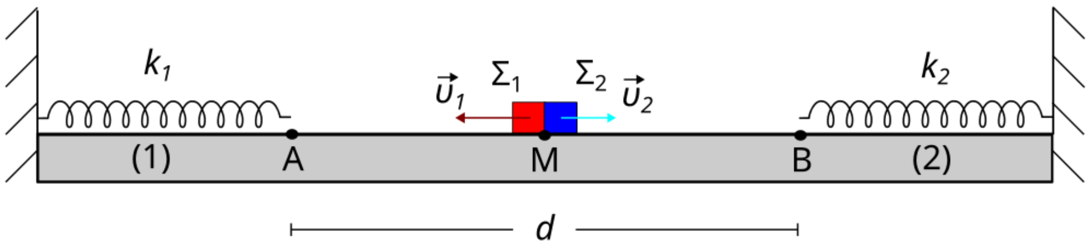
Σύστημα σωμάτων μεταξύ δύο ελατηρίων

Πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο έχουμε τοποθετήσει δύο οριζόντια ιδανικά ελατήρια με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουν κοινό άξονα. Το ελατήριο (1) έχει σταθερά $k_1 = 36\pi^2 N/m$, το ένα του άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο και το άλλο του ελεύθερο άκρο βρίσκεται στο σημείο Α του επιπέδου όταν δεν είναι παραμορφωμένο. Το ελατήριο (2) έχει σταθερά $k_2 = 18\pi^2 N/m$, το ένα του άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο και το άλλο του ελεύθερο άκρο βρίσκεται στο σημείο Β του επιπέδου όταν δεν είναι παραμορφωμένο. Ισχύει ότι $(AB) = d = 10m$. Στο μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ βρίσκονται (σε επαφή) δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 αμελητέων διαστάσεων, όπως στο σχήμα.



Το σώμα Σ_1 έχει μάζα $m_1 = 1kg$, ενώ η μάζα του σώματος Σ_2 ισούται με $m_2 = 2kg$. Κάποια στιγμή που θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των χρόνων $t_0 = 0$, δίνουμε ακαριαία οριζόντια ταχύτητα στο σώμα Σ_1 μέτρου $\upsilon_1 = 6m/s$ και με φορά προς το σημείο Α, ενώ ταυτόχρονα προσδίδουμε οριζόντια ταχύτητα στο σώμα Σ_2 μέτρου $\upsilon_2 = 3m/s$ και με φορά προς το σημείο Β.

Α. Να υπολογίσετε την ορμή και την κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων $\Sigma_1 - \Sigma_2$.

Β. Να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπείρωση των ελατηρίων (1) και (2) κατά την εξέλιξη του φαινομένου.

Γ. Να προσδιορίσετε το σημείο σύγκρουσης των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2, καθώς και τη χρονική στιγμή της σύγκρουσης.

Εάν η κρούση των δύο σωμάτων είναι πλαστική,

Δ. να υπολογίσετε το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης.

Απάντηση

Α. Η ορμή ενός συστήματος σωμάτων, ισούται με το (διανυσματικό) άθροισμα της ορμής των σωμάτων του συστήματος. Επομένως

$$\vec{p}_{o\lambda} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (1)$$

Επειδή τα παραπάνω διανύσματα στην περίπτωσή μας είναι συγγραμμικά, η σχέση (1) μπορεί να γραφεί και αλγεβρικά ως

$$p_{o\lambda} = p_1 + p_2$$

και θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά (με βάση το σχήμα), έχουμε

$$p_{o\lambda} = -m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2 = -1kg \cdot 6m/s + 2kg \cdot 3m/s \Rightarrow \boxed{p_{o\lambda} = 0}$$

Ομοίως, η κινητική ενέργεια ενός συστήματος σωμάτων ισούται με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των σωμάτων του συστήματος. Επομένως

$$K_{o\lambda} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow K_{o\lambda} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6^2 J + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^2 J \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{o\lambda} = 18J + 9J \Rightarrow \boxed{K_{o\lambda} = 27J}$$

<u>*Σχόλιο*</u>*: Ένα σύστημα σωμάτων μπορεί να έχει κινητική ενέργεια χωρίς να έχει ορμή.*

Β. Το σώμα Σ_1 θα εκτελέσει αρχικά ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και θα φθάσει στο σημείο Α τη χρονική στιγμή

$$t_1 = \frac{\frac{d}{2}}{\upsilon_1} \Rightarrow t_1 = \frac{5}{6}s$$

Από εκείνη τη στιγμή και μετά, το Σ_1 θα συσπειρώνει το ελατήριο (1) και θα εκτελεί Α.Α.Τ. μέχρι τη στιγμή που θα αποχωριστεί από αυτό.

Η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου είναι αυτή που αντιστοιχεί στη μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, η οποία επιτυγχάνεται (λόγω της Α.Δ.Μ.Ε.) όταν το σώμα Σ_1 ακινητοποιηθεί στιγμιαία. Άρα

$$U_{\varepsilon\lambda,1,max} = K_1 \Rightarrow \frac{1}{2}k_1 \Delta\ell_{1,max}^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow \Delta\ell_{1,max} = \upsilon_1\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\ell_{1,max} = 6\sqrt{\frac{1}{36\pi^2}}m \Rightarrow \boxed{\Delta\ell_{1,max} = \frac{1}{\pi}m \cong 0{,}32m}$$

Η μέγιστη αυτή συσπείρωση είναι ίση και με το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το Σ_1 για όσο χρόνο είναι σε επαφή με το ελατήριο (1).

Ομοίως, το σώμα Σ_2 θα εκτελέσει αρχικά ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και θα φθάσει στο σημείο Β τη χρονική στιγμή

$$t_2 = \frac{\frac{d}{2}}{\upsilon_2} \Longrightarrow t_2 = \frac{5}{3}s$$

Από εκείνη τη στιγμή και μετά, το Σ_2 θα συσπειρώνει το ελατήριο (2) και θα εκτελεί Α.Α.Τ. μέχρι τη στιγμή που θα αποχωριστεί από αυτό.

Η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου είναι αυτή που αντιστοιχεί στη μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, η οποία επιτυγχάνεται (λόγω της Α.Δ.Μ.Ε.) όταν το σώμα Σ_2 ακινητοποιηθεί στιγμιαία. Άρα

$$U_{\varepsilon\lambda,2,max} = K_2 \Longrightarrow \frac{1}{2}k_2 \Delta\ell_{2,max}^2 = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \Longrightarrow \Delta\ell_{2,max} = \upsilon_2\sqrt{\frac{m_2}{k_2}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Delta\ell_{2,max} = 3\sqrt{\frac{2}{18\pi^2}}m \Longrightarrow \boxed{\Delta\ell_{2,max} = \frac{1}{\pi}m \cong 0{,}32m}$$

Η μέγιστη αυτή συσπείρωση είναι ίση και με το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το Σ_2 για όσο χρόνο είναι σε επαφή με το ελατήριο (2).

Γ. Το σώμα Σ_1 θα αποχωριστεί από το δεξί ελεύθερο άκρο του ελατηρίου (1), όταν αυτό αποκτήσει εκ νέου το φυσικό του μήκος. Επειδή η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (1) ταυτίζεται με τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ_1 (σημείο Α), συμπεραίνουμε ότι το σώμα αυτό εκτελεί Α.Α.Τ. με μέγιστη ταχύτητα την υ_1 και για χρονικό διάστημα

$$\Delta t_1 = \frac{T_1}{2}$$

όπου T_1 η περίοδος της ταλάντωσής του. Άρα

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{36\pi^2}}s \Longrightarrow T_1 = \frac{2\pi}{6\pi}s \Longrightarrow T_1 = \frac{1}{3}s$$

Επομένως, το ελατήριο (1) είναι συσπειρωμένο για χρονικό διάστημα

$$\Delta t_1 = \frac{1}{6}s$$

με αποτέλεσμα το σώμα Σ_1 να αποχωρίζεται από το ελατήριο (1) στο σημείο Α, τη χρονική στιγμή

$$t_1' = t_1 + \Delta t_1 = \frac{5}{6}s + \frac{1}{6}s = 1s$$

και στη συνέχεια εκτελεί Ε.Ο.Κ. με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 6m/s$ και με φορά προς τα δεξιά.

Ομοίως, το σώμα $Σ_2$ θα αποχωριστεί από το αριστερό ελεύθερο άκρο του ελατηρίου (2), όταν αυτό αποκτήσει εκ νέου το φυσικό του μήκος. Επειδή η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (2) ταυτίζεται με τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα $Σ_2$ (σημείο Β), συμπεραίνουμε ότι το σώμα αυτό εκτελεί Α.Α.Τ. με μέγιστη ταχύτητα την υ_2 και για χρονικό διάστημα

$$\Delta t_2 = \frac{T_2}{2}$$

όπου T_2 η περίοδος της ταλάντωσής του. Άρα

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{18\pi^2}}s \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{3\pi}s \Rightarrow T_2 = \frac{2}{3}s$$

Επομένως, το ελατήριο (2) είναι συσπειρωμένο για χρονικό διάστημα

$$\Delta t_2 = \frac{1}{3}s$$

με αποτέλεσμα το σώμα $Σ_2$ να αποχωρίζεται από το ελατήριο (2) στο σημείο Β, τη χρονική στιγμή

$$t_2' = t_2 + \Delta t_2 = \frac{5}{3}s + \frac{1}{3}s = 2s$$

και στη συνέχεια εκτελεί Ε.Ο.Κ. με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2 = 3m/s$ και με φορά προς τα αριστερά.

Παρατηρούμε ότι το σώμα $Σ_2$ αποχωρίζεται το δικό του ελατήριο μετά από χρονικό διάστημα

$$\Delta t = t_2' - t_1' = 2s - 1s \Rightarrow \Delta t = 1s$$

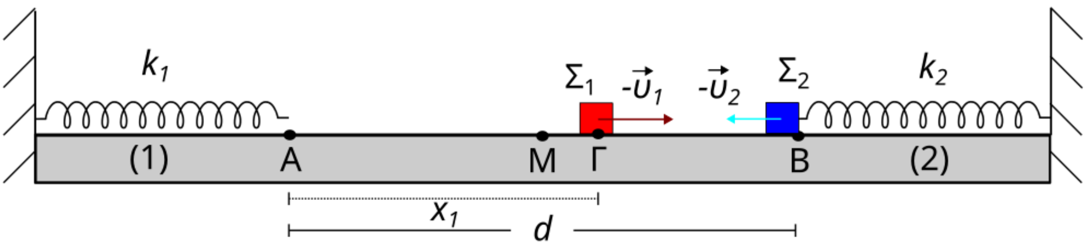
από τη στιγμή που το $Σ_1$ αποχωρίστηκε από το δικό του ελατήριο.

Στο χρονικό αυτό διάστημα, το σώμα $Σ_1$ έχει βρεθεί σε ένα σημείο Γ, το οποίο απέχει απόσταση

$$x_1 = \upsilon_1 \Delta t = 6 \cdot 1m \Rightarrow x_1 = 6m$$

δεξιά του Α.

Τα παραπάνω, και για τη χρονική στιγμή $t_2' = 2s$ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Έστω Κ το σημείο της σύγκρουσης των δύο σωμάτων, S_1 το διάστημα που θα διανύσει το σώμα $Σ_1$ και S_2 το αντίστοιχο διάστημα που θα διανύσει το σώμα $Σ_2$ από τη στιγμή

t_2' και έως τη στιγμή της κρούσης. Εάν Δt_κ το χρονικό διάστημα από τη στιγμή t_2' και μέχρι τη στιγμή της κρούσης (στο οποίο τα σώματα εκτελούν Ε.Ο.Κ.) τότε με τη βοήθεια και του παραπάνω σχήματος, προκύπτει ότι:

$$S_1 + S_2 = (B\Gamma) \Longrightarrow \upsilon_1 \Delta t_\kappa + \upsilon_2 \Delta t_\kappa = d - x_1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Delta t_\kappa = \frac{d - x_1}{\upsilon_1 + \upsilon_2} = \frac{10 - 6}{6 + 3} s \Longrightarrow \Delta t_\kappa = \frac{4}{9} s$$

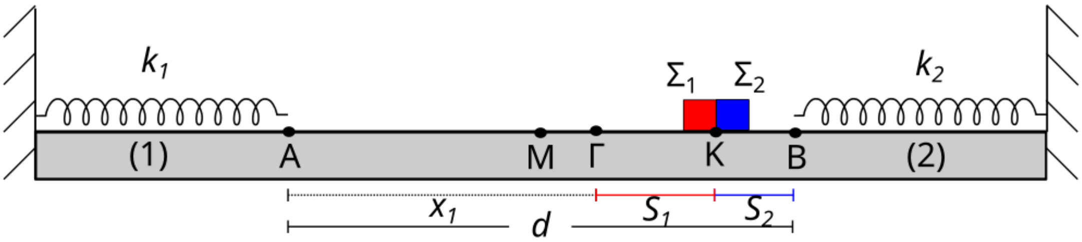
Επομένως, τα δύο σώματα θα συγκρουστούν τη χρονική στιγμή

$$t_\kappa = t_2' + \Delta t_\kappa = 2s + \frac{4}{9} s \Longrightarrow t_\kappa = \frac{22}{9} s$$

και σε ένα σημείο Κ μεταξύ των Α και Β, το οποίο θα απέχει απόσταση

$$(BK) = S_2 = \upsilon_2 \Delta t_\kappa \Longrightarrow S_2 = 3 \cdot \frac{4}{9} m = \frac{4}{3} m$$

από το Β και είναι αριστερά αυτού, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Δ. Τη στιγμή t_κ (στιγμή της κρούσης) τα δύο σώματα κινούνται αντίρροπα. Με εφαρμογή της Α.Δ.Ο. κατά την πλαστική τους κρούση, προκύπτει για την ταχύτητα του συσσωματώματος ότι:

$$m_1 \upsilon_1 - m_2 \upsilon_2 = (m_1 + m_2) V \Longrightarrow V = \frac{1 \cdot 6 - 2 \cdot 3}{3} m/s \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow V = 0$$

Δηλαδή, το συσσωμάτωμα θα παραμείνει ακίνητο μετά την κρούση.

Έτσι, το ζητούμενο ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι ίσο με:

$$\pi\% = \frac{\Delta K_{o\lambda}}{K_{o\lambda,\alpha\rho\chi}} \cdot 100\% = \frac{0 - \left(\frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2\right)}{\frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2} \cdot 100\% \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\pi\% = -100\%}$$

Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com