Έργα και ενεργειακές μετατροπές: Δέκα απλές εφαρμογές πριν τη διατύπωση του Θεωρήματος Έργου – Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.)

Για την παρουσίαση των παρακάτω εφαρμογών θεωρούνται γνωστά:

α. Ο ορισμός έργου σταθερής δύναμης

β. Το έργο μιας εξωτερικής δύναμης εκφράζει μηχανισμό μεταβίβασης ενέργειας από το σώμα που ασκεί τη δύναμη, στο σώμα που τη δέχεται.

γ. Η κινητική και η βαρυτική δυναμική ενέργεια

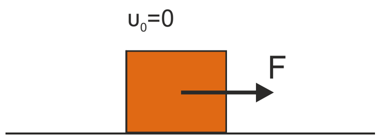
δ. Το έργο της τριβής ολίσθησης (εφόσον εμποδίζει την ολίσθηση) εκφράζει την ενέργεια που ‘χάνεται’ από ένα σώμα και μετατρέπεται σε θερμική.

ε. Το έργο του βάρους είναι ανεξάρτητο της ακολουθούμενης διαδρομής μεταξύ δύο θέσεων ενός σώματος και σχετίζεται με τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος. Δηλαδή $W_B = -\Delta U_{BAP}$

Επίσης σε όλα τα παρακάτω η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει μέτρο $g=10m/s^2$.

Εφαρμογή 1

Α. Ένα κιβώτιο μάζας m=2kg είναι αρχικά ακίνητο στη θέση $x_0=0$ λείου οριζόντιου δαπέδου. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το κιβώτιο δέχεται μια οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ μέτρου F=4N. Να υπολογίσετε μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1=2s$:

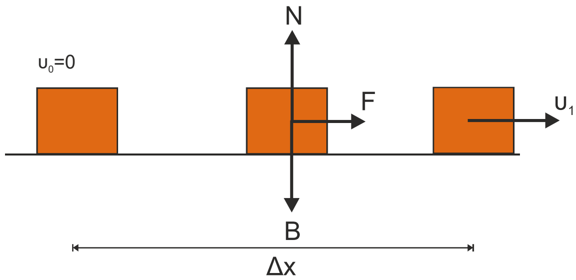


α. τα έργα των δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται στο κιβώτιο

β. τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κιβωτίου

Απάντηση

α. Το έργο του βάρους και της δύναμης στήριξης είναι ίσα με μηδέν, διότι οι δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση του κιβωτίου.



Είναι

$\Sigma \vec{F}_x = m \cdot \vec{\alpha} \rightarrow F = m \cdot \alpha \rightarrow \alpha = 2m/s^2$ Μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1=2s$ το κιβώτιο θα έχει μετατοπιστεί κατά

$$\Delta x = \frac{1}{2}\alpha \cdot \Delta t^2 \xrightarrow{\Delta t = t_1 - t_0} \Delta x = 4m$$

Έτσι το έργο της δύναμης $\vec{F}$ θα είναι

$$W_F = F \cdot \Delta x \rightarrow W_F = 16J$$

Κατά συνέπεια μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$ μεταβιβάστηκαν στο κιβώτιο 16J ενέργειας.

β. Είναι $K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m \cdot \upsilon_0^2 \rightarrow K_{\alpha\rho\chi} = 0$

Η ταχύτητα του κιβωτίου τη χρονική στιγμή t_1 θα έχει μέτρο

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 + \alpha \cdot \Delta t \xrightarrow{\Delta t = t_1 - t_0} \upsilon_1 = 4m/s$$

Έτσι η κινητική ενέργεια του κιβωτίου τη χρονική στιγμή t_1 είναι

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m \cdot \upsilon_1^2 \rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} = 16J$$

και η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κιβωτίου μέχρι τη στιγμή t_1 είναι

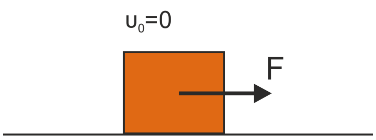
$$\Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \rightarrow \Delta K = 16J$$

Έτσι η ενέργεια που μεταβιβάστηκε στο κιβώτιο μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$, μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια του κιβωτίου. Ισχύει δηλαδή

$$\Delta K = W_F$$

Εφαρμογή 2

Ένα κιβώτιο μάζας m=2kg είναι αρχικά ακίνητο στη θέση x_0=0 οριζόντιου δαπέδου, με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,2. Τη χρονική στιγμή t_0=0 το κιβώτιο δέχεται μια οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ μέτρου F=6N. Να υπολογίσετε μέχρι τη χρονική στιγμή t_1=2s:



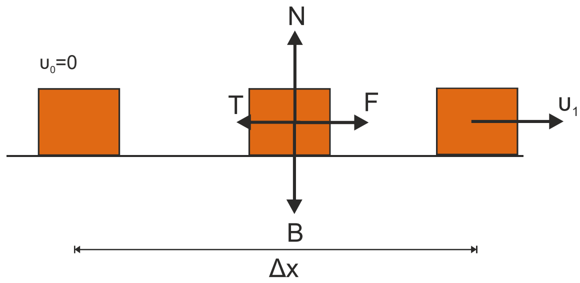
α. τα έργα των δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται στο κιβώτιο

β. τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κιβωτίου

Απάντηση

α. Το έργο του βάρους και της δύναμης στήριξης είναι ίσα με μηδέν, διότι οι δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση του κιβωτίου. Είναι

$$\Sigma\vec{F_y} = 0 \rightarrow N - B = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow N = B \rightarrow N = mg \rightarrow N = 20N$$



Το μέτρο της τριβής ολίσθησης θα είναι $T = \mu N \rightarrow T = 4N$

Είναι $\Sigma\vec{F_x} = m \cdot \vec{\alpha} \rightarrow F - T = m \cdot \alpha \rightarrow \alpha = 1m/s^2$

Μέχρι τη χρονική στιγμή t_1=2s το κιβώτιο θα έχει μετατοπιστεί κατά

$$\Delta x = \frac{1}{2}\alpha \cdot \Delta t^2 \xrightarrow{\Delta t = t_1 - t_0} \Delta x = 2m$$

Έτσι το έργο της δύναμης $\vec{F}$ θα είναι

$$W_F = F \cdot \Delta x \rightarrow W_F = 12J$$

Κατά συνέπεια, μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$ μεταβιβάστηκαν στο κιβώτιο 12J ενέργειας.

Το έργο της τριβής θα είναι

$$W_T = -T \cdot \Delta x \rightarrow W_T = -8J$$

Κατά συνέπεια, μέσω του έργου της τριβής, αφαιρέθηκαν από το κιβώτιο 8J ενέργειας και μετατράπηκαν σε θερμική ενέργεια. (Λόγω της τριβής αυξήθηκε η θερμοκρασία του κιβωτίου και του εδάφους, με συνέπεια η άτακτη κίνηση των μορίων τους να γίνει πιο έντονη, οπότε τα μόρια έχουν μεγαλύτερη κινητική ενέργεια τη στιγμή t_1 σε σχέση με τη στιγμή t_0=0).

β. Είναι $K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m \cdot \upsilon_0^2 \rightarrow K_{\alpha\rho\chi} = 0$

Η ταχύτητα του κιβωτίου τη χρονική στιγμή t_1 θα έχει μέτρο

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 + \alpha \cdot \Delta t \xrightarrow{\Delta t = t_1 - t_0} \upsilon_1 = 2m/s$$

Έτσι η κινητική ενέργεια του κιβωτίου τη χρονική στιγμή t_1 είναι

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m \cdot \upsilon_1^2 \rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} = 4J$$

και η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κιβωτίου μέχρι τη στιγμή t_1 είναι

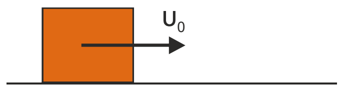
$$\Delta K = K_{τελ} - K_{αρχ} \rightarrow \Delta K = 4J$$

Έτσι η ενέργεια (12J) που μεταβιβάστηκε στο σώμα μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$, κατά ένα μέρος μετατράπηκε σε θερμική μέσω του έργου της τριβής (8J), ενώ το υπόλοιπο (4J) μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια του σώματος, μέσω του συνολικού έργου των δυνάμεων. Ισχύει δηλαδή

$$\Delta K = W_F + W_T$$

Εφαρμογή 3

Ένα κιβώτιο μάζας m=2kg είναι αρχικά ακίνητο στη θέση x_0=0 οριζόντιου δαπέδου, με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,2. Τη χρονική στιγμή t_0=0 το κιβώτιο εκτοξεύεται με οριζόντια αρχική ταχύτητα μέτρου $υ_0$=4m/s. Να υπολογίσετε μέχρι τη στιγμή που το κιβώτιο ακινητοποιείται:

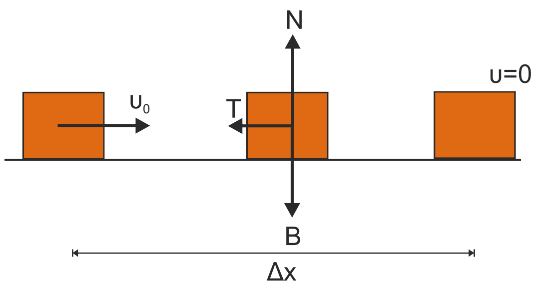


α. τα έργα των δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται στο κιβώτιο

β. τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κιβωτίου

Απάντηση

α. Το έργο του βάρους και της δύναμης στήριξης είναι ίσα με μηδέν, διότι οι δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση του κιβωτίου.



Είναι

$$\Sigma \vec{F_y} = 0 \rightarrow N - B = 0 \rightarrow N = B \rightarrow N = mg \rightarrow N = 20N$$

Το μέτρο της τριβής ολίσθησης θα είναι $T = \mu N \rightarrow T = 4N$

Είναι $\Sigma \vec{F_x} = m \cdot \vec{\alpha} \rightarrow -T = m \cdot \alpha \rightarrow \alpha = -2m/s^2$

Το κιβώτιο σταματά τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία υ=0

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha \cdot \Delta t \xrightarrow{\Delta t = t_1 - t_0} 0 = 4 - 2t_1 \rightarrow t_1 = 2s$$

και μετατοπίζεται μέχρι τότε κατά

$$\Delta x = \upsilon_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\alpha \cdot \Delta t^2 \xrightarrow{\Delta t = t_1 - t_0} \Delta x = 4m$$

Έτσι το έργο της τριβής ολίσθησης θα είναι

$$W_T = -T \cdot \Delta x \rightarrow W_T = -16J$$

Κατά συνέπεια, μέσω του έργου της τριβής αφαιρέθηκαν από το κιβώτιο 16J ενέργειας και μετατράπηκαν σε θερμική ενέργεια. (Λόγω της τριβής αυξήθηκε η θερμοκρασία του κιβωτίου και του εδάφους, με συνέπεια η άτακτη κίνηση των μορίων τους να γίνει πιο έντονη, οπότε τα μόρια έχουν μεγαλύτερη κινητική ενέργεια τη στιγμή t_1 σε σχέση με τη στιγμή t_0=0).

β. Είναι $K_{αρχ} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_0^2 \rightarrow K_{αρχ} = 16J$ και

$$K_{τελ} = 0J$$

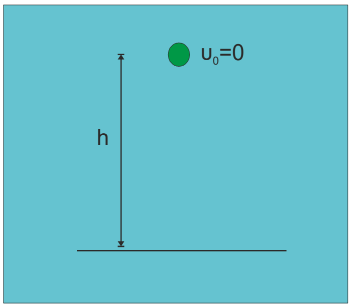
οπότε η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος μέχρι να ακινητοποιηθεί είναι

$$\Delta K = K_{τελ} - K_{αρχ} \rightarrow \Delta K = -16J$$

Έτσι η κινητική ενέργεια του κιβωτίου μειώθηκε μέσω του έργου της τριβής κατά 16J και μετατράπηκε σε θερμική. Ισχύει δηλαδή

$$\Delta K = W_T$$

Εφαρμογή 4



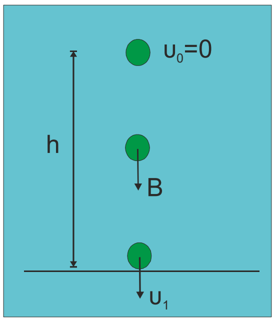
Ένα σώμα μάζας m=1kg αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ύψος h=5m τη στιγμή t_0=0. Να υπολογίσετε μέχρι τη στιγμή που το σώμα φτάνει στο έδαφος:

α. τα έργα των δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται στο σώμα

β. τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος

Απάντηση

α. Στο σώμα ασκείται μόνο το βάρος, του οποίου το έργο είναι



$$W_B = B \cdot h \to W_B = m \cdot g \cdot h \to W_B = 50J$$

Κατά συνέπεια, εφόσον $W_B = -\Delta U_{BAP}$, κατά την πτώση του σώματος, η βαρυτική δυναμική του ενέργεια ελαττώθηκε κατά 50J.

β. Είναι $K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_0^2 \to K_{\alpha\rho\chi} = 0J$

Το σώμα φτάνει στο έδαφος τη στιγμή t_1, για την οποία είναι

$$\Delta y = \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2 \xrightarrow{\Delta t = t_1 - t_0} h = \frac{1}{2} g \cdot t_1^2 \to t_1 = 1s$$

με ταχύτητα μέτρου

$$\upsilon_1 = g \cdot \Delta t \xrightarrow{\Delta t = t_1 - t_0} \upsilon_1 = 10m/s$$

Επομένως η τελική κινητική του ενέργεια είναι $K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_1^2 \to K_{\tau\varepsilon\lambda} = 50J$

οπότε η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος μέχρι να φτάσει στο έδαφος είναι

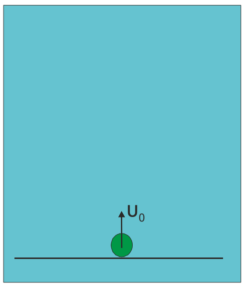
$$\Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \to \Delta K = 50J$$

Έτσι η βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος ελαττώθηκε κατά 50J, μέσω του έργου του βάρους και μετατράπηκε σε κινητική. Ισχύει δηλαδή

$$\Delta K = W_B \text{ ή } \Delta K = -\Delta U_{BAP}$$

Εφαρμογή 5

Ένα σώμα μάζας m=0,1kg εκτοξεύεται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα πάνω τη στιγμή t_0=0, με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0=10m/s. Να υπολογιστούν μέχρι τη στιγμή, κατά την οποία το μέτρο της ταχύτητας του σώματος θα έχει υποδιπλασιαστεί:

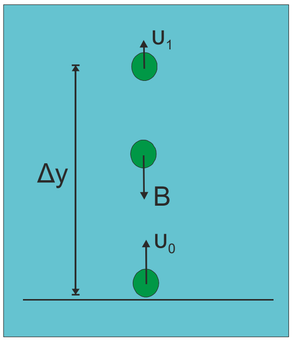


α. τα έργα των δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται στο σώμα

β. τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος

Απάντηση

α. Στο σώμα ασκείται μόνο το βάρος.



Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος θα υποδιπλασιαστεί τη στιγμή t_1, κατά την οποία

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 + g\cdot\Delta t \xrightarrow{\Delta t = t_1 - t_0} 5 = 10 - 10\cdot t_1 \rightarrow t_1 = 0{,}5s$$

και θα έχει μετατοπιστεί κατά

$$\Delta y = \upsilon_0\cdot\Delta t + \frac{1}{2}g\cdot\Delta t^2 \xrightarrow{\Delta t = t_1 - t_0} \Delta y = 3{,}75m$$

Επομένως το έργο του βάρους μέχρι τότε θα είναι

$$W_B = -B\cdot\Delta y \rightarrow W_B = -m\cdot g\cdot\Delta y \rightarrow W_B = -3{,}75J$$

Κατά συνέπεια, εφόσον $W_B = -\Delta U_{BAP}$, κατά την άνοδο του σώματος, η βαρυτική δυναμική του ενέργεια αυξήθηκε κατά 3,75J.

β. Είναι $K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\cdot\upsilon_0^2 \rightarrow K_{\alpha\rho\chi} = 5J$ και

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\cdot\upsilon_1^2 \rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} = 1{,}25J$$

οπότε η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος μέχρι το μέτρο της ταχύτητάς του να υποδιπλασιαστεί είναι

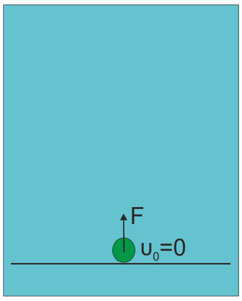
$$\Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \rightarrow \Delta K = -3{,}75J$$

Έτσι η κινητική ενέργεια του σώματος ελαττώθηκε κατά 3,75J, μέσω του έργου του βάρους και μετατράπηκε σε βαρυτική δυναμική ενέργεια. Ισχύει δηλαδή

$$\Delta K = W_B \text{ ή } \Delta K = -\Delta U_{BAP}$$

Εφαρμογή 6

Ένα σώμα μάζας m=1kg βρίσκεται ακίνητο σε οριζόντιο έδαφος. Τη στιγμή t_0=0 ασκείται στο σώμα κατακόρυφη δύναμη μέτρου F=15N προς τα πάνω. Να υπολογίσετε μέχρι τη στιγμή t_1=10s:

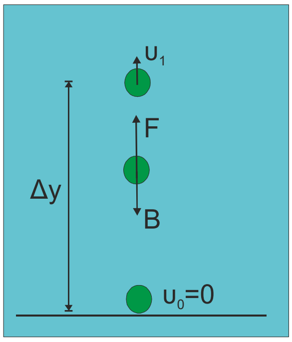


α. τα έργα των δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται στο σώμα

β. τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος

Απάντηση

α. Είναι



$$\Sigma\vec{F_y}=m\cdot\vec{\alpha}\rightarrow F-B=m\cdot\alpha\rightarrow F-m\cdot g=m\cdot\alpha\rightarrow\alpha=5m/s^2$$

Το κιβώτιο τη χρονική στιγμή t_1 θα έχει μετατοπιστεί κατά

$$\Delta y=\frac{1}{2}\alpha\cdot\Delta t^2\xrightarrow{\Delta t=t_1-t_0}\Delta y=250m$$

Το έργο της δύναμης μέχρι τότε θα είναι

$$W_F=F\cdot\Delta y\rightarrow W_F=3750J$$

οπότε μεταβιβάστηκαν στο σώμα, μέσω του W_F, 3750J ενέργειας.

Το έργο του βάρους μέχρι τότε θα είναι

$$W_B=-B\cdot\Delta y\rightarrow W_B=-m\cdot g\cdot\Delta y\rightarrow W_B=-2500J$$

Κατά συνέπεια, εφόσον $W_B=-\Delta U_{BAP}$, κατά την άνοδο του σώματος, η βαρυτική δυναμική του ενέργεια αυξήθηκε κατά 2500J.

β. Είναι $K_{\alpha\rho\chi}=0J$

Τη στιγμή t_1 η ταχύτητα του σώματος θα έχει μέτρο

$$\upsilon_1=\alpha\cdot\Delta t\xrightarrow{\Delta t=t_1-t_0}\upsilon_1=50m/s$$

Επομένως η τελική κινητική του ενέργεια είναι

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_1^2\rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda}=1250J$$

οπότε η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος μέχρι τη στιγμή t_1 θα είναι

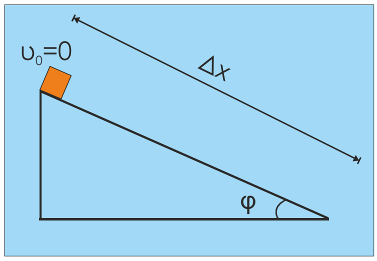
$$\Delta K=K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}\rightarrow\Delta K=1250J$$

Έτσι στο σώμα μεταβιβάστηκαν 3750J, μέσω του έργου της δύναμης, εκ των οποίων τα 2500J μετατράπηκαν σε βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος, μέσω του έργου του βάρους και τα υπόλοιπα 1250J σε κινητική, μέσω του συνολικού έργου των δυνάμεων. Ισχύει δηλαδή

$$\Delta K = W_F + W_B \text{ ή } W_F = \Delta K + \Delta U_{BAP}$$

Εφαρμογή 7

Ένα σώμα μάζας m=1kg αφήνεται τη στιγμή $t_0=0$, από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου μήκους Δx=2m και γωνίας κλίσης φ, με $\eta\mu\varphi = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Να υπολογίσετε μέχρι τη στιγμή που το σώμα φτάνει στη βάση του κεκλιμένου:



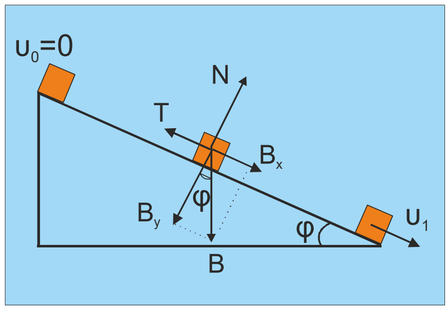
α. τα έργα των δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται στο σώμα

β. τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος

Απάντηση

α. Είναι

$$\Sigma \vec{F}_y = 0 \rightarrow N - B_y = 0 \rightarrow N = B_y \rightarrow$$
$$\rightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow N = 5\sqrt{3}N$$



Το μέτρο της τριβής ολίσθησης θα είναι $T = \mu N \rightarrow T = 2{,}5N$

Το έργο του βάρους μέχρι τη βάση θα είναι

$$W_B = B_x \cdot \Delta x \rightarrow W_B = m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \cdot \Delta x \rightarrow W_B = 10J$$

Κατά συνέπεια, εφόσον $W_B = -\Delta U_{BAP}$, κατά την κάθοδο του σώματος, η βαρυτική δυναμική του ενέργεια μειώθηκε κατά 10J.

Παρατήρηση: Το έργο του βάρους θα μπορούσε να υπολογιστεί και από τη σχέση $W_B = B \cdot h$, όπου h το ύψος του κεκλιμένου επιπέδου, αφού το έργο του βάρους είναι ανεξάρτητο της ακολουθούμενης διαδρομής.

Το έργο της τριβής ολίσθησης μέχρι τη βάση θα είναι

$$W_T = -T \cdot \Delta x \to W_T = -5J$$

Κατά συνέπεια, μέσω του έργου της τριβής αφαιρέθηκαν από το σώμα 5J ενέργειας και μετατράπηκαν σε θερμική ενέργεια.

β. Είναι $K_{αρχ} = \frac{1}{2} m \cdot υ_0^2 \to K_{αρχ} = 0J$

Είναι $\Sigma \vec{F_x} = m \cdot \vec{α} \to B_x - T = m \cdot α \to mgημφ - T = m \cdot α \to α = 2{,}5 m/s^2$

Το σώμα φτάνει στη βάση του κεκλιμένου τη στιγμή t_1, για την οποία είναι

$$\Delta x = \frac{1}{2} α \cdot \Delta t^2 \xrightarrow{\Delta t = t_1 - t_0} \Delta x = \frac{1}{2} α \cdot t_1^2 \to t_1 = \sqrt{\frac{4}{2{,}5}} s$$

με ταχύτητα μέτρου

$$υ_1 = α \cdot \Delta t \xrightarrow{\Delta t = t_1 - t_0} υ_1 = \sqrt{10} m/s$$

Επομένως η τελική κινητική του ενέργεια είναι

$$K_{τελ} = \frac{1}{2} m \cdot υ_1^2 \to K_{τελ} = 5J$$

οπότε η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος μέχρι να φτάσει στο έδαφος είναι

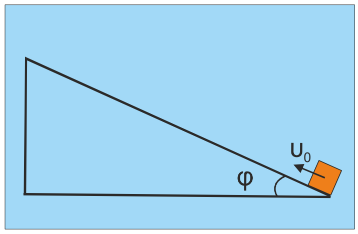
$$\Delta K = K_{τελ} - K_{αρχ} \to \Delta K = 5J$$

Έτσι η βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος ελαττώθηκε κατά 10J, μέσω του έργου του βάρους και μετατράπηκε κατά 5J σε θερμική μέσω του έργου της τριβής και κατά 5J σε κινητική ενέργεια, μέσω του συνολικού έργου των δυνάμεων. Ισχύει δηλαδή

$$\Delta K = W_B + W_T$$

Εφαρμογή 8

Ένα σώμα μάζας m=1kg εκτοξεύεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου προς τα πάνω τη στιγμή $t_0=0$, με αρχική ταχύτητα μέτρου $υ_0=7{,}5m/s$, παράλληλα με το επίπεδο. Το κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης φ με $ημφ=\frac{1}{2}$, $συνφ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ενώ ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $μ=\frac{\sqrt{3}}{6}$. Να υπολογιστούν μέχρι τη στιγμή, κατά την οποία το σώμα θα σταματήσει στιγμιαία:



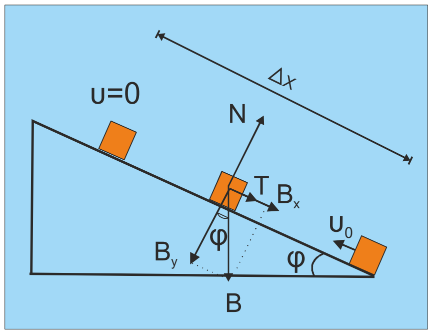
α. τα έργα των δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται στο σώμα

β. τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος

Απάντηση

α. Είναι

$$\Sigma \vec{F}_y=0 \rightarrow N-B_y=0 \rightarrow N=B_y \rightarrow$$
$$\rightarrow N=mgσυνφ \rightarrow N=5\sqrt{3}N$$



Το μέτρο της τριβής ολίσθησης θα είναι
$T=μN \rightarrow T=2{,}5N$

Είναι $\Sigma\vec{F}_x=m\cdot\vec{α} \rightarrow -B_x-T=m\cdot α \rightarrow -mgημφ-T=m\cdot α \rightarrow α=-7{,}5m/s^2$

Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος θα μηδενιστεί στιγμιαία τη στιγμή t_1, κατά την οποία

$$υ=υ_0+α\cdot Δt \xrightarrow{Δt=t_1-t_0} 0=7{,}5-7{,}5\cdot t_1 \rightarrow t_1=1s$$

και το σώμα θα έχει μετατοπιστεί κατά

$$Δx=υ_0\cdot Δt+\frac{1}{2}α\cdot Δt^2 \xrightarrow{Δt=t_1-t_0} Δx=3{,}75m$$

Επομένως το έργο του βάρους μέχρι τότε θα είναι

$$W_B=-B_x\cdot Δx \rightarrow W_B=-m\cdot g\cdot ημφ\cdot Δx \rightarrow W_B=-18{,}75J$$

Κατά συνέπεια, εφόσον $W_B=-ΔU_{BAP}$, κατά την άνοδο του σώματος, η βαρυτική δυναμική του ενέργεια αυξήθηκε κατά 18,75J.

Παρατήρηση: Το έργο του βάρους θα μπορούσε να υπολογιστεί και από τη σχέση

$W_B = -B \cdot h$, όπου h το ύψος, στο οποίο ανήλθε το σώμα, αφού το έργο του βάρους είναι ανεξάρτητο της ακολουθούμενης διαδρομής.

Το έργο της τριβής ολίσθησης μέχρι τη στιγμή t_1 θα είναι

$$W_T = -T \cdot \Delta x \rightarrow W_T = -9{,}375J$$

Κατά συνέπεια, μέσω του έργου της τριβής αφαιρέθηκαν από το σώμα 9,375J ενέργειας και μετατράπηκαν σε θερμική ενέργεια.

β. Είναι $K_{αρχ} = \frac{1}{2} m \cdot υ_0^2 \rightarrow K_{αρχ} = 28{,}125J$ και

$$K_{τελ} = 0J$$

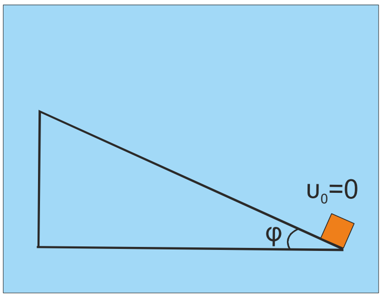
οπότε η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος μέχρι να σταματήσει στιγμιαία είναι

$$\Delta K = K_{τελ} - K_{αρχ} \rightarrow \Delta K = -28{,}125J$$

Έτσι η κινητική ενέργεια του σώματος ελαττώθηκε κατά 28,125J, μέσω του έργου των δυνάμεων και μετατράπηκε σε βαρυτική δυναμική ενέργεια (18,75J), μέσω του έργου του βάρους και σε θερμική ενέργεια (9,375J), μέσω του έργου της τριβής. Ισχύει δηλαδή

$$\Delta K = W_B + W_T$$

Εφαρμογή 9



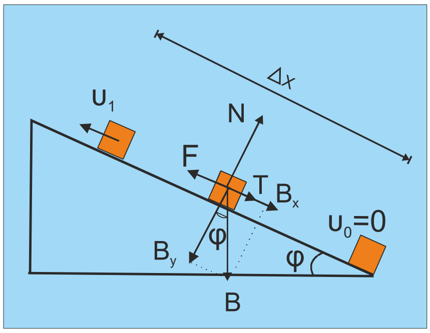
Ένα σώμα μάζας m=1kg βρίσκεται ακίνητο στη βάση κεκλιμένου επιπέδου. Τη στιγμή t_0=0 ασκείται στο σώμα δύναμη μέτρου F=10N, παράλληλη με το επίπεδο προς τα πάνω. Το κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης φ με $ημφ = \frac{1}{2}$, $συνφ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ενώ ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $μ = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Να υπολογίσετε μέχρι τη στιγμή t_1=2s:

α. τα έργα των δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται στο σώμα

β. τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος

Απάντηση

α. Είναι



$$\Sigma \vec{F_y} = 0 \rightarrow N - B_y = 0 \rightarrow N = B_y \rightarrow$$
$$\rightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow N = 5\sqrt{3}N$$

Το μέτρο της τριβής ολίσθησης θα είναι
$T = \mu N \rightarrow T = 2{,}5N$

Είναι
$$\Sigma \vec{F_x} = m \cdot \vec{\alpha} \rightarrow F - B_x - T = m \cdot \alpha \rightarrow F - mg\eta\mu\varphi - T = m \cdot \alpha \rightarrow \alpha = 2{,}5m/s^2$$

Η μετατόπιση του σώματος μέχρι τη στιγμή t_1 θα είναι

$$\Delta x = \frac{1}{2}\alpha \cdot \Delta t^2 \xrightarrow{\Delta t = t_1 - t_0} \Delta x = 5m$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ μέχρι τη στιγμή t_1 θα είναι

$$W_F = F \cdot \Delta x \rightarrow W_F = 50J$$

Επομένως μέσω του έργου της $\vec{F}$ μεταβιβάστηκαν 50J ενέργειας στο σώμα.

Το έργο του βάρους μέχρι τη στιγμή t_1 θα είναι

$$W_B = -B_x \cdot \Delta x \rightarrow W_B = -m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \cdot \Delta x \rightarrow W_B = -25J$$

Κατά συνέπεια, εφόσον $W_B = -\Delta U_{BAP}$, κατά την άνοδο του σώματος, η βαρυτική δυναμική του ενέργεια αυξήθηκε κατά 25J.

Παρατήρηση: Το έργο του βάρους θα μπορούσε να υπολογιστεί και από τη σχέση

$W_B = -B \cdot h$, όπου h το ύψος, στο οποίο ανήλθε το σώμα, αφού το έργο του βάρους είναι ανεξάρτητο της ακολουθούμενης διαδρομής.

Το έργο της τριβής ολίσθησης μέχρι τη στιγμή t_1 θα είναι

$$W_T = -T \cdot \Delta x \rightarrow W_T = -12{,}5J$$

Κατά συνέπεια, μέσω του έργου της τριβής αφαιρέθηκαν από το σώμα 12,5J ενέργειας και μετατράπηκαν σε θερμική ενέργεια.

β. Είναι $K_{\alpha\rho\chi} = 0J$

Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή t_1 θα είναι

$$\upsilon_1 = \alpha \cdot \Delta t \xrightarrow{\Delta t = t_1 - t_0} \upsilon_1 = 2{,}5 \cdot t_1 \rightarrow \upsilon_1 = 5m/s$$

Επομένως η κινητική ενέργεια του σώματος τη στιγμή t_1 θα είναι

$$K_{τελ} = \frac{1}{2} m \cdot υ_1^2 \to K_{τελ} = 12{,}5J$$

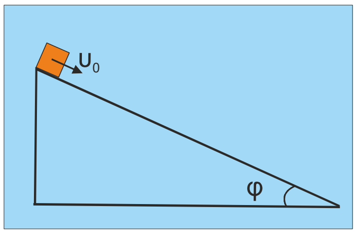
οπότε η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος μέχρι να σταματήσει στιγμιαία είναι $ΔK = K_{τελ} - K_{αρχ} \to ΔK = 12{,}5J$

Έτσι μεταβιβάστηκαν στο σώμα 50J, μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$, εκ των οποίων τα 25J μετατράπηκαν σε βαρυτική δυναμική ενέργεια, μέσω του έργου του βάρους, τα 12,5J σε θερμική ενέργεια, μέσω του έργου της τριβής και τα υπόλοιπα 12,5J σε κινητική ενέργεια, μέσω του συνολικού έργου των δυνάμεων. Ισχύει δηλαδή

$$ΔK = W_F + W_B + W_T$$

Εφαρμογή 10

Ένα σώμα μάζας m=1kg εκτοξεύεται από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου προς τα κάτω τη στιγμή $t_0=0$, με αρχική ταχύτητα μέτρου $υ_0=2m/s$, παράλληλα με το επίπεδο. Το κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης φ με $ημφ = \frac{1}{2}, συνφ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ενώ ο συντελεστής τριβής



μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $μ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Να υπολογιστούν μέχρι τη στιγμή $t_1=5s$:

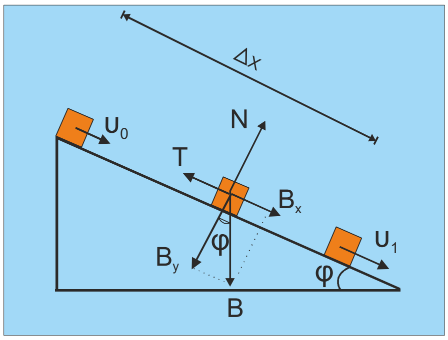
α. τα έργα των δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται στο σώμα

β. τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος

Απάντηση

α. Είναι

$$\Sigma\vec{F_y} = 0 \to N - B_y = 0 \to N = B_y \to$$
$$\to N = mgσυνφ \to N = 5\sqrt{3}N$$



Το μέτρο της τριβής ολίσθησης θα είναι
$T = μN \to T = 5N$

Είναι $\Sigma\vec{F_x} = m \cdot \vec{α} \to B_x - T = m \cdot α \to mgημφ - T = m \cdot α \to α = 0m/s^2$

Επομένως το σώμα κινείται ομαλά και μέχρι τη στιγμή t_1 θα έχει μετατοπιστεί κατά

$$\Delta x = \upsilon_0 \cdot \Delta t \xrightarrow{\Delta t = t_1 - t_0} \Delta x = 10m$$

Επομένως το έργο του βάρους μέχρι τότε θα είναι

$$W_B = B_x \cdot \Delta x \to W_B = m \cdot g \cdot ημφ \cdot \Delta x \to W_B = 50J$$

Κατά συνέπεια, εφόσον $W_B = -\Delta U_{BAP}$, κατά την κάθοδο του σώματος, η βαρυτική δυναμική του ενέργεια μειώθηκε κατά 50J.

Παρατήρηση: Το έργο του βάρους θα μπορούσε να υπολογιστεί και από τη σχέση

$W_B = B \cdot h$, όπου h το ύψος, στο οποίο αντιστοιχεί η μετατόπιση του σώματος, αφού το έργο του βάρους είναι ανεξάρτητο της ακολουθούμενης διαδρομής.

Το έργο της τριβής ολίσθησης μέχρι τη στιγμή t_1 θα είναι

$$W_T = -T \cdot \Delta x \to W_T = -50J$$

Κατά συνέπεια, μέσω του έργου της τριβής αφαιρέθηκαν από το σώμα 50J ενέργειας και μετατράπηκαν σε θερμική ενέργεια.

β. Είναι $K_{αρχ} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_0^2 \to K_{αρχ} = 2J$ και

$$K_{τελ} = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_0^2 \to K_{αρχ} = 2J$$

οπότε η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος μέχρι τη στιγμή t_1 είναι

$$\Delta K = K_{τελ} - K_{αρχ} \to \Delta K = 0J$$

Έτσι η βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος ελαττώθηκε κατά 50J, μέσω του έργου του βάρους και μετατράπηκε εξ' ολοκλήρου σε θερμική ενέργεια μέσω του έργου της τριβής, ενώ η κινητική ενέργεια του σώματος παρέμεινε αμετάβλητη. Ισχύει δηλαδή

$$\Delta K = W_B + W_T$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Παπάζογλου Αποστόλης