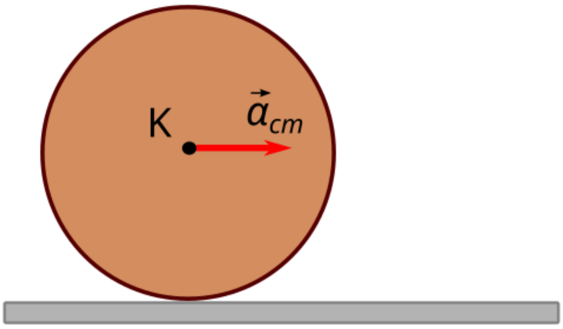
Το σημείο μηδενισμού της επιτάχυνσης – Μεταλλαγμένο



Ένας ομογενής τροχός ακτίνας $R = 1m$ βρίσκεται ακίνητος πάνω σε ακλόνητο οριζόντιο δάπεδο. Κάποια χρονική στιγμή που θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των χρόνων $t = 0$, το κέντρο Κ του τροχού αποκτά οριζόντια επιτάχυνση $a_{cm} = \sqrt{3}m/s^2$, όπως φαίνεται στο σχήμα και ο τροχός αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

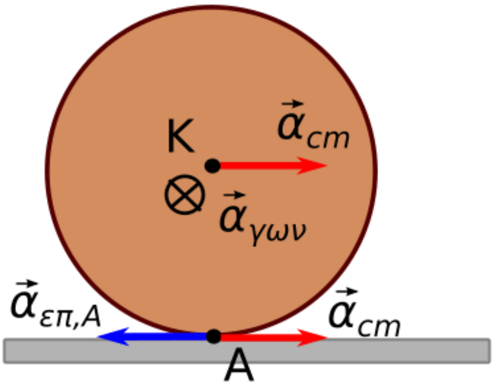
Α. Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.

Β. Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ υπάρχει κάποιο σημείο του τροχού με μηδενική (συνολική) επιτάχυνση.

Γ. Να προσδιορίσετε το σημείο του τροχού που τη χρονική στιγμή $t = 1s$ έχει μηδενική επιτάχυνση.

Απάντηση

Α. Ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο ακίνητο έδαφος. Θεωρούμε την κίνησή του ως σύνθετη, μία μεταφορική με ταχύτητα αυτή του κέντρου μάζας Κ και μία περιστροφική γύρω από άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και διέρχεται από το Κ. Τόσο η μεταφορική "συνιστώσα" της κίνησής του είναι ομαλά επιταχυνόμενη, όσο και η αντίστοιχη περιστροφική.



Το δάπεδο είναι ακίνητο και ο τροχός δεν ολισθαίνει, άρα κάθε χρονική στιγμή θα πρέπει το κατώτερο σημείο του να έχει μηδενική ταχύτητα. Επομένως, η επιτάχυνση του κατώτερου σημείου στην παράλληλη με το δάπεδο διεύθυνση, θα πρέπει να είναι μηδενική (δεν είναι πάντοτε μηδενική η συνολική επιτάχυνση του κατώτερου σημείου, καθώς έχει και κεντρομόλο επιτάχυνση $\vec{a}_{\kappa}$). Έτσι αντιλαμβανόμαστε τη φορά της γωνιακής επιτάχυνσης του τροχού. Συγκεκριμένα, πρόκειται για ένα διάνυσμα στη διεύθυνση του (νοητού) άξονα περιστροφής που διέρχεται από το Κ και με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα, ώστε η επιτρόχια επιτάχυνση του κατώτερου σημείου Α $\left(\vec{a}_{\varepsilon\pi,A}\right)$ να είναι κάθε στιγμή αντίρροπη της επιτάχυνσής του λόγω μεταφορικής κίνησης $(\vec{a}_{cm})$. Επειδή όμως πρέπει τα δύο αυτά διανύσματα να είναι αντίθετα, συμπεραίνουμε ότι τα μέτρα τους πρέπει να είναι ίσα. Οπότε, προκύπτει ο σύνδεσμος:

$$a_{cm} = a_{\varepsilon\pi,A} \Rightarrow a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu}R \quad (1)$$

Και με αριθμητική αντικατάσταση,

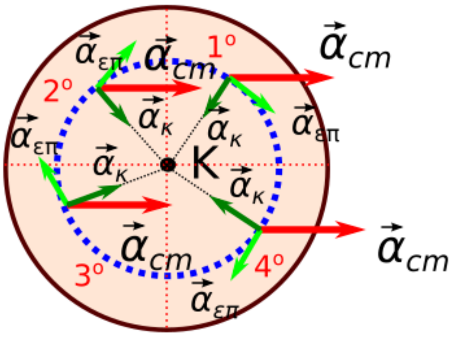
$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\sqrt{3}}{1}rad/s^2 = \sqrt{3}rad/s^2$$

Β. Η επιτάχυνση $\vec{a}$ κάθε σημείου του τροχού, προκύπτει από τη διανυσματική πρόσθεση

$$\vec{a} = \vec{a}_{cm} + \vec{a}_{\varepsilon\pi} + \vec{a}_{\kappa}$$

των αντίστοιχων συνιστωσών επιταχύνσεων του, όπου οι $\vec{a}_{\varepsilon\pi}$ και $\vec{a}_{\kappa}$ του κάθε σημείου είναι μεταξύ τους κάθετα διανύσματα. Έτσι, για να είναι μηδενική η επιτάχυνση κάποιου σημείου του τροχού αντιλαμβανόμαστε ότι πρέπει

$$(\vec{a}_{\varepsilon\pi} + \vec{a}_{\kappa}) = \vec{a}_{\pi\varepsilon\rho} = -\vec{a}_{cm}$$



Δηλαδή, η συνισταμένη των κάθετων διανυσμάτων $\vec{a}_{\varepsilon\pi}$ και $\vec{a}_{\kappa}$ (πρόκειται για την επιτάχυνση που αντιστοιχεί στην περιστροφική κίνηση του τροχού) να είναι αντίρροπη της επιτάχυνσης λόγω μεταφορικής κίνησης του τροχού και ίσου μέτρου με αυτή. Χωρίζοντας τον τροχό σε τέσσερα τεταρτημόρια όπως στο σχήμα, αντιλαμβανόμαστε ότι τα παραπάνω, εάν συμβαίνουν, θα ικανοποιούνται μόνο από σημεία του 4^{ου} τεταρτημορίου.

Εάν ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού και r η απόσταση του τυχαίου σημείου του τροχού από το κέντρο του Κ, ισχύει ότι

$$|\vec{a}_{\varepsilon\pi} + \vec{a}_{\kappa}| = \sqrt{\left(a_{\gamma\omega\nu} r\right)^2 + (\omega^2 r)^2} = r\sqrt{a_{\gamma\omega\nu}^2 + \omega^4}$$

Επομένως, για να είναι μηδενική η επιτάχυνση αυτού του (τυχαίου) σημείου, θα πρέπει

$$|\vec{a}_{\pi\varepsilon\rho}| = |\vec{a}_{\varepsilon\pi} + \vec{a}_{\kappa}| = a_{cm} \Rightarrow r\sqrt{a_{\gamma\omega\nu}^2 + \omega^4} = a_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{a_{cm}}{\sqrt{a_{\gamma\omega\nu}^2 + \omega^4}} = \frac{a_{cm}}{\sqrt{a_{\gamma\omega\nu}^2 + a_{\gamma\omega\nu}^4 t^4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{a_{cm}}{a_{\gamma\omega\nu}\sqrt{1 + a_{\gamma\omega\nu}^2 t^4}} \Rightarrow \boxed{r = \frac{R}{\sqrt{1 + a_{\gamma\omega\nu}^2 t^4}}} \quad (2)$$

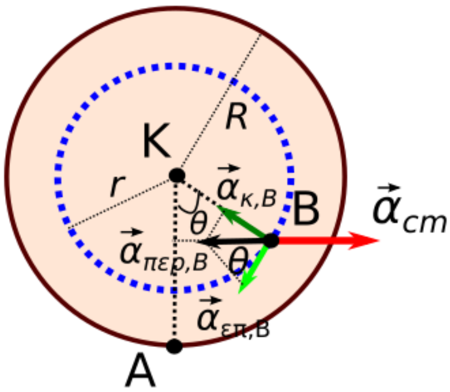
Όπου έγινε χρήση της σχέσης (1) και του γεγονότος ότι η περιστροφική κίνηση του τροχού είναι ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική γωνιακή ταχύτητα. Δηλαδή, ισχύει η σχέση $\omega = a_{\gamma\omega\nu} t$.

Από την παραπάνω σχέση (2), και καθώς $\sqrt{1 + a_{\gamma\omega\nu}^2 t^4} \geq 1$ για κάθε $t \geq 0$ προκύπτει ότι $0 < r \leq R$ με την ισότητα $r = R$ να ισχύει μόνο την $t = 0$. Επομένως, αντιλαμβανόμαστε ότι κάθε χρονική στιγμή υπάρχει κάποιο σημείο του τροχού με μηδενική (συνολικά) επιτάχυνση το οποίο βρίσκεται σε απόσταση r από το κέντρο Κ του τροχού.

Γ. Θα προσδιορίσουμε τη θέση του συγκεκριμένου σημείου τότε, προσδιορίζοντας τόσο την απόστασή του r από το κέντρο Κ του τροχού, όσο και την αντίστοιχη γωνία θ που σχηματίζει η επιβατική του ακτίνα με την κατακόρυφη ακτίνα ΚΑ του τροχού.

Από την σχέση (2) για $t = 1s$, προκύπτει ότι:

$$r = \frac{1}{\sqrt{1+3\cdot 1}}m = 0{,}5m$$



Με βάση το σχήμα, για το συνημίτονο της γωνίας θ έχουμε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{a_{\varepsilon\pi,B}}{a_{\pi\varepsilon\rho,B}} = \frac{a_{\gamma\omega\nu}r}{a_{cm}} = \frac{a_{\gamma\omega\nu}r}{a_{\gamma\omega\nu}R} \Longrightarrow$$

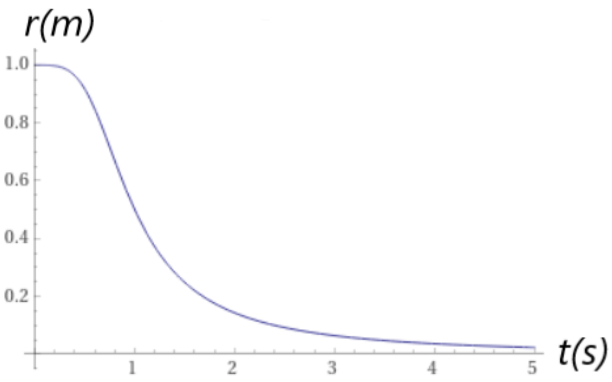
$$\Longrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{r}{R} = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}rad$$

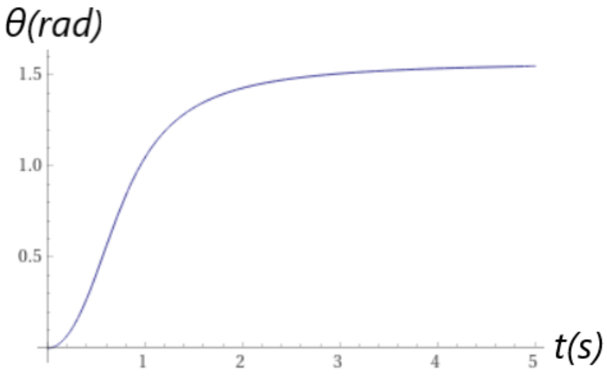
Έτσι, το ζητούμενο σημείο Β του τροχού που έχει τότε μηδενική επιτάχυνση, είναι σημείο του 4^{ου} τεταρτημορίου του, απέχει από το κέντρο του Κ απόσταση $r = \frac{R}{2} = 0{,}5m$ και η αντίστοιχη επιβατική του ακτίνα ΚΒ σχηματίζει γωνία $\theta = 60°$ με την κατακόρυφο.

Σχόλιο για καθηγητές: Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $r = r(t) = \frac{R}{\sqrt{1+a_{\gamma\omega\nu}^2 t^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+3t^4}}$, $t \geq 0$, δηλαδή της σχέσης (2) και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\theta = \theta(t)$. Για την $\theta(t)$ έχουμε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{1+a_{\gamma\omega\nu}^2 t^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+3t^4}} \Longrightarrow \theta = \sigma\upsilon\nu^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+3t^4}}\right), \qquad t \geq 0$$

Παρατηρούμε ότι την $t = 0$ το σημείο μηδενισμού της επιτάχυνσης είναι το $(r,\theta) = (R,0)$, δηλαδή το κατώτερο σημείο του τροχού, ενώ με την πάροδο του χρόνου αυτό τείνει προς το κέντρο Κ του τροχού μέσω της οριζόντιας ακτίνας, καθώς $r \to 0$ και $\theta \to \frac{\pi}{2}rad$.





Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com