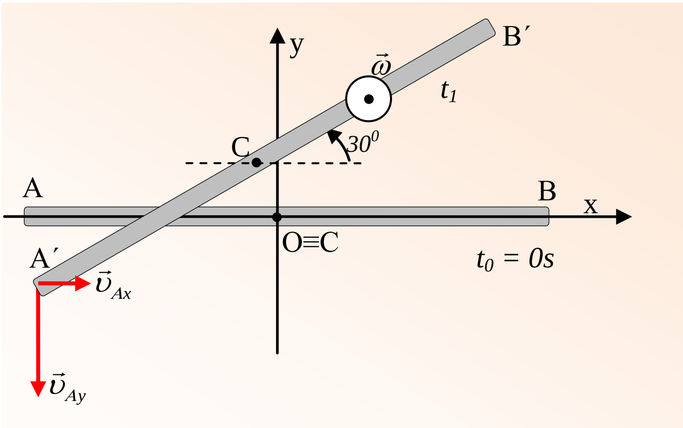
Στιγμιότυπο στην κίνηση μιας ράβδου



Μια ομογενής λεπτή ράβδος ΑΒ με μήκος $L = 2m$, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$, έχει τη διεύθυνση του άξονα Ox, ενός συστήματος xOy ορθογωνίων αξόνων, με το μέσον - και κέντρο μάζας - C, να συμπίπτει με την αρχή O των αξόνων. Κάποια χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται για πρώτη φορά στη θέση του διπλανού σχήματος, έχοντας στραφεί αντιωρολογιακά κατά $\Delta\theta = 30^0$.

Οι συνιστώσες της ταχύτητας του άκρου Α, έχουν αλγεβρικές τιμές $\upsilon_{Ax} = + 2m/s$ και $\upsilon_{Ay} = -6m/s$ για κάθε άξονα, ενώ η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου έχει σταθερό μέτρο $\omega = 12rad/s$, με αντιωρολογιακή φορά.

Θεωρείστε την κίνηση της ράβδου σύνθετη: Ομαλή Στροφική, γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο xOy που διέρχεται από το κέντρο μάζας C της ράβδου και ευθύγραμμη ομαλή μεταφορική με την ταχύτητα του κέντρου μάζας C. Για τη χρονική στιγμή t_1:

α) Υπολογίστε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_C$ του κέντρου μάζας.

β) Υπολογίστε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_B$ του άκρου Β.

γ) Υπολογίστε τη χρονική στιγμή t_1 και βρείτε τη θέση του σημείου Α ως προς το δοσμένο σύστημα αξόνων.

Απάντηση

Με βάση τον άξονα περιστροφής, που διέρχεται από το C, το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του άκρου Α είναι:

$$\upsilon_{\gamma\rho,A} = \omega\frac{L}{2} = 12m/s$$

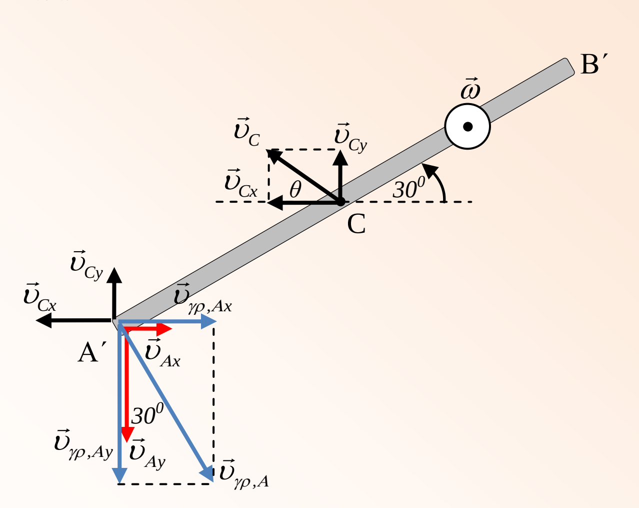
με διεύθυνση κάθετη στη ράβδο. Αναλύουμε τη γραμμική ταχύτητα του άκρου Α σε δυο συνιστώσες με αλγεβρικές τιμές:

$$\upsilon_{\gamma\rho,Ax} = +\upsilon_{\gamma\rho,A}\cdot\eta\mu30 = 6m/s$$

$$\upsilon_{\gamma\rho,Ay} = -\upsilon_{\gamma\rho,A}\cdot\sigma\upsilon\nu30 = -6\sqrt{3} \approx -10,4m/s$$

όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

Σχήμα 1



Η ταχύτητα του σημείου Α σε κάθε άξονα, θα προκύπτει από τη σύνθεση της αντίστοιχης συνιστώσας ταχύτητας του κέντρου μάζας C και γραμμικής ταχύτητας του σημείου Α. Εργαζόμενοι με αλγεβρικές τιμές:

$$\upsilon_{Ax} = \upsilon_{\gamma\rho,Ax} + \upsilon_{Cx} \Leftrightarrow \upsilon_{Cx} = \upsilon_{Ax} - \upsilon_{\gamma\rho,Ax} \Leftrightarrow$$

$$\upsilon_{Cx} = +2 - (+6) \Leftrightarrow \upsilon_{Cx} = -4m/s$$

$$\upsilon_{Ay} = \upsilon_{\gamma\rho,Ay} + \upsilon_{Cy} \Leftrightarrow \upsilon_{Cy} = \upsilon_{Ay} - \upsilon_{\gamma\rho,Ay} \Leftrightarrow$$

$$\upsilon_{Cy} = -6 - (-10,4) \Leftrightarrow \upsilon_{Cy} = +4,4m/s$$

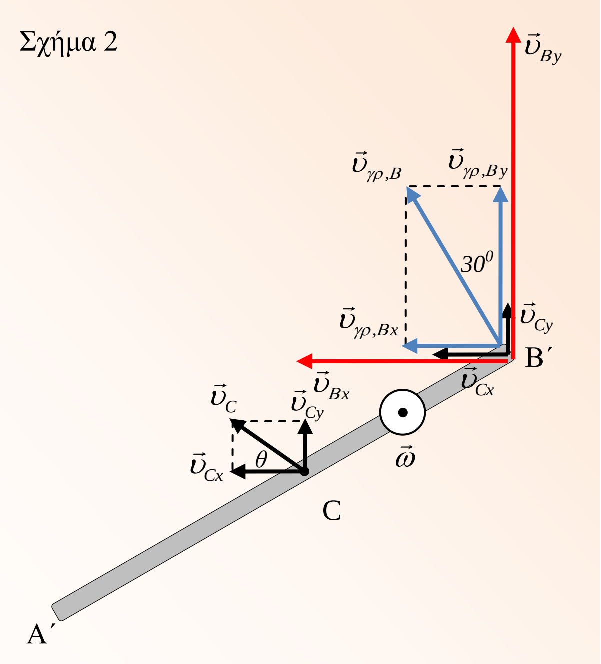
Άρα η ταχύτητα του κέντρου μάζας C θα έχει μέτρο

$$|\upsilon_C| = \sqrt{\upsilon_{Cx}^{\ 2} + \upsilon_{Cy}^{\ 2}} = \sqrt{(-4)^2 + 4{,}4^2} = 5{,}9m/s$$

και διεύθυνση

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{|\upsilon_{Cy}|}{|\upsilon_{Cx}|} = 1{,}1 \Leftrightarrow \theta \approx 48^0$$

β) Το σημείο Β θα έχει την ίδια χρονική στιγμή: Γραμμική ταχύτητα αντίθετη εκείνης του Α, που σημαίνει συνιστώσες ίδιου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς και μεταφορική ταχύτητα ίδια με εκείνη του κέντρου μάζας.



Άρα όπως φαίνεται και στο σχήμα 2

$$\upsilon_{Bx} = \upsilon_{\gamma\rho,Bx} + \upsilon_{Cx} \Leftrightarrow$$
$$\upsilon_{Bx} = -6 + (-4) \Leftrightarrow$$
$$\upsilon_{Bx} = -10m/s$$
$$\upsilon_{By} = \upsilon_{\gamma\rho,By} + \upsilon_{Cy} \Leftrightarrow$$
$$\upsilon_{By} = +10{,}4 + 4{,}4 \Leftrightarrow$$
$$\upsilon_{By} = +14{,}8m/s$$

Η ταχύτητα του Β θα έχει μέτρο

$$|\upsilon_B| = \sqrt{\upsilon_{Bx}^{\ 2} + \upsilon_{By}^{\ 2}} = \sqrt{(-10)^2 + 14{,}4^2} = 17{,}5m/s$$

και διεύθυνση

$$\varepsilon\varphi\theta' = \frac{|\upsilon_{By}|}{|\upsilon_{Bx}|} = 1{,}44 \Leftrightarrow \theta \approx 55^0$$

Στο σχήμα 2, ας σχεδιάσει την $\vec{\upsilon}_B$ ο αναγνώστης…

γ) Η χρονική στιγμή t_1 είναι

$$t_1 = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{\pi/6}{12} = \frac{\pi}{72}s \approx 0{,}04s$$

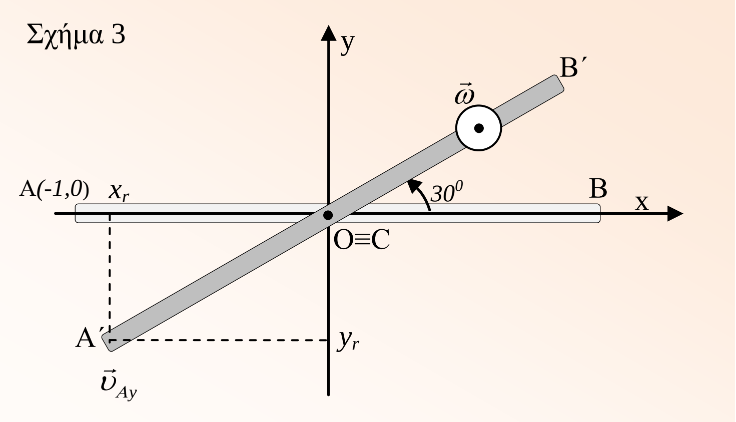
Θα χρησιμοποιήσουμε την **αρχή της επαλληλίας**.

- Η ράβδος στρέφεται κατά $\pi/6$ αριστερόστροφα (σχήμα 3). Οι συντεταγμένες του άκρου της ράβδου είναι:
  αρχικά: Α$(-1m, 0m)$ και τελικά Α΄(x_r, y_r). Όπως φαίνεται στο σχήμα, $x_r < 0$, $y_r < 0$, άρα:

  $$x_r = -\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu 30 = -0{,}87m$$

  $$y_r = -\frac{L}{2}\eta\mu 30 = -0{,}5m$$

  *Μπορούσαμε να θεωρήσουμε και αρχική γωνία $\theta_0 = \pi\ rad$.



- Η ράβδος και το σημείο Α, μεταφέρεται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας, για χρονικό διάστημα t_1, σε κάθε άξονα, κατά:

$x_C = x_0 + \upsilon_{Cx} t_1 =$

$0 + (-4) \cdot \dfrac{\pi}{72} = -0,17m$

$y_C = y_0 + \upsilon_{Cy} t_1 =$

$0 + 4,4 \cdot \dfrac{\pi}{72} = 0,19m$

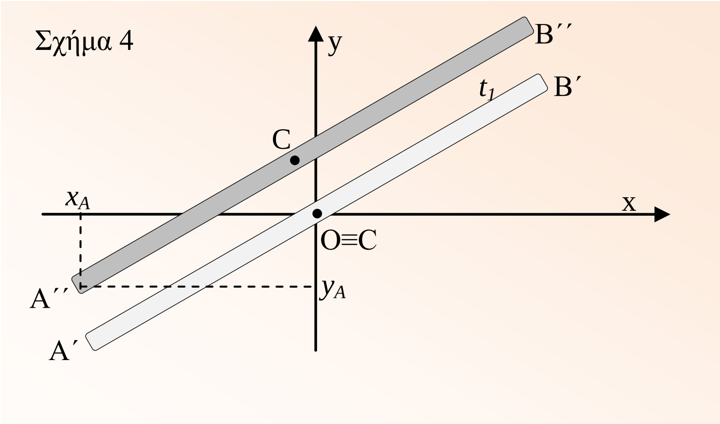
Η τελική θέση του Α (σχήμα 4) θα είναι

$x_A = x_r + x_C =$

$-0,87 - 0,17 = -1,04m$

$y_A = y_r + y_C =$

$-0,5 + 0,19 = -0,31m$



Μπορείτε να δείτε τα παραπάνω σε: [Προσομοίωση Interactive Physics]

Σχόλιο

Αν θέλουμε γενικούς τύπους για τη θέση ενός σημείου στερεού, που εκτελεί σύνθετη κίνηση ως προς ορθογώνιο σύστημα αξόνων, μπορούμε με βάση το ερώτημα (γ) να έχουμε:

$$x = x_0 + \upsilon_x t + r \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \theta_0)$$
$$y = y_0 + \upsilon_y t + r \cdot \eta\mu(\omega t + \theta_0)$$

Σε αυτές τις εξισώσεις, x_0 και y_0 είναι οι αρχικές θέσεις του σημείου A, υ_x και υ_y είναι οι συνιστώσες της σταθερής ταχύτητας μεταφορικής κίνησης(αλγεβρικές τιμές), r είναι η ακτίνα του κύκλου(στην άσκησή μας ήταν $r = L/2$), ω είναι το μέτρο της σταθερής γωνιακής ταχύτητας και θ_0 είναι η αρχική γωνία της ομαλής κυκλικής κίνησης.

Ανδρέας Ριζόπουλος