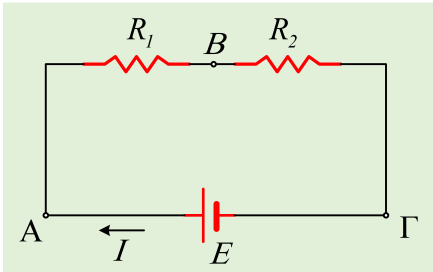
Ο 2ος κανόνας του Kirchhoff και οι ενέργειες

Ξεκινώντας από την διδασκαλία της Β΄ Λυκείου για το συνεχές ρεύμα, ας δούμε πώς μπορούμε να αντιμετωπίσουμε ένα πιο δύσκολο κύκλωμα, εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα του Kirchhoff, μέσω κάποιων εφαρμογών.

Πρώτα όμως λίγη θεωρία…



Έστω το κύκλωμα του διπλανού σχήματος, όπου η πηγή έχει ΗΕΔ Ε και μηδενική εσωτερική αντίσταση.

Τι ακριβώς συμβαίνει με τις διαφορές δυναμικού, τις τάσεις και τις ενέργειες στο κύκλωμα αυτό;

Προφανώς το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα, η ένταση του οποίου μπορεί να υπολογιστεί από τον νόμο του Ohm σε κλειστό κύκλωμα:

$$I = \frac{E}{R_{ολ}} = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα του Kirchhoff γράφουμε:

$$V_{ΑΓ}=V_{ΑΒ}+V_{ΒΓ} \ (2)$$

Ας προσέξουμε λίγο τι ακριβώς έχουμε γράψει στην (2). Πήραμε σαν δεδομένο ότι το δυναμικό στο σημείο Α είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο δυναμικό στο Γ ($V_Α>V_Γ$) αφού κατά την κίνησή μας από το Γ στο Α συναντάμε μια πηγή, όπου από τον αρνητικό της πόλο, «ανεβαίνουμε» στον θετικό της πόλο, άρα έχουμε αύξηση δυναμικού!

Αντίθετα $V_Α>V_Β$ αφού το ηλεκτρικό ρεύμα (συμβατική φορά) ρέει από το σημείο με μεγαλύτερο δυναμικό σε σημείο με μικρότερο δυναμικό. Το ίδιο συμβαίνει και για την διαφορά δυναμικού $V_Β$-$V_Γ$.

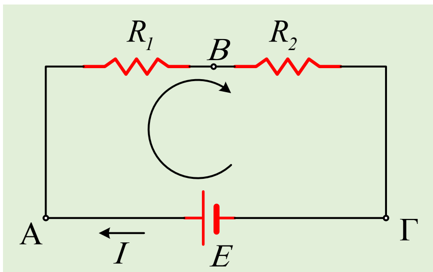
Αλλά τότε η σχέση (2) μπορεί να γραφτεί:

$$V_{ΑΓ}-V_{ΑΒ}-V_{ΒΓ}=0 \ (2α) \rightarrow$$

$$E-IR_1-IR_2=0 \ \ (2β)$$

Όπου η εξίσωση (2β) οδηγεί στην (1), στον νόμο του Ohm.

Πρακτικά η εξίσωση (2β) τι μας λέει;

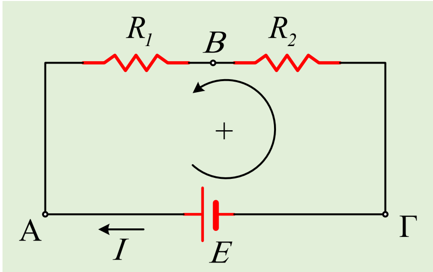


Αν ξεκινήσουμε από το σημείο Α να διαγράψουμε την κλειστή διαδρομή (τον βρόχο) ΑΒΓΑ, κινούμενοι με την ίδια φορά, όπως το ρεύμα, θα έχουμε:

$$-IR_1 - IR_2 + E = 0$$

Όπου γράψαμε $-IR_1$ αφού συναντήσαμε μείωση δυναμικού, ενώ γράψαμε +Ε αφού το δυναμικό αυξήθηκε κατά την κίνησή μας από το Γ στο Α.

Αντίθετα αν κινηθούμε κατά μήκος του βρόχου με την φορά ΑΓΒΑ, δηλαδή αντίθετα από την φορά του ρεύματος, θα γράψουμε:



$$-E + IR_2 + IR_1 = 0$$

Αφού κατά την κίνησή μας από το Α στο Γ, «κατεβήκαμε επίπεδο», το δυναμικό μειώθηκε, ενώ από το Γ στο Β κινηθήκαμε από μικρότερο δυναμικό σε μεγαλύτερο, με αποτέλεσμα να έχουμε αύξηση δυναμικού κατά IR_2…

Συμπέρασμα:

Όταν εφαρμόζουμε τον 2^o Κ.Κ, κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής, επιλέγουμε μια φορά διαγραφής γράφοντας +Ε, όταν συναντάμε τον αρνητικό πόλο μιας πηγής (αντίθετα -Ε όταν συναντάμε τον θετικό της πόλο) και -IR όταν συναντήσουμε αντίσταση που διαρρέεται από ρεύμα της ίδιας φοράς με την φορά κίνησής μας (και +IR όταν κινούμαστε αντίθετα…).

Ας έρθουμε τώρα στην εξίσωση (2β), που προέκυψε από τον 2^o Κ.Κ. και ας πολλαπλασιάσουμε με την ένταση του ρεύματος, θα πάρουμε:

$$EI - I^2R_1 - I^2R_2 = 0$$

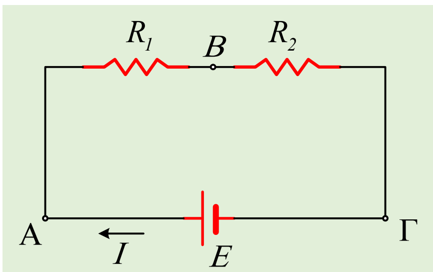
Όπου το ΕΙ μετράει την ισχύ της πηγής ενώ το I^2R_1 την «ισχύ» της αντίστασης. Ας το δούμε λίγο, γιατί η μια ισχύς +ΕΙ και γιατί η άλλη $-I^2R$;

Η ισχύς της πηγής $P_E=E·I$ εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο η πηγή **δίνει** ενέργεια στα φορτία (στο ρεύμα), ενώ η ισχύς μιας αντίστασης $P_R=I^2R$ εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο η αντίσταση **παίρνει** ενέργεια από το ηλεκτρικό ρεύμα, ενέργεια την οποία μετατρέπει σε θερμότητα.

Με άλλα λόγια ο $2^{ος}$ Κ.Κ. εκφράζει την διατήρηση της ενέργειας, όπου αν θεωρήσουμε την ενέργεια που δίνουν οι πηγές στο κύκλωμα ως θετικές, τότε οι ενέργειες που απορροφούν οι όποιοι καταναλωτές από το κύκλωμα, θα θεωρούνται αρνητικές.

Εφαρμογή 1η :

Ας έρθουμε στο κύκλωμα του σχήματος όπου Ε=40V, R_1=8Ω, ενώ Ι=2Α. Εφαρμόζοντας τον 2^o κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα:



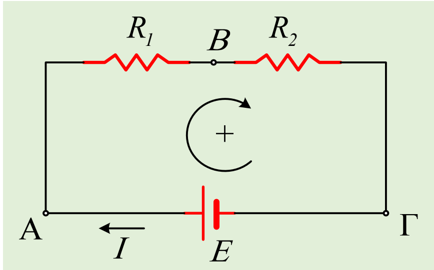
i) Να βρεθεί η τιμή της αντίστασης R_2.

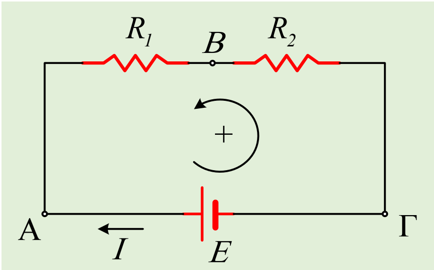
ii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός με τον οποίο κάθε στοιχείο του κυκλώματος **παρέχει** ενέργεια στο ηλεκτρικό ρεύμα.

Απάντηση:

i) Ας διαγράψουμε το κύκλωμα ξεκινώντας από το σημείο Α με φορά ΑΒΓΑ και ας εφαρμόσουμε τον 2ο Κ.Κ.:

$$-IR_1 - IR_2 - E = 0 \rightarrow$$
$$-2 \cdot 8V - 2A \cdot R_2 - 40V = 0 \rightarrow R_2 = 12\Omega$$





Και αν επιλέξουμε να κινηθούμε ξεκινώντας από το σημείο Γ ακολουθώντας την πορεία ΓΒΑΓ, τι θα πάρουμε;

$$+IR_2 + IR_1 - E = 0 \rightarrow$$
$$+2A \cdot R_2 + 2 \cdot 8V - 40V = 0 \rightarrow R_2 = 12\Omega$$

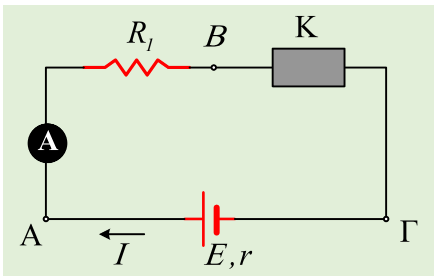
ii) Προφανώς στο κύκλωμα αυτό η πηγή **παρέχει** ενέργεια στο κύκλωμα, ενώ οι δύο αντιστάτες **παίρνουν** ενέργεια από το ηλεκτρικό ρεύμα, την οποία μετατρέπουν σε θερμότητα. Αλλά αν μας ζητάνε την ενέργεια που κάθε στοιχείο **δίνει** στο ρεύμα, θα έχουμε:

$$P_E = EI = 40V \cdot 2A = 80W$$
$$P_{R_1} = -I^2 R_1 = -2^2 \cdot 8W = -32W$$
$$P_{R_2} = -I^2 R_2 = -2^2 \cdot 12W = -48W$$

Αξίζει να επισημανθεί ότι με αυτή την λογική η ολική ισχύς που παρέχεται στο ηλεκτρικό ρεύμα είναι μηδενική!!! Πώς αλλιώς άλλωστε θα μπορούσε να ήταν;

Εφαρμογή 2η :

Δίνεται το διπλανό κύκλωμα, όπου η πηγή έχει Ε=30V και εσωτερική αντίσταση r=2Ω, R=8Ω, ενώ το αδιαφανές κουτί Κ, περιέχει ένα δίπολο (έναν καταναλωτή ενέργειας, όπως ένας αντιστάτης ή μια πηγή όπως μια μπαταρία, χωρίς εσωτερική αντίσταση…). Να βρεθεί η τάση $V_{ΒΓ}$ στα άκρα του κουτιού, καθώς και η ισχύς την οποία παρέχει το κουτί στο ηλεκτρικό ρεύμα, όταν το ιδανικό αμπερόμετρο δείχνει ένδειξη:



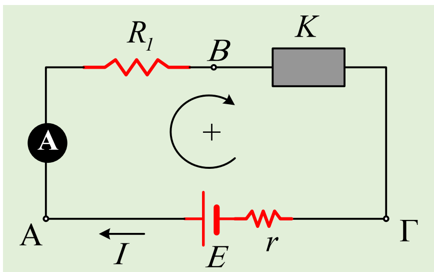
i) α) I_1= 2 Α και β) I_2=4 Α, με φορά όπως στο σχήμα.

ii) I_3= 2 Α αντίθετης φοράς από αυτήν του σχήματος.

Απάντηση:

i) Εφαρμόζουμε τον 2ο Κ.Κ. του Kirchhoff στο κύκλωμα διαγράφοντάς το κατά την διαδρομή ΑΒΓΑ, όπου «βλέπουμε» και την εσωτερική αντίσταση της πηγής, έξω από αυτήν! (για να μην την … ξεχάσουμε…).

α) Για την περίπτωση που I_1=2Α θα έχουμε για την τάση $V_{ΒΓ}$, θεωρώντας ότι $V_{ΒΓ}=V_Β-V_Γ>0$:



$$-I_1R_1 - V_{B\Gamma} + E - I_1 r = 0 \rightarrow V_{B\Gamma} = E - I_1 r - I_1 R_1 \rightarrow$$
$$V_{B\Gamma} = 30V - 2\cdot 2V - 2\cdot 8V = 10V$$

Το θετικό αποτέλεσμα επιβεβαιώνει ότι η υπόθεσή μας ότι $V_{B\Gamma}$ ήταν σωστή.

Αλλά τότε, ό,τι και να έχει το κουτί, η ενέργεια των φορτίων μετακινούμενα από το Β στο Γ μειώνεται, πράγμα που σημαίνει ότι το κουτί ΔΕΝ δίνει ενέργεια στο ρεύμα, αλλά απορροφά ενέργεια από αυτό. Έτσι η ισχύς μπορεί να θεωρηθεί αρνητική με τιμή:

$$P_K = -V_{B\Gamma}\cdot I_1 = -10V\cdot 2A = -20W$$

Προφανώς αν μας ζητούσαν την ισχύ που **καταναλώνει** το κουτί θα απαντούσαμε ότι P=20W!!!

Και αν διαγράφαμε το κύκλωμα με αντίθετη φορά ΑΓΒΑ, τι θα βρίσκαμε αν υποθέταμε ξανά ότι $V_{B\Gamma}>0$;

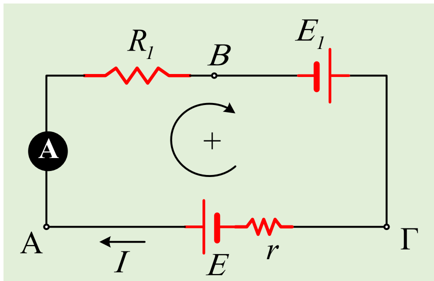
$$-E + I_1 r + V_{B\Gamma} + I_1 R_1 = 0 \rightarrow$$
$$V_{B\Gamma} = 30V - 2\cdot 2V - 2\cdot 8V = 10V$$

Προφανώς το ίδιο αποτέλεσμα…

β) Αν τώρα $I=I_2=4$ A, δουλεύοντας όπως παραπάνω, θα πάρουμε από τον 2^o Κ.Κ, κατά την διαδρομή ΑΓΒΑ και θεωρώντας ξανά ότι $V_{B\Gamma}>0$:

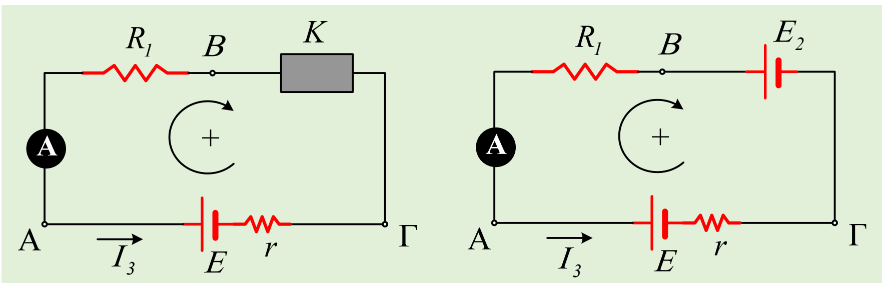
$$-I_1R_1 - V_{B\Gamma} + E - Ir = 0 \rightarrow V_{B\Gamma} = E - I_1 r - I_1 R_1 \rightarrow$$
$$V_{B\Gamma} = 30V - 4\cdot 2V - 4\cdot 8V = -10V$$

Το αποτέλεσμα μας λέει ότι $V_B<V_\Gamma$, πράγμα που σημαίνει ότι δεν εμφανίζεται «πτώση τάσης» μεταξύ Β και Γ, αλλά ανύψωση δυναμικού, πράγμα που μπορεί να προκαλέσει μια πηγή, όπως στο διπλανό σχήμα. Αλλά τότε αυτή η πηγή, **παρέχει** ενέργεια στο κύκλωμα και θα έχει θετική ισχύ:



$$P_{E_1} = E_1\cdot I_2 = 10V\cdot 4A = 40W$$

ii) Αν το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I=I_3=2$A, αντίθετης φοράς, δουλεύοντας ξανά όπως παραπάνω, θα πάρουμε από τον 2^o Κ.Κ, κατά την διαδρομή ΑΓΒΑ (δεξιό σχήμα παρακάτω) και θεωρώντας ξανά ότι $V_{B\Gamma}>0$ (προσέξτε ότι δεν αλλάζουμε φορά διαγραφής, ενώ θα μπορούσαμε να …ακολουθήσουμε την φορά του ρεύματος που συνήθως κάνουμε):



$$I_3R_1 - V_{B\Gamma} + Ir + E = 0 \rightarrow V_{B\Gamma} = E + I_1 r + I_1 R_1 \rightarrow$$

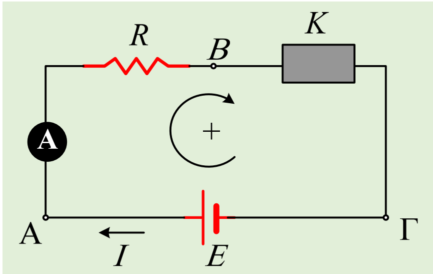
$$V_{B\Gamma} = 30V + 2\cdot 2V + 2\cdot 8V = 50V$$

Η παραπάνω τιμή τάσης $V_{B\Gamma}> 0$ σημαίνει ότι το ηλεκτρικό ρεύμα (συμβατική φορά) πηγαίνει από μικρό δυναμικό (σημείο Γ) σε μεγαλύτερο δυναμικό (σημείο Β), πράγμα που μπορεί να συμβεί μόνο αν το κουτί περιέχει μια πηγή, με πολικότητα, όπως στο δεξιό από τα παραπάνω σχήματα, όπου η πηγή αυτή παρέχει ενέργεια στα φορτία, αυξάνοντας την δυναμική τους ενέργεια.

Αλλά τότε η ισχύς της πηγής αυτής θα είναι ίση:

$$P_{E_2} = E_2 \cdot I_3 = 50V \cdot 2A = 100W$$

Εφαρμογή 3η :



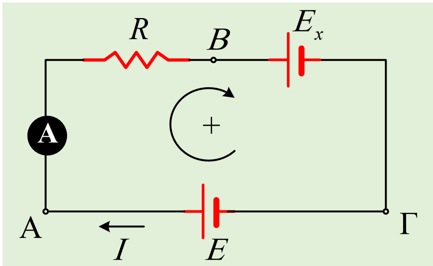
Έστω τώρα έχουμε το κύκλωμα του διπλανού σχήματος, όπου στο κουτί γνωρίζουμε ότι έχει κλειστεί μια ιδανική πηγή, χωρίς εσωτερική αντίσταση, ενώ Ε=20V, R=4Ω και I=3 A.

Να βρεθεί η ΗΕΔ της πηγής στο κουτί, καθώς και η ισχύς της.

Απάντηση:

Εφαρμόζουμε τον 2ο Κ.Κ. του Kirchhoff στο κύκλωμα διαγράφοντάς το κατά την διαδρομή ΑΒΓΑ, υποθέτοντας ξανά ότι $V_{B\Gamma}>0$.

$$-IR - V_{B\Gamma} + E = 0 \rightarrow V_{B\Gamma} = E - IR \rightarrow$$
$$V_{B\Gamma} = 20V - 3\cdot 4V = 8V$$



Το αποτέλεσμα μας επιβεβαιώνει ότι πράγματι $V_B>V_\Gamma$, αλλά τότε αν ανοίξουμε το κουτί θα δούμε να εμφανίζεται η πηγή (μια μπαταρία που φορτίζεται…), όπως στο διπλανό σχήμα.

Αλλά η παραπάνω μπαταρία φορτίζεται, δεν δίνει ενέργεια στο ρεύμα, αντίθετα παίρνει ενέργεια την οποία αποθηκεύει και τότε αν η ισχύς της πηγής Ε θεωρείται θετική και ίση με P=E·I, η ισχύς της E_x θα θεωρηθεί αρνητική, αφού διαρρέεται από ρεύμα αντίθετης φοράς, από αυτήν που τείνει να δώσει.

$$P_{E_x} = -E_x \cdot I = -8V \cdot 3A = -24W$$

Θεωρώντας ότι Ε>0, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι E_x=-8V, οπότε και πάλι $P_{Ex}=E_x\cdot I$=-24W.

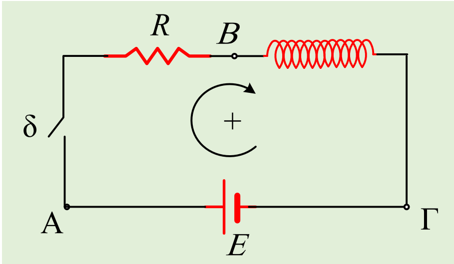
Αν θέλουμε, μπορούμε να ελέγξουμε την διατήρηση της ενέργειας:

Η πηγή Ε δίνει ενέργεια στο κύκλωμα με ρυθμό P=E·I=60W, ένα μέρος μετατρέπεται σε θερμότητα στον αντιστάτη με ρυθμό $P_Q=I^2R=3^2\cdot 4W$=36W και τα υπόλοιπα 24W αποθηκεύονται στην μπαταρία.

Και τώρα ήρθε η ώρα να .. .**τραβήξουμε την κουρτίνα!**

Εφαρμογή 4η :

Έστω τώρα έχουμε το κύκλωμα του διπλανού σχήματος, όπου το ιδανικό πηνίο έχει αυτεπαγωγή L=2mH, ο αντιστάτης αντίσταση R=2Ω και η πηγή E=20V. Κλείνουμε το διακόπτη δ για t=0, οπότε μετά από λίγο η ένταση του ρεύματος παίρνει την τιμή i_1=6 A. Για την στιγμή αυτή να βρεθούν:

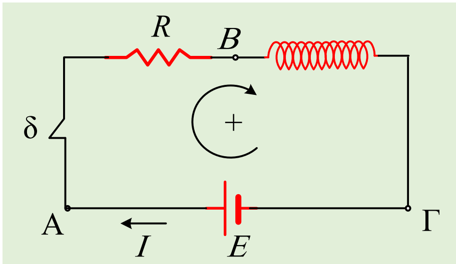


i) Η τάση ΒΓ, καθώς και η απόλυτη τιμή της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή στο πηνίο. Ποια η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή;

ii) Ποια η ισχύς του πηνίου και πόση η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου.

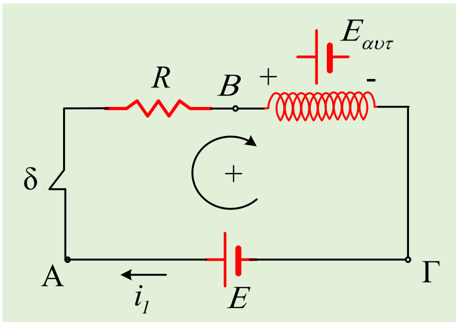
Απάντηση:

i) Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πηνίο σαν ένα μαύρο κουτί, που δεν ξέρουμε ποια πολικότητα έχει η ιδανική πηγή που περιέχει. Έτσι δουλεύουμε όπως στην προηγούμενη εφαρμογή και εφαρμόζουμε τον 2ο Κ.Κ. του Kirchhoff στο κύκλωμα διαγράφοντάς το κατά την διαδρομή ΑΒΓΑ, υποθέτοντας ξανά ότι $V_{ΒΓ}$>0.



$$-IR - V_{B\Gamma} + E = 0 \rightarrow V_{B\Gamma} = E - IR \rightarrow$$
$$V_{B\Gamma} = 20V - 3\cdot 4V = 8V$$

Τι σημαίνει η θετική τιμή της τάσης $V_{ΒΓ}$; Ότι η εμφανιζόμενη ΗΕΔ λόγω επαγωγής στο πηνίο, έχει τον θετικό της πόλο στο άκρο του πηνίου που συνδέεται με το σημείο Β, δηλαδή το ισοδύναμο κύκλωμα είναι αυτό του διπλανού σχήματος. Αλλά τότε η απόλυτη τιμή της ΗΕΔ λόγω αυτεπαγωγής θα είναι:



$$|E_{\alpha\upsilon\tau}| = |V_{B\Gamma}| = 8V$$

Και η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή;

Ας προσέξουμε ποια φορά διαγραφής θεωρήσαμε θετική! Με βάση αυτήν την φορά, η ΗΕΔ της πηγής θεωρείται θετική, όπως θετική θεωρείται και η ένταση του ρεύματος i_1. Αλλά τότε η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή η οποία έχει αντίθετη πολικότητα θα θεωρηθεί αρνητική, οπότε:

$$E_{\alpha\upsilon\tau} = -8V = -L\frac{di}{dt}$$

ii) Η ισχύς του πηνίου, θα είναι ίση με την ισχύ της «πηγής» $E_{αυτ}$:

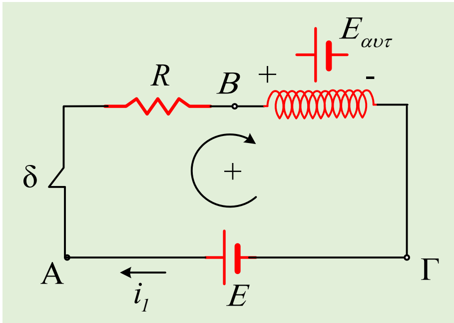
$$P_{\pi} = P_L = E_{\alpha\upsilon\tau}\cdot i_1 = -8V\cdot 6A = -48W$$

Όπου η αρνητική τιμή της σημαίνει ότι το πηνίο απορροφά ενέργεια από το ηλεκτρικό ρεύμα, αποθηκεύοντάς την στο εσωτερικό του με την μορφή της ενέργειας μαγνητικού πεδίου.

Τέλος η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου είναι ίση:

$$U_L = \frac{1}{2}Li_1^2 = \frac{1}{2}2 \cdot 10^{-3} \cdot 6^2 J = 0,036 J$$

Και τελικά μια πρόταση:



Όταν έχουμε ένα κύκλωμα με πηνίο, όπως στο τελευταίο παράδειγμα, μπορούμε να δουλέψουμε εφαρμόζοντας τον 2ο κανόνα του Kirchhoff με διάφορες παραλλαγές.

Για να μην χαθούμε στις λεπτομέρειες και στις παραλλαγές, μπορούμε να ορίσουμε θετική την όποια ένταση του ρεύματος (άρα λαμβάνουμε ως θετική την αντίστοιχη φορά διαγραφής), οπότε γράφουμε, χωρίς άλλη συζήτηση την εξίσωση:

$$E - iR + E_{αυτ} = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{E - iR - L\frac{di}{dt} = 0}$$

Χωρίς να ψάχνουμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του Lenz για να βρούμε την πολικότητα της $E_{αυτ}$ ή χωρίς να ασχολούμαστε με το αν ο ρυθμός $\frac{di}{dt}$ είναι θετικός ή αρνητικός…

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης