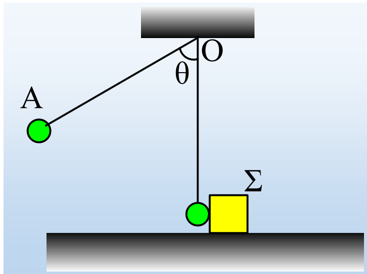
Τα πριν και τα μετά μιας ελαστικής κρούσης



Μια μικρή σφαίρα μάζας m κρέμεται στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου αβαρούς και μη εκτατού νήματος, μήκους l=1,6m, το άλλο άκρο του οποίου δένεται σε σταθερό σημείο Ο. Η σφαίρα εφάπτεται σε σώμα Σ μάζας M=2,4kg, το οποίο βρίσκεται ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,5, όπως φαίνεται στο σχήμα. Εκτρέπουμε το νήμα κατά γωνία θ, φέρνοντας τη σφαίρα στη θέση Α, από όπου την αφήνουμε να κινηθεί. Η σφαίρα φτάνοντας στην αρχική θέση ισορροπίας της συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ, το οποίο μετά την κρούση διανύει απόσταση s=0,4m στο οριζόντιο επίπεδο και σταματά.

i) Να βρεθεί η ταχύτητα που απέκτησε το σώμα Σ, αμέσως μετά την κρούση.

ii) Ποια η μεταβολή της ορμής και της κινητικής ενέργειας της σφαίρας, που οφείλονται στην κρούση.

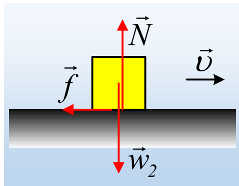
iii) Αν η σφαίρα έχει μάζα m=0,8kg, να υπολογιστούν:

α) Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της σφαίρας και του σώματος Σ, αμέσως μετά την κρούση.

β) Η αρχική επιτάχυνση της σφαίρας στη θέση Α, μόλις αφέθηκε να κινηθεί.

Δίνεται $g=10m/s^2$, ενώ θεωρούνται γνωστοί οι τριγωνομετρικοί αριθμοί (υπάρχουν και κομπιουτεράκια!)

Απάντηση:



i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στο σώμα Σ, κατά την κίνησή του μετά την κρούση. Για τα μέτρα τους έχουμε:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N=w_2 \text{ οπότε } f=\mu N=\mu Mg$$

Αν υ_2' η ταχύτητα που αποκτά το σώμα Σ μετά την κρούση (η αρχική του ταχύτητα για την κίνηση που θα ακολουθήσει), τότε εφαρμόζοντας για την κίνηση αυτή το θεώρημα μεταβολής της κινητικής του ενέργειας, θα έχουμε:

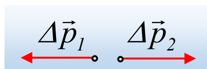
$$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_{w_2}+W_N+W_T \rightarrow$$

$$0-\frac{1}{2}M\upsilon_2'^2=0+0-\mu Mgs \rightarrow$$

$$\upsilon_2'=\sqrt{2\mu gs}=\sqrt{2\cdot 0{,}5\cdot 10\cdot 0{,}4}m/s=2m/s$$

ii) Για την κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής, από όπου, αν σαν σώμα 1 πάρουμε την σφαίρα και σαν σώμα 2 το Σ, παίρνουμε:

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_1'+\vec{p}_2' \rightarrow \vec{p}_1'-\vec{p}_1=-(\vec{p}_2'-\vec{p}_2) \rightarrow \Delta\vec{p}_1=-\Delta\vec{p}_2$$



Δηλαδή τα δυο σώματα έχουν αντίθετες μεταβολές ορμής, λόγω κρούσης. Οπότε παίρνοντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, θα έχουμε αλγεβρικά:

$$\Delta p_1=-\Delta p_2=-p_2-0=-M\upsilon_2'=-2{,}4\cdot 2kgm/s=-4{,}8kgm/s$$

Αλλά και η ολική κινητική ενέργεια πριν την κρούση, είναι ίση με την ολική κινητική ενέργεια μετά την κρούση, οπότε:

$$K_1+K_2=K_1'+K_2' \to K_1'-K_1=K_2-K_2' \to$$
$$\Delta K=-K_2'=-\frac{1}{2}M\upsilon_2'^2=-\frac{1}{2}2,4\cdot 2^2\,J=-4,8J$$

Το αρνητικό πρόσημο στην μεταβολή της ορμής, μας λέει ότι η μεταβολή της ορμής (το διάνυσμα) έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά, ενώ η αρνητική τιμή της μεταβολής της κινητικής ενέργειας, σημαίνει ότι η σφαίρα έχασε κινητική ενέργεια, η οποία μεταφέρθηκε στο σώμα Σ.

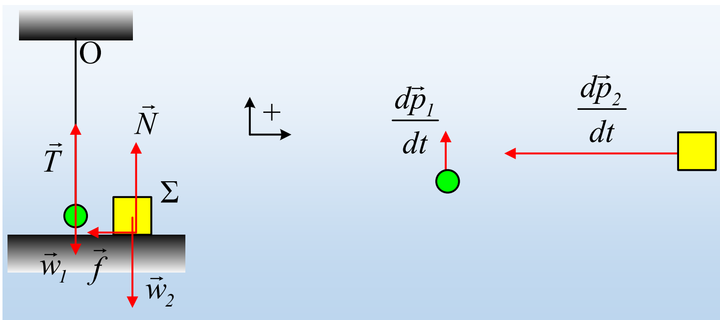
iii) Για τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση έχουμε:

$$\upsilon_1'=\frac{m-M}{m+M}\upsilon_1 \quad (1) \qquad \upsilon_2'=\frac{2m}{m+M}\upsilon_1 \quad (2)$$

Λύνοντας την (2) ως προς υ_1 και αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\upsilon_2'=\frac{2m}{m+M}\upsilon_1 \leftrightarrow \upsilon_1=\frac{m+M}{2m}\upsilon_2'=\frac{0,8+2,4}{2\cdot 0,8}2m/s=4m/s \to$$
$$\upsilon_1'=\frac{m-M}{m+M}\upsilon_1=\frac{0,8-2,4}{0,8+2,4}4m/s=-2m/s$$

α) Αμέσως μετά την κρούση, για τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, έχουμε την κατάσταση που δείχνεται στο παρακάτω σχήμα. Έτσι για τους ζητούμενους ρυθμούς μεταβολής της ορμής, θα έχουμε:

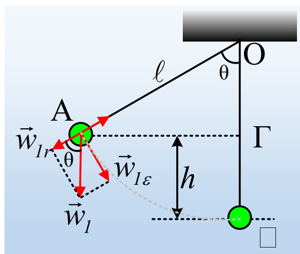


$$\frac{d\vec{p}_1}{dt}=\sum\vec{F}_1 \to \frac{dp_1}{dt}=T-w_1=m\frac{\upsilon_1'^2}{R}=0,8\cdot\frac{2^2}{1,6}kgm/s^2=2kgm/s^2$$

Διάνυσμα κατακόρυφο, με φορά προς τα πάνω, και:

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt}=\sum\vec{F}_2 \to \frac{dp_2}{dt}=-f=-\mu Mg=-0,5\cdot 2,4\cdot 10kgm/s^2=-12kgm/s^2$$

Διάνυσμα οριζόντιο με κατεύθυνση προς τα αριστερά.



β) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για την σφαίρα, ανάμεσα στην αρχική θέση Α, από όπου αφέθηκε να κινηθεί και την θέση Β, ελάχιστα πριν την κρούση, θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το Β ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας:

$$K_A+U_A=K_B+U_B \to 0+mgh=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+0 \xrightarrow{h=\ell-\ell\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$g\ell(1-\sigma\upsilon\nu\theta)=\frac{1}{2}\upsilon_1^2 \to \sigma\upsilon\nu\theta=1-\frac{\upsilon_1^2}{2g\ell}=1-\frac{4^2}{2\cdot 10\cdot 1,6}=\frac{1}{2}$$

Δηλαδή το νήμα έχει εκτραπεί αρχικά κατά γωνία θ=60°. Αλλά τότε αναλύοντας το βάρος σε δυο συνιστώσες, μια στη διεύθυνσης της ακτίνας w_{1r} και μια σε κάθετη διεύθυνση, συνεπώς εφαπτομενικά στον κύκλο που πρόκειται να κινηθεί $w_{1\varepsilon}$, ενώ στην διεύθυνση της ακτίνας $\Sigma F_r=0$, στην εφαπτομενική διεύθυνση η σφαίρα αποκτά επιτάχυνση, μέτρου:

$$\Sigma F_\varepsilon = ma \to w \cdot \eta\mu\theta = m\alpha \to$$

$$\alpha = g \cdot \eta\mu\theta = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} m/s^2 = 5\sqrt{3} m/s^2 .$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης