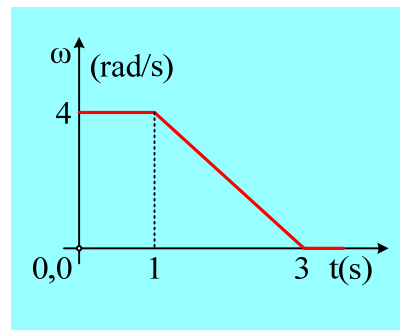
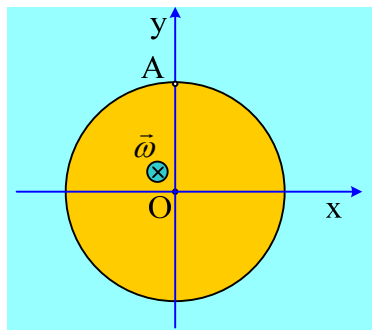


## Μια κίνηση δίσκου που δεν είναι κύλιση

Ο οριζόντιος δίσκος του σχήματος, κέντρου Κ και ακτίνας  $R=0,5\text{m}$  στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ , με φορά ίδια με την φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο, ενώ το κέντρο του Κ, παραμένει ακίνητο στην αρχή Ο ενός συστήματος οριζοντίων αξόνων  $x, y$ , όπως στο σχήμα (σε κάτοψη).



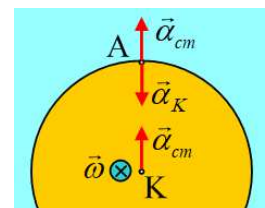
Τη στιγμή  $t_0=0$ , με την επίδραση κατάλληλης δύναμης (και ροπής...) προσδίδουμε μια σταθερή επιτάχυνση στο κέντρο Κ του δίσκου, ενώ μεταβάλλουμε την γωνιακή του ταχύτητα, σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα. Αν η επιτάχυνση του σημείου Α του δίσκου (το σημείο το δίσκου με τεταγμένη  $y_A=y_K+R$ ) την στιγμή  $t_1=0,25\text{s}$  είναι μηδενική, να βρεθούν:

- i) Η επιτάχυνση  $a_{cm}$  του κέντρου Κ του δίσκου.
- ii) Η ταχύτητα του σημείου Α του δίσκου, τη στιγμή  $t_1$ . Ποια η αντίστοιχη ταχύτητα του σημείου Β, με τεταγμένη  $x_B=R$ , την ίδια στιγμή;
- iii) Οι συνιστώσες της επιτάχυνσης του σημείου Β τη χρονική στιγμή  $t_2=2\text{s}$ , στους άξονες  $x$  και  $y$ .
- iv) Πόσες συνολικά περιστροφές θα εκτελέσει ο δίσκος και ποια η θέση του τη στιγμή  $t_3=3\text{s}$ ;

### Απάντηση:

- i) Στο χρονικό διάστημα  $0 \leq t < 1\text{s}$  η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου παραμένει σταθερή, συνεπώς δεν έχει γωνιακή επιτάχυνση και κάθε σημείο του, όπως το σημείο Α, εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, έχοντας μόνο κεντρομόλο επιτάχυνση, όπως στο σχήμα, με μέτρο:

$$a_K = \omega^2 R = 4^2 \cdot 0,5 \text{ m/s}^2 = 8 \text{ m/s}^2$$



Αλλά θεωρώντας ότι ο δίσκος εκτελεί σύνθετη κίνηση, μια μεταφορική με επιτάχυνση κέντρου μάζας  $a_{cm}$  και μια στροφική γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το κέντρο Κ, το σημείο Α, εκτός της παραπάνω επιτάχυνσης, έχει και την  $a_{cm}$  και αφού  $\alpha=0$ ,  $a_{cm}=8\text{m/s}^2$  με αντίθετη φορά, πάνω στον άξονα  $y$ , προς την θετική κατεύθυνση, όπως στο σχήμα.

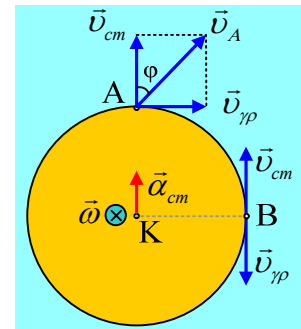
- ii) Με βάση τα παραπάνω, το σημείο Α έχει ταχύτητα  $v_{\gamma\gamma}=\omega R=4 \cdot 0,5\text{m/s}=2\text{m/s}$ , λόγω της κυκλικής κίνησης που εκτελεί, ενώ λόγω της μεταφορικής κίνησης, ταχύτητα ίση με την  $v_{cm}=a_{cm} \cdot t=8 \cdot 0,25\text{m/s}=2\text{m/s}$ , όπως στο παρακάτω σχήμα.

Έτσι για το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Α έχουμε:

$$v_A = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma\rho}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} \text{ m/s} = 2\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Ενώ η κατεύθυνσή της σχηματίζει γωνία  $\varphi=45^\circ$  με την διεύθυνση του άξονα y, αφού το παραλληλόγραμμο είναι ... τελικά τετράγωνο!

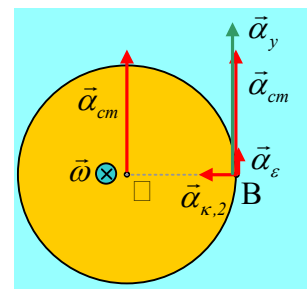
Με την ίδια λογική, το σημείο Β έχει τις ταχύτητες του διπλανού σχήματος, με τα ίδια μέτρα (2m/s), συνεπώς η ταχύτητά του είναι μηδενική.



iii) Στο χρονικό διάστημα 1s-3s ο δίσκος επιβραδύνεται στροφικά, έχοντας σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, αφού η κλίση στο διάγραμμα  $\omega-t$  είναι σταθερή:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0-4}{3-1} \text{ rad/s}^2 = -2 \text{ rad/s}^2.$$

Αλλά τότε το σημείο Β έχει τη στιγμή  $t_2$ , δύο συνιστώσες επιτάχυνσης λόγω της στροφικής κίνησης του δίσκου, την κεντρομόλο και την επιτρόχια (υπεύθυνη για την μείωση του μέτρου της γραμμικής του ταχύτητας) και μια επιτάχυνση λόγω μεταφορικής κίνησης, την  $a_{cm}=8\text{m/s}^2$  όπως στο σχήμα. Να επισημανθεί ότι η επιτρόχια επιτάχυνση, έχει αντίθετη κατεύθυνση από την γραμμική ταχύτητα του σημείου Β.



Για τα μέτρα τους έχουμε (έχουμε  $\omega_2=2\text{rad/s}$ , γιατί;):

$$a_{\kappa,2} = \omega_2^2 R = 2^2 \cdot 0,5 \text{ m/s}^2 = 2 \text{ m/s}^2 \text{ και}$$

$$|\alpha_\varepsilon| = |\alpha_{\gamma\omega\nu}| R = 2 \cdot 0,5 \text{ m/s}^2 = 1 \text{ m/s}^2$$

Οπότε η επιτάχυνση του σημείου Β, έχει συνιστώσες πάνω στους άξονες:

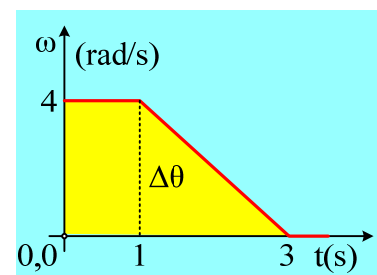
Στον άξονα x, με φορά προς τα αριστερά, μέτρου  $|\alpha_x|=2\text{m/s}^2$  ή αν προτιμάτε  $\alpha_x=-2\text{m/s}^2$ .

Στον άξονα y, με φορά προς τα πάνω μέτρου  $|\alpha_y|=9\text{m/s}^2$  ή  $\alpha_y=+9\text{m/s}^2$ .

iv) Στο διάγραμμα  $\omega=f(t)$  το εμβαδόν του αντίστοιχου χωρίου (το εμβαδόν του κίτρινου τραπεζιού) είναι αριθμητικά ίσο με την γωνία στροφής του δίσκου.

$$\Delta\theta = \frac{B + \beta}{2} \nu = \frac{3+1}{2} 4\text{rad} = 8\text{rad} \rightarrow$$

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{8}{2\pi} \text{ στρ} = \frac{4}{\pi} \text{ στροφές}$$



Η θέση του δίσκου καθορίζεται αν καθορίσουμε την θέση του κέντρου του Κ. Για την μεταφορική κίνηση όμως του δίσκου βρήκαμε ότι κινείται με σταθερή επιτάχυνση  $a_{cm}$  κατά μήκος του άξονα y, προς την θετική κατεύθυνση, έτσι την στιγμή  $t_3$  το κέντρο του βρίσκεται στην θέση:

$$y_3 = \Delta y = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = \frac{1}{2} 8 \cdot 3^2 \text{ m} = 36 \text{ m}$$

Επιμέλεια:

*Διονύσης Μάργαρης*