Ταλάντωση - ελαστική κρούση - οριζόντια βολή

Σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1 = 3kg$ ισορροπεί πάνω σε δίσκο Δ μάζας $M = 1kg$. Ο δίσκος είναι στερεωμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400$ N/m ενώ το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο στο σημείο Ε του οριζόντιου επιπέδου. Στην ίδια κατακόρυφο με τον άξονα του ελατηρίου ισορροπεί ακίνητο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2 που είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου, αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους ℓ το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε σημείο Ο που απέχει απόσταση από το Ε $d_{(OE)} = 1$ m. Την χρονική στιγμή t_0 προσδίδουμε κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου $υ_0$ με φορά προς τα πάνω στο σύστημα $Σ_1$ - Δ και το σύστημα των δυο σωμάτων εκτελεί έναν αριθμό ταλαντώσεων στην διάρκεια των οποίων οριακά δεν χάνεται η μεταξύ τους επαφή. Την χρονική στιγμή t_1 αφήνουμε το $Σ_2$ από θέση που το νήμα είναι τεντωμένο και οριζόντιο. Την χρονική στιγμή t_2 που το $Σ_2$ διέρχεται για πρώτη φορά από την κατακόρυφη θέση με ταχύτητα μέτρου $υ_2 = 2$ m/s κόβεται το νήμα και το $Σ_2$ συγκρούεται ελαστικά με το $Σ_1$ με αποτέλεσμα τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ να εκτελούν οριζόντια βολή και να προσγειώνονται σε σημεία του οριζόντιο επιπέδου που το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν έχει ως μέσο το σημείο Ε. Θεωρήστε τα σώματα σημειακά αντικείμενα και τις αντιστάσεις από τον αέρα αμελητέες. Δίνεται $g = 10$ m/s^2.

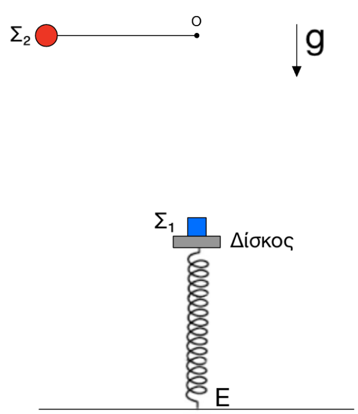
Να υπολογίσετε :

1) το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης $υ_0$.

2) την μάζα m_2 του σώματος $Σ_2$.

3) το φυσικό μήκος του ελατηρίου (ℓ_0).

4) το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει ο δίσκος Δ μετά την κρούση των $Σ_1$ και $Σ_2$.



Απάντηση

1) Στην διάρκεια της ταλάντωσης του συστήματος των σωμάτων $Σ_1$ - Δ οριακά δεν χάνεται η μεταξύ τους επαφή άρα συμπεραίνουμε πως το πλάτος της ταλάντωσης τους ισούται με την απόσταση της θέσης ισορροπίας του συστήματος από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (η απόδειξη θεωρείται γνωστή).

Θ.Ι.$_{(Σ_1 - Δ)}$: $ΣF = 0 \Rightarrow m_1 g + Mg - F_{ελ} = 0 \Rightarrow A = Δ\ell_0 = (m_1 + M)g/k \Rightarrow A = Δ\ell_0 = 0{,}1$ m .

Επειδή το σύστημα των δυο σωμάτων το εκτοξεύσαμε από την θέση ισορροπίας του θα ισχύει ότι η ταχύτητα εκτόξευσης ισούται με την μέγιστη σε μέτρο ταχύτητα στην διάρκεια της ταλάντωσης του.

Άρα $υ_0 = υ_{max} = ωA$ με $ω = \sqrt{k/(m_1 + M)}$, συνεπώς $\boxed{υ_0 = 1 \text{ m/s}}$.

2) Μετά την κρούση των δυο σωμάτων αυτά εκτελούν οριζόντια βολή από το ίδιο ύψος (ίδιος χρόνος καθόδου) και επειδή φτάνουν στο οριζόντιο επίπεδο ενώ έχουν διανύσει την ίδια οριζόντια απόσταση (προσγειώνονται σε σημεία που το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν έχει ως μέσο το σημείο Ε) θα ισχύει :

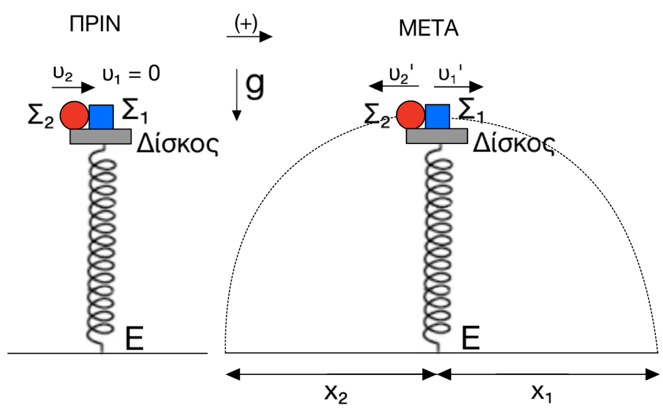
$x_1 = x_2 \Rightarrow |υ_1'|t_κ = |υ_2'|t_κ \Rightarrow |υ_1'| = |υ_2'|$, όμως η φορές των ταχυτήτων τους είναι αντίθετες άρα ισχύει $υ_1' = - υ_2'$ (1) .

Η ταχύτητα του σώματος $Σ_1$ ακριβώς πριν την κρούση είναι ίση με μηδέν $υ_1 = 0$ ενώ η ταχύτητα του σώματος $Σ_2$ είναι $υ_2 = 2$ m/s.

Η κρούση των $Σ_1$ και $Σ_2$ είναι κεντρική - ελαστική άρα θα ισχύουν οι εξισώσεις :

$υ_1' = 2m_2υ_2/(m_1 + m_2)$ (2) και $υ_2' = (m_2 - m_1)υ_2/(m_1 + m_2)$ (3) .

Από τις εξισώσεις (1),(2) και (3) προκύπτει $m_2 = m_1/3 \Rightarrow \boxed{m_2 = 1 \text{ kg}}$.



3) Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 εκτελούν οριζόντια βολή μετά την μεταξύ τους ελαστική κρούση οπότε συμπεραίνουμε ότι αφού μετά την κρούση οι ταχύτητες - ορμές των δυο σωμάτων είναι οριζόντιες και η ορμή του συστήματος των δυο σωμάτων πριν την κρούση είναι οριζόντια. **Άρα θα πρέπει η ταχύτητα - ορμή του σώματος Σ_1, το οποίο εκτελεί κατακόρυφη ταλάντωση, να είναι ίση με μηδέν ακριβώς πριν την κρούση. Συνεπώς η θέση του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν την κρούση είναι ή η πάνω ακραία θέση ή η κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης που εκτελεί.**

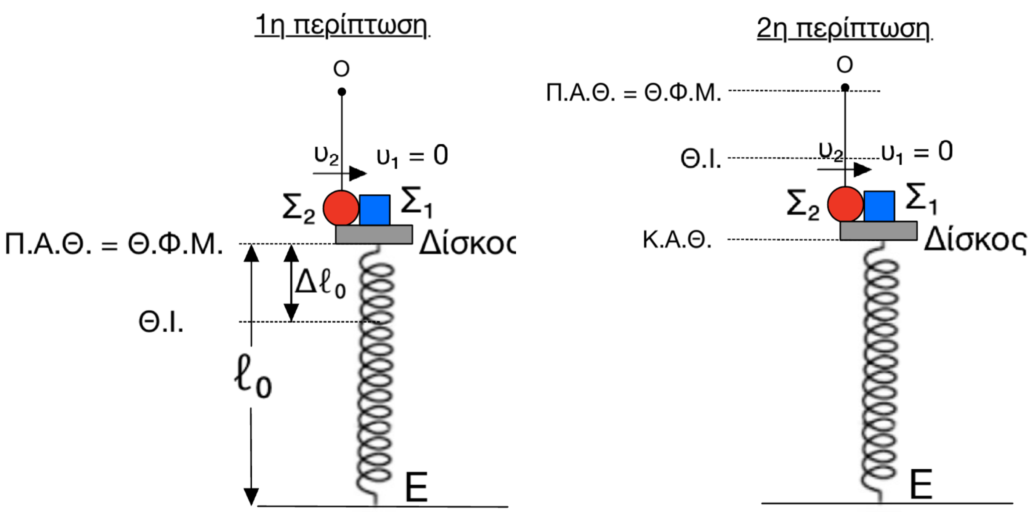
Το μήκος του νήματος ℓ υπολογίζεται με την χρήση του Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος Σ_2 μεταξύ της θέσης (1) που το νήμα είναι οριζόντιο και της θέσης (2) που το νήμα είναι κατακόρυφο.

Θ.Μ.Κ.Ε. (Σ_2, 1 → 2) : $\Delta K = W_{B_2} \Rightarrow m_2\upsilon_2^2/2 = m_2 g\ell \Rightarrow \ell = 0{,}2$ m .

<u>1η περίπτωση</u> : Η κρούση μεταξύ των Σ_1 και Σ_2 γίνεται στην πάνω ακραία θέση του συστήματος των σωμάτων Σ_1 - Δ που συμπίπτει με την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Θα ισχύει (ΟΕ) = $\ell + \ell_0 \Rightarrow \boxed{\ell_0 = 0{,}8 \text{ m}}$.

<u>2η περίπτωση</u> : Η κρούση μεταξύ των Σ_1 και Σ_2 γίνεται στην κάτω ακραία θέση του συστήματος των σωμάτων Σ_1 - Δ.

Θα ισχύει (ΟΕ) = $\ell + \ell_0 - 2A \Rightarrow \boxed{\ell_0 = 1 \text{ m}}$.



4) Την χρονική στιγμή t_2 που συγκρούονται τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ ο δίσκος (Δ) είναι στιγμιαία ακίνητος.

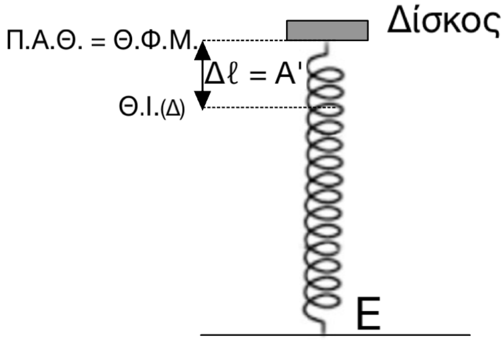
<u>1η περίπτωση</u> : ο δίσκος (Δ) είναι ακίνητος στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου άρα στην ανώτερη θέση της ταλάντωσης που θα εκτελέσει. Το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει ο δίσκος ισούται με την απόσταση της θέσης φυσικού μήκους του ελατηρίου από την νέα θέση ισορροπίας του δίσκου.

Θ.Ι.$_{(Δ)}$: $ΣF = 0 \Rightarrow Mg - F_{ελ} = 0 \Rightarrow A' = Δ\ell = Mg/k \Rightarrow \boxed{A' = 0{,}025\ m}$.

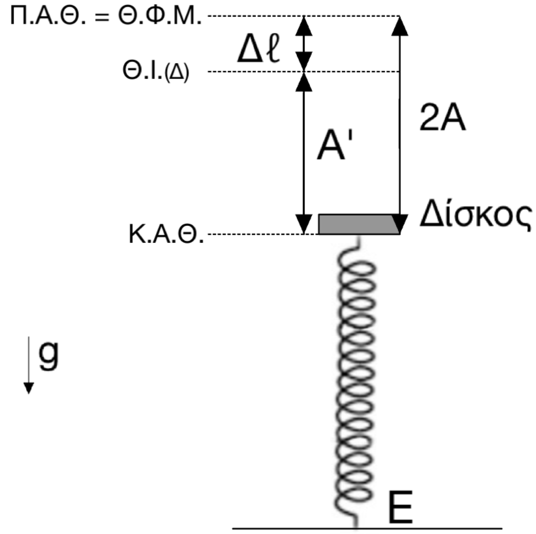
<u>2η περίπτωση</u> : ο δίσκος (Δ) είναι ακίνητος στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης που εκτελούσε το σύστημα των σωμάτων $Σ_1$ - Δ άρα στην κατώτερη θέση της ταλάντωσης που θα εκτελέσει. Το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει ο δίσκος υπολογίζεται από την σχέση που προκύπτει από το σχήμα :

$A' = 2A - Δ\ell \Rightarrow A' = 0{,}2 - 0{,}025 \Rightarrow \boxed{A' = 0{,}175\ m}$.

<u>1η περίπτωση</u>



<u>2η περίπτωση</u>



Παύλος Αλεξόπουλος