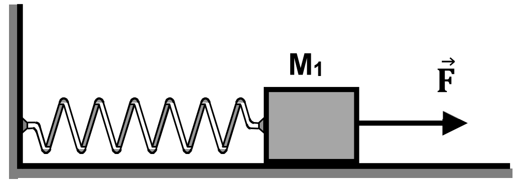
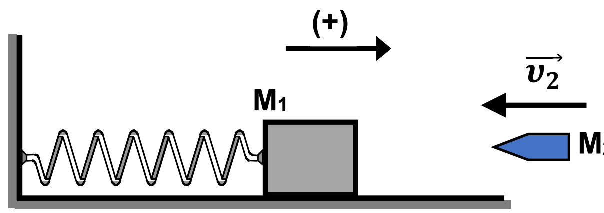
Μέγιστη και ελάχιστη απώλεια…



Σχήμα 1.

Το σώμα $Σ_1$ μάζας M_1=1kg είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς k=100N/m και ισορροπεί στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος (Θ.Φ.Μ.). Τη χρονική στιγμή t_0=0, (σχήμα 1) ασκούμε οριζόντια δύναμη μέτρου F και στη θέση όπου το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $Δ\ell_1$=20cm, παύει να ασκείται η δύναμη F και το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά D=k και ενέργεια E_1=8J. Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο. Να βρείτε:

i) Το πλάτος ταλάντωσης A_1, που θα εκτελέσει το σώμα $Σ_1$ και το μέτρο της δύναμης F.



Σχήμα 2.

Κάποια χρονική στιγμή το σώμα $Σ_1$ συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με βλήμα $Σ_2$ μάζας M_2=3kg το οποίο κατευθύνεται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου $υ_2$=1m/s. (σχήμα 2).
Αν κατά την κρούση η απώλεια ενέργειας του συστήματος είναι η μέγιστη δυνατή να βρείτε:
ii) τη θέση που έγινε η κρούση και την ταχύτητα του σώματος $Σ_1$ στη θέση αυτή, καθώς και το ποσό της απώλειας ενέργειας του συστήματος.

iii) Να βρεθεί η δύναμη που δέχεται το βλήμα από το κιβώτιο την πρώτη φορά που μηδενίζεται ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος μετά την κρούση.

iv) Να βρείτε τη θέση κρούσης και την απώλεια ενέργειας του συστήματος εάν αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ακινητοποιούνταν στιγμιαία.

v) Να βρείτε που θα έπρεπε να γίνει η κρούση για να υπάρχει ελάχιστη απώλεια ενέργειας εξαιτίας της κρούσης.

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας g.

Απάντηση

i)

E_1= ½ ·k·A_1^2→16=100 A_1^2→A_1=0,4m

Η ενέργεια της ταλάντωσης προέρχεται από τη δράση της δύναμης F. Επειδή η δύναμη καταργείται το έργο της θα αποθηκευτεί στο σύστημα του ελατηρίου και του σώματος $Σ_1$ και θα ισούται με την ενέργεια ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σύστημα.

$$W_F=E_{ταλ.}→F·Δ\ell_1= E_{ταλ.} →F=40N.$$

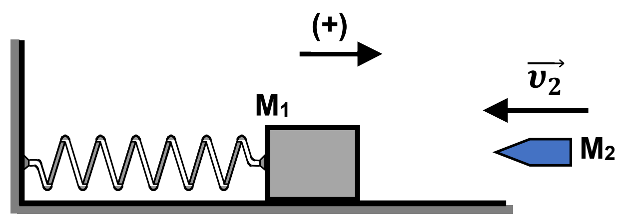
Αναλυτικά τη στιγμή που καταργείται η δύναμη F το σώμα έχει ταχύτητα υ και το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $x_1=\Delta\ell_1$.

Από ΘΜΚΕ από την στιγμή που δρα η δύναμη μέχρι την κατάργησή της έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi.} = W_{F\varepsilon\lambda}^{1\to2} + W_F \to K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi.} = U_{\varepsilon\lambda.}^{(1)} - U_{\varepsilon\lambda.}^{(2)} + W_F \to$$
$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - 0 = 0 - U_{\varepsilon\lambda.}^{(2)} + W_F \to \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon^2 + \tfrac{1}{2}\,k\cdot x_1^2 = W_F \to$$
$$K_1 + U_{\tau\alpha\lambda,1} = W_F \to$$
$$E_{\tau\alpha\lambda} = W_F$$

ii)

Διαισθητικά θα περίμενε κανείς να βρει ότι η μέγιστη απώλεια ενέργειας λόγω της κρούσης θα συμβεί όταν το σύστημα μετά την κρούση έχει μηδενική ταχύτητα. Δηλαδή η κρούση να γίνει σε θέση όπου τα σώματα κινούνται αντίρροπα και έχουν αντίθετες ορμές. Ωστόσο δεν μπορούμε να το θεωρήσουμε δεδομένο διότι από την απώλεια ενέργειας προκύπτει:



Σχήμα 3.

$$Q_{\kappa\rho.} = K_{\pi\rho\iota\nu} - K_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \to$$
$$Q_{\kappa\rho.} = K_1 + K_2 - K_{\sigma\upsilon\sigma} \to$$
$$Q_{\kappa\rho.} = \tfrac{1}{2}\cdot m_1\cdot\upsilon_1^2 + \tfrac{1}{2}\cdot m_2^2\cdot\upsilon_2^2 - \tfrac{1}{2}\cdot(m_1+m_2)\cdot\upsilon_\Sigma^2 \to$$
$$Q_{\kappa\rho.} = \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\upsilon_1^2 + \tfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 1^2 - \tfrac{1}{2}\cdot(1+3)\cdot\upsilon_\Sigma^2 \to$$
$$Q_{\kappa\rho.} = 0{,}5\upsilon_1^2 + 1{,}5 - 2\cdot\upsilon_\Sigma^2 \quad \textit{(1)}$$

και δεν είναι εμφανές ότι η διαφορά $K_{\pi\rho\iota\nu} - K_{\mu\varepsilon\tau\alpha}$ μεγιστοποιείται όταν $\upsilon_\Sigma=0$, καθώς μπορεί και για άλλες τιμές της ταχύτητας υ_1 η παραπάνω παράσταση να είναι μεγαλύτερη.

Από τη διατήρηση της ορμής αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση προκύπτει:

$$\vec{P}^{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{\Sigma\upsilon\sigma} \xRightarrow{(+)\to} m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1+m_2)\upsilon_\Sigma \to$$
$$1\cdot\upsilon_1 - 3\cdot 1 = (1+3)\upsilon_\Sigma \to \upsilon_1 - 3 = 4\upsilon_\Sigma \to$$
$$\upsilon_\Sigma = \frac{\upsilon_1 - 3}{4} \quad \textit{(2)}$$

Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει:

$$Q_{\kappa\rho.} = 0{,}5\upsilon_1^2 + 1{,}5 - 2\cdot\upsilon_\Sigma^2 \to Q_{\kappa\rho.} = 0{,}5\upsilon_1^2 + 1{,}5 - 2\cdot\left(\frac{\upsilon_1-3}{4}\right)^2 \to$$

$$Q_{\kappa\rho.} = 0{,}5\upsilon_1^2 + 1{,}5 - 2\frac{(\upsilon_1^2 - 6\upsilon_1 + 9)}{16} \to Q_{\kappa\rho.} = 0{,}5\upsilon_1^2 + 1{,}5 - \frac{\upsilon_1^2}{8} + \frac{6\upsilon_1}{8} - \frac{9}{8} \to$$

$$Q_{\kappa\rho.} = \frac{3\upsilon_1^2}{8} + \frac{6\upsilon_1}{8} + \frac{3}{8} \quad \textit{(3)}$$

Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $Q_{κρ.} = \frac{3υ_1^2}{8} + \frac{6υ_1}{8} + \frac{3}{8}$. Έχει διακρίνουσα Δ=0 και διπλή ρίζα το $υ_1$= -1m/s. Συνεπώς:

$$Q_{κρ.} = \frac{3}{8}(υ_1+1)^2 \quad \textit{(4)}$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι όταν η ταχύτητα είναι μέγιστη θετική, δηλαδή όταν το σώμα βρίσκεται στη Θ.Ι. και κατευθύνεται προς τα δεξιά η παραπάνω παράσταση μεγιστοποιείται και έχουμε τη μέγιστη απώλεια ενέργειας.

Για $υ_1=+υ_{1max}=ω_1A_1$= 4m/s από την (4) προκύπτει: $Q_{κρ.,\max} = \frac{75}{8}J = 9{,}375J$

Σε αντίθεση με αυτό που περιμέναμε.

iii)

Από τη σχέση (2) προκύπτει $υ_Σ = \frac{4-3}{4}m/s = 0{,}25m/s$ και το σύστημα κινείται προς τα δεξιά. Η ταχύτητα αυτή είναι η μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης του συσσωματώματος.

$$ω_2 = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5\, r/s$$

Και $υ_Σ = ω_2 A_2 \rightarrow \frac{1}{4} = 5A_2 \rightarrow A_2 = \frac{1}{20}m$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας μηδενίζεται στην ακραία θέση της ταλάντωσης για πρώτη φορά όπου υ=0.

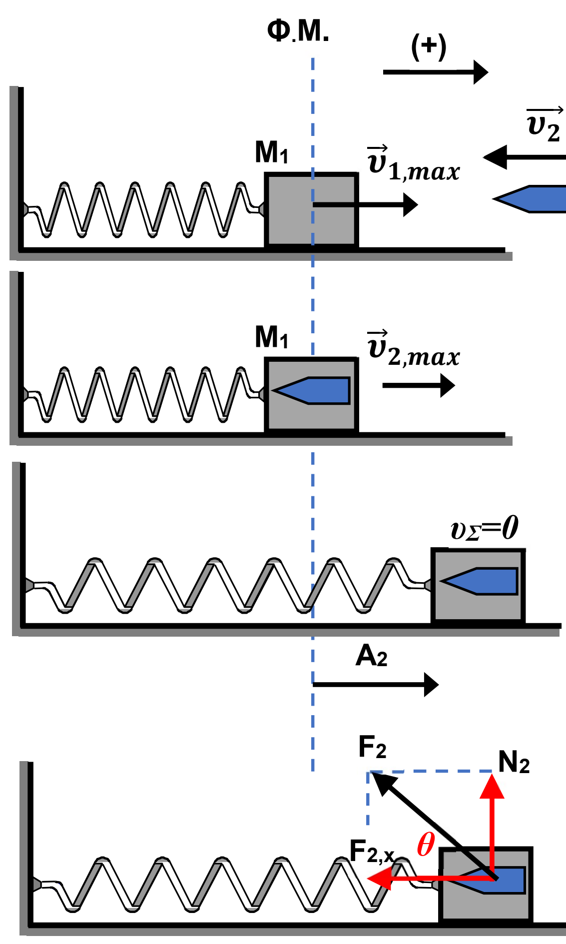
$$\frac{dK}{dt} = ΣF \cdot υ$$

Από την επιτάχυνση της ταλάντωσης στην ακραία θέση $x = A_2 = \frac{1}{20}m$ προκύπτει :

$α_2 = -ω_2^2 \cdot x \rightarrow$

$$α_2 = -(5)^2 \frac{1}{20} \rightarrow α_2 = -\frac{25}{20}m/s^2$$

$$\rightarrow α_2 = -1{,}25m/s^2$$



Σχήμα 4.

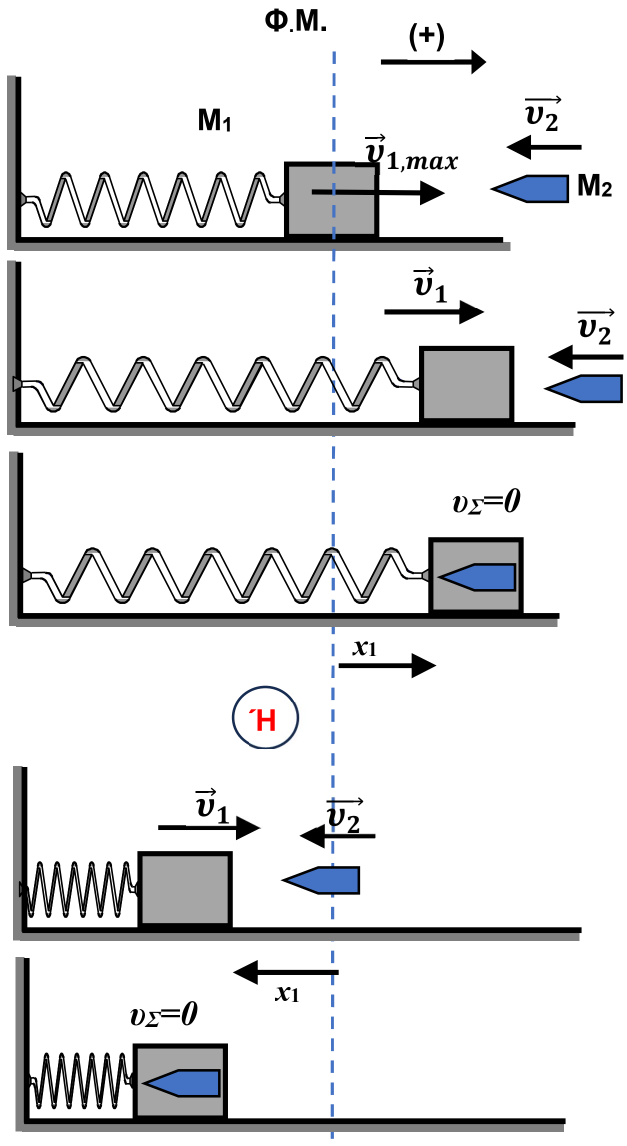
Η επιτάχυνση κατευθύνεται προς τα αριστερά.

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στον οριζόντιο άξονα για το $Σ_2$ προκύπτει:

$ΣF_x = m_2α \rightarrow F_{2,x} = -m_2α \rightarrow F_{2,x} = -3{,}75N$

Και από την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα $ΣF_y = 0 \rightarrow N_2 = m_2g = 30N$

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\sqrt{3,75^2+30^2}\rightarrow F\simeq 30,233N \text{ και } \varepsilon\varphi\theta=\frac{N_2}{F_x}=\frac{30}{3,75}=8$$



Σχήμα 5.

iv)
Από τη σχέση (2) για υ_Σ=0 προκύπτει:

$$\upsilon_1=3m/s$$

Από τη σχέση (4) για υ_1=+3m/s προκύπτει:

$$Q_{\kappa\rho.}=6J$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 πριν την κρούση προκύπτει:

$$E=\tfrac{1}{2}\cdot m_1\cdot\upsilon_1^2+\tfrac{1}{2}\cdot k\cdot x^2\rightarrow$$
$$8=\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 3^2+\tfrac{1}{2}\cdot 100\cdot x^2\rightarrow$$
$$8=4,5+50x^2\rightarrow$$
$$3,5=50x^2\rightarrow x^2=0,07\rightarrow x=\pm\, 0,1\sqrt{7}\text{ m}$$

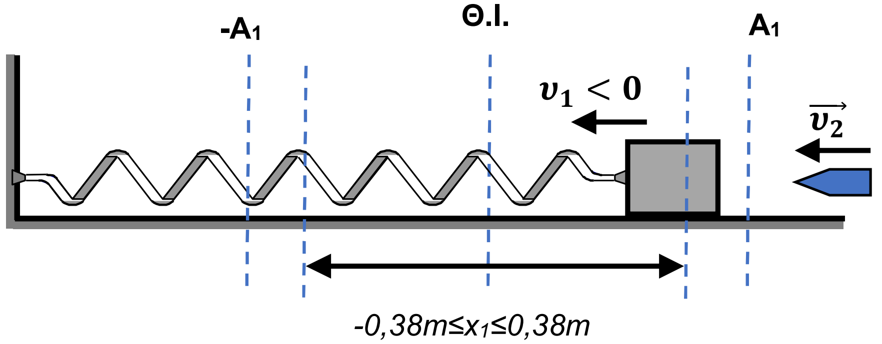
Η κρούση μπορεί να γίνει και στη θέση $x=-\,0,1\sqrt{7}$m έχοντας αλγεβρική τιμή ταχύτητας υ_1=3m/s.

v)
Η ταχύτητα υ_1 παίρνει τιμές από $-4m/s\leq\upsilon_1\leq 4m/s$ και συνεπώς στην τιμή υ_1=-1m/s προκύπτει ότι $Q_{\kappa\rho}$=0 !!! Αυτό βέβαια σημαίνει ότι τα σώματα έχουν ίσες ταχύτητες και ως προς το μέτρο και ως προς τη φορά και στην ουσία δεν μπορεί να συμβεί η εισχώρηση του βλήματος μέσα στο σώμα. Αποτελεί θα λέγαμε μία οριακή θεωρητική περίπτωση όπου τα σώματα κολλούν και κινούνται σαν ένα. Με βάση αυτό θα λέγαμε ότι η κρούση συμβαίνει όταν η ταχύτητα του σώματος Σ_1 κυμαίνεται από $-1\leq\upsilon_1\leq 4$ m/s.

Η θέση κρούσης x_1 στην οποία υ_1=-1m/s, από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 πριν την κρούση προκύπτει:

$$E=\tfrac{1}{2}\cdot m_1\cdot\upsilon_1^2+\tfrac{1}{2}\cdot k\cdot x_1^2\rightarrow 8=\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot(-1)^2+\tfrac{1}{2}\cdot 100\cdot x_1^2\rightarrow$$
$$8=0,5+50\cdot x_1^2\rightarrow 7,5=50\cdot x_1^2\rightarrow x_1^2=0,15\rightarrow \cdot x_1=\pm\, 0,1\sqrt{15}\approx\ 0,387m$$

Με βάση τα παραπάνω η κρούση δεν μπορεί να συμβεί σε θέση όπου το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 είναι μεγαλύτερο από του Σ_2 και το σώμα Σ_1 κατευθύνεται ομόρροπα με το Σ_2 δηλαδή προς τα αριστερά. Έτσι η κρούση δεν μπορεί να συμβεί όταν $-0,38m\leq x_1\leq 0,38m$ και $-4m/s\leq\upsilon_1\leq -1$ m/s



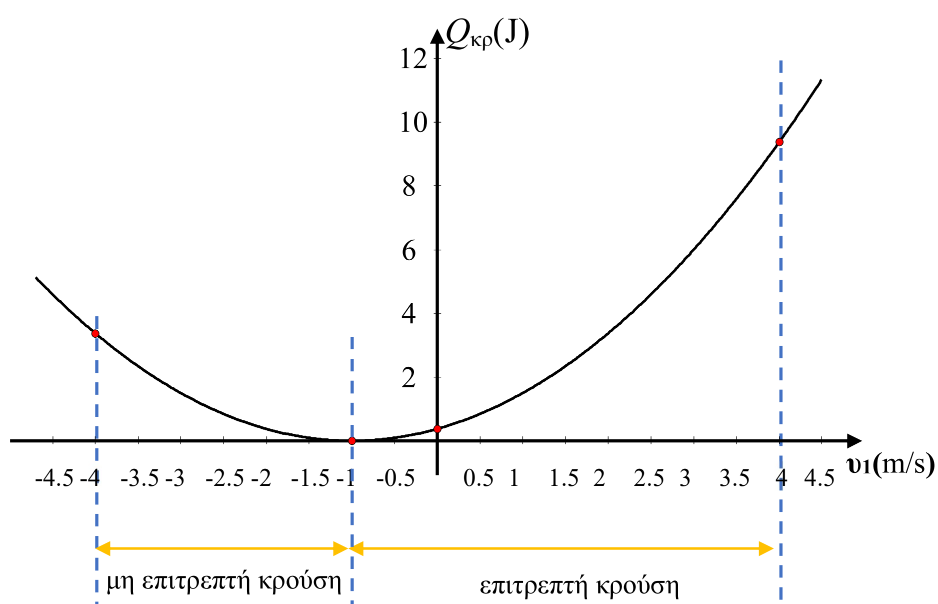
Σχήμα 6.

Σχόλιο

Όλα αυτά που βρήκαμε είναι απολύτως συμβατά με τη θεωρία του τριωνύμου. Το τριώνυμο που προκύπτει από τη σχέση (3) έχει α>0 που σημαίνει ότι εμφανίζει ελάχιστο με συντεταγμένες $(\frac{-\beta}{2\alpha}, \frac{-\Delta}{4\alpha}) = (-1, 0)$.

Στο διάστημα από $\left(-\infty, \frac{-\beta}{2\alpha}\right)$ δηλαδή στο $(-\infty, -1)$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και στο διάστημα $\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ δηλαδή στο $(-1, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Η ταχύτητα του σώματος Σ_1 παίρνει τιμές από $-4m/s \le \upsilon_1 \le 4m/s$. Από το διάγραμμα της απώλειας ενέργειας σε συνάρτηση με την ταχύτητα του σώματος Σ_1 φαίνονται ξεκάθαρα τα αποτελέσματα που εξάγαμε.



Χρήστος Αγριόδημας