!/_{s} - 16 \cdot 0,6\,{}^{m}\!/_{s} = 2,4\,{}^{m}\!/_{s}$$

Ενώ η οριζόντια επιτάχυνση του Α, είναι ίση με την επιτάχυνση λόγω μεταφορικής κίνησης, δηλαδή:

$$\alpha_{A,2} = \alpha_{cm} = 2\,{}^{m}\!/_{s^2}$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης