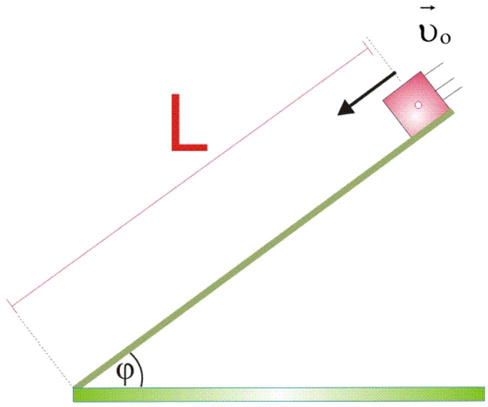
Κάθοδος και άνοδος στον ίδιο χρόνο!

Από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου μήκους L = 2 m και αγνώστου γωνίας κλίσεως εκτοξεύεται προς τα κάτω σώμα βάρους 50 N με αρχική ταχύτητα $υ_ο$ = 2 m/s. Διαπιστώνεται ότι μετά από μισό δευτερόλεπτο το σώμα βρίσκεται στο μέσο του κεκλιμένου επιπέδου.

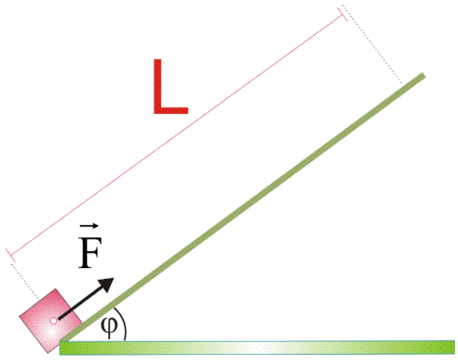


α. Το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο ή όχι; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

β. Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το κεκλιμένο επίπεδο στη διάρκεια της καθοδικής του κίνησης;

γ. Αν το μέτρο της κάθετης δύναμης στήριξης που ασκείται στο σώμα είναι ίσο με 40 N, να βρείτε πόσο είναι το μέτρο της δύναμης της τριβής ολίσθησης.

Το ίδιο σώμα τοποθετείται στη βάση του ίδιου κεκλιμένου επιπέδου και τη χρονική στιγμή t = 0 του ασκείται σταθερή δύναμη $\vec{F}$ παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο. Διαπιστώνεται ότι φτάνει στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου μετά από χρόνο Δt. Ο χρόνος ανόδου του είναι ίδιος με το χρόνο που χρειάστηκε στην προηγούμενη καθοδική του κίνηση για να φτάσει από την κορυφή στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.



δ. Αλλάζει το μέτρο της δύναμης που ασκείται στο σώμα από το κεκλιμένο επίπεδο στη διάρκεια της ανοδικής του κίνησης; Αλλάζει η κατεύθυνσή της; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

ε. Πόση είναι η κινητική ενέργεια του του σώματος τη στιγμή που φτάνει στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου;

στ. Πόση ενέργεια προσέφερε η δύναμη $\vec{F}$ στην ανοδική κίνηση του σώματος μέχρι να φτάσει στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου;

ζ. Πόσο είναι το έργο του βάρους κατά την ανοδική κίνηση του σώματος μέχρι να φτάσει στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου;

Δίνεται g = 10 m/s^2. Θεωρήστε αμελητέα την αντίσταση του αέρα.

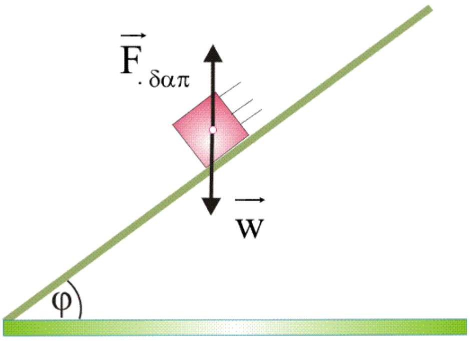
Λύση

α. Για την καθοδική κίνηση του σώματος θα ισχύει:

$$\Delta x = \upsilon_o \cdot \Delta t + ½\, \alpha \cdot (\Delta t)^2$$

όπου $\upsilon_o = 2$ m/s. Επειδή όμως μετά από χρόνο $\Delta t = 0{,}5$ s το σώμα στο κεκλιμένο έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = L/2 = 1$ m, αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει $\alpha = 0$, δηλαδή το σώμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά. Αυτό σημαίνει ότι στον άξονα της κίνησης, εκτός από τη συνιστώσα $\vec{w}_x$ του βάρους θα πρέπει να ασκείται και κάποια άλλη δύναμη προκειμένου να ισχύει $\Sigma F_x = 0$. Η μόνη δύναμη που μπορεί να υπάρχει είναι η τριβή ολίσθησης **επομένως το κεκλιμένο επίπεδο δεν είναι λείο.**

β. Στο σώμα εκτός από το βάρος του ασκείται και η δύναμη από το δάπεδο $\left(\vec{F}_{\delta\alpha\pi.}\right)$ (που αναλύεται στις συνιστώσες της κάθετη δύναμη στήριξης $\vec{N}$ και τριβή ολίσθησης $\vec{T}$). Επειδή όμως το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα θα πρέπει:



$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{w} + \vec{F}_{\delta\alpha\pi} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\delta\alpha\pi} = -\vec{w} \quad (1)$$

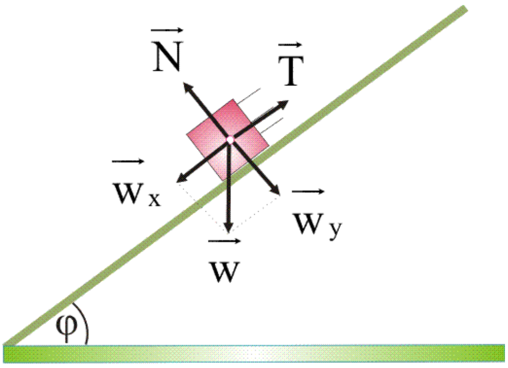
Δηλαδή η δύναμη από το δάπεδο είναι αντίθετη από το βάρος του σώματος, οπότε έχει αντίθετη κατεύθυνση και μέτρο ίσο με:

$$\mathbf{F_{\delta\alpha\pi.} = w = mg = 50\ N}$$

γ. Αναλύοντας τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στους άξονες προκύπτει για καθέναν από αυτούς λόγω ισορροπίας και ευθύγραμμης ομαλής κίνησης:

$$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; N = w_y = 40\ N \;(1)$$

$$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; T = w_x \;\;(2)$$

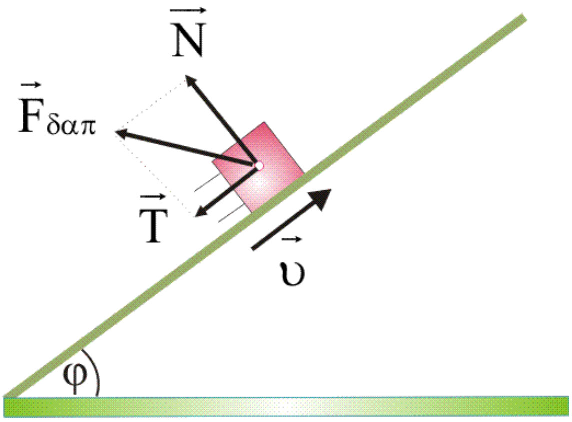


Όμως από την ανάλυση του βάρους του σώματος, προκύπτει:

$$w = \sqrt{w_x^{\,2} + w_y^{\,2}} \Rightarrow w_x = \sqrt{w^2 - w_y^{\,2}} = 30\ N$$

Σύμφωνα λοιπόν με τη σχέση (2) η τριβή ολίσθησης θα έχει μέτρο **T = 30 N.**

δ. Το σώμα και κατά την κάθοδό του αλλά και κατά την άνοδό του δέχεται από το δάπεδο τις ίδιου μέτρου δυνάμεις: Δηλαδή κάθετη δύναμη στήριξης N = 40 N και τριβή ολίσθησης T = 30 N. Επομένως **το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το κεκλιμένο επίπεδο θα είναι ίδιο** τόσο στην άνοδο όσο και στην κάθοδο, αφού $F_{δαπ.} = \sqrt{N^2 + T^2}$. Επομένως:



$$\mathbf{F_{δαπ.} = 50\ N}$$

Όμως η αλλαγή της κατεύθυνσης κίνησης, έχει ως αποτέλεσμα και την αλλαγή της κατεύθυνσης της τριβής ολίσθησης, οπότε **η κατεύθυνση της δύναμης που δέχεται το σώμα από το κεκλιμένο επίπεδο αλλάζει,** όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα.

ε. Το σώμα κατεβαίνοντας και εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, χρειάστηκε μισό δευτερόλεπτο μέχρι να φτάσει στη μέση του κεκλιμένου επιπέδου. Άρα μέχρι τη βάση του κεκλιμένου θα χρειαστεί διπλάσιο χρόνο, σύμφωνα με τη σχέση Δx = υΔt. Επομένως ο χρόνος καθόδου του σώματος είναι Δt = 1 s.

Στον ίδιο χρόνο το σώμα φτάνει στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου.

Επομένως:

$$Δx = ½\ α\cdot(Δt)^2 \Rightarrow α = \frac{2\cdot Δx}{Δt^2} = \frac{2\cdot 2}{1^2}\ m/s^2 \Rightarrow α = 4\ m/s^2.$$

Η ταχύτητα του σώματος είναι υ = αt = 4 m/s και η κινητική του ενέργεια:

$$K = ½\ m\cdot υ^2 = (½ \cdot 5 \cdot 4^2)\ J \Rightarrow \mathbf{K = 40\ J}$$

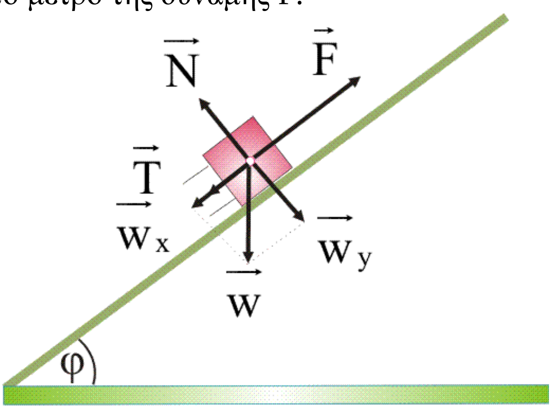
στ. Το ζητούμενο έργο της δύναμης F είναι:

$$W_F = F \cdot Δx$$

Οπότε για τον υπολογισμό του αρκεί να βρούμε το μέτρο της δύναμης F.

Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα θα είναι:

$$ΣF = mα \Rightarrow F - T - w_x = mα \Rightarrow F = T + w_x + mα \Rightarrow F = 80\ N$$



Επομένως το ζητούμενο έργο της δύναμης είναι:

$$W_F = F \cdot Δx = (80 \cdot 2)\ J \Rightarrow \mathbf{W_F = 160\ J}$$

ζ. Για τον υπολογισμό του έργου του βάρους εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από τη βάση ως την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου. Είναι:

$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F + W_T + W_w \Rightarrow 40\ J - 0 = 160\ J - 60\ J + W_w \Rightarrow \mathbf{W_w = -60\ J}$

όπου το έργο της τριβής ολίσθησης είναι $W_T = -T\cdot \Delta x = -60$ J.

Σχόλιο: *Το έργο του βάρους κατά την ανοδική κίνηση του σώματος θα μπορούσε να υπολογιστεί και από τη σχέση $W_w = -wh$ ή $W_w = -mg(\eta\mu\varphi)x$. Φαινομενικά δεν γνωρίζουμε το ύψος h, ούτε το ημφ. Θα μπορούσαμε βέβαια να προσδιορίσουμε το ημφ χρησιμοποιώντας τις συνιστώσες του βάρους και την ανάλυση του βάρους. Προτιμήθηκε η λύση του Θ.Μ.Κ.Ε.*

Επιμέλεια
Νεκτάριος Πρωτοπαπάς
nprotopapas@avgouleaschool.gr