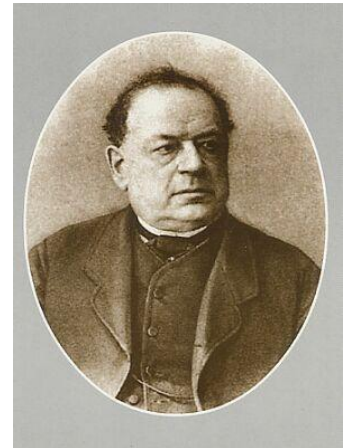


Το Θεώρημα Jacobi ,μια συνάρτηση και η διασταλτική εφαρμογή της προσαρμογής εμπέδησης

Ο Moritz Herman ή Boris Semyonovich von Jacobi

(21 Σεπτεμβρίου 1801 Potsdam (Πότσδαμ) Πρωσία – 10 Μαρτίου 1874 St. Petersburg (Αγία Πετρούπολη) Ρωσία υπήρξε ένας σημαντικός φυσικός και μηχανικός που ασχολήθηκε με την γαλβανοπλαστική (ηλεκτροτυπία), τις ηλεκτρικές μηχανές και την τηλεγραφία.

Γεννήθηκε στο Πότσδαμ της τότε Πρωσίας και σημερινής Γερμανίας από οικογένεια Εβραίων Ασκενάζι και ο πατέρας του ήταν τραπεζίτης. Με προτροπή των γονέων του αρχικά σπούδασε αρχιτεκτονική στο Göttingen (Γκέτινγκεν, ή Γοττίγγη) και το 1833 άρχισε την πρακτική του στο Königsberg (Κένιγκσμπεργκ ή Καϊνιξβέργη) ή Kaliningrad (Καλίνινγκραντ), όπου ο νεότερος αδελφός του Carl Gustav Jacob Jacobi (10 Δεκεμβρίου 1804 – 18 Φεβρουαρίου 1851) διάσημος Μαθηματικός ήταν από το 1827 ο πρώτος Εβραίος Μαθηματικός που κατείχε θέση καθηγητή σε Γερμανικό Πανεπιστήμιο. Ταυτόχρονα



έστρεψε το ενδιαφέρον του προς τη Φυσική και τη Χημεία. Το 1835 κλήθηκε να διδάξει ως καθηγητής στο τμήμα Πολιτικών Μηχανικών στο Πανεπιστήμιο του Dorpat (Tartu=Τάρτου στη σημερινή Εσθονία).Σύντομα, το 1837 μετακινήθηκε στην Αγία Πετρούπολη όπου έγινε μέλος της Αυτοκρατορικής Ακαδημίας των Επιστημών (επικουρικό μέλος το 1839, έκτακτο μέλος το 1842 και τακτικό μέλος από το 1847) και αφιερώθηκε στις έρευνες του για τον ηλεκτρισμό και τις πρακτικές εφαρμογές του. Παρόλο που οι μελέτες του ήταν μεγάλου ενδιαφέροντος και τα αποτελέσματα των εργασιών του είχαν εκδοθεί και ήταν διαθέσιμα, η επίδρασή τους ήταν μικρή αφ' ενός μεν λόγω της φυσικής του απομόνωσης από το τα κέντρα ανάπτυξης του ηλεκτρισμού της εποχής που ήταν η Γαλλία και η Αγγλία, αφετέρου δε γιατί οι περισσότερες από τις πρακτικές ανακαλύψεις του ήταν πρόωρες για να αξιοποιηθούν από την τεχνολογία της εποχής.

Η πιο σπουδαία ίσως εργασία του ανακοινώνεται το 1838 στη Ακαδημία στην Αγία Πετρούπολη και δύο χρόνια αργότερα στη Βρετανική Επιστημονική Ένωση και σχετίζεται με την έρευνά του για την ισχύ που αποδίδει ένας ηλεκτρομαγνήτης σε συνάρτηση διαφόρων παραμέτρων όπως: η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος, η διατομή του σύρματος, ο αριθμός των σπειρών, η διάμετρος των σπειρών, το πάχος του σιδηροπυρήνα. Η σημαντική αυτή εργασία θα μελετηθεί με περισσότερες λεπτομέρειες από τους Henry Rowland και John Hopkinson σχεδόν μισό αιώνα αργότερα.

Οι προσπάθειές του για την κατασκευή μιας ηλεκτρικής μηχανής άρχισαν το Μάιο του 1834 και αφορούσαν τον υπολογισμό της απόδοσης μιας τέτοιας μηχανής σε σχέση με την ποσότητα του ψευδαργύρου που καταναλωνόταν στην μπαταρία. Το 1838 με την οικονομική στήριξη του τσάρου Νικόλαου Ι θα τοποθετήσει σε μια λέμβο μήκους 28 ποδών μια από τις μηχανές που κατασκεύασε και θα μεταφέρει δώδεκα Ρώσους αξιωματούχους με ταχύτητα 1-3 μίλια ανά ώρα αντίθετα από το ρεύμα του ποταμού Νέβα.Το κόστος για την κατασκευή της μπαταρίας και τα καυσάδια που εκπέμπονταν καταδίκασαν την ιδέα για κατασκευή ενός στόλου λέμβων που θα διέπλεε τον ποταμό Νέβα.

Το 1838 ανακοινώνει την ανακάλυψη της γαλβανοπλαστικής (ηλεκτροτυπίας), δηλαδή της αναπαραγωγής σχημάτων ή γραμμμάτων με ηλεκτροαπόθεση. Μετά το θάνατο του βαρώνου Pavel Schilling το 1837, που το ίδιο έτος είχε ήδη παρουσιάσει έναν ηλεκτρομαγνητικό τηλεγράφο, χωρίς να τον έχει θέσει σε λειτουργία, η κυβέρνηση του ανέθεσε να συνεχίσει την προσπάθεια. Πράγματι το 1839 θα κατασκευάσει μια διάταξη που έμοιαζε την αντίστοιχη πρώτη του Morse.

Το **θεώρημα της μέγιστης εξωτερικής ισχύος** διατυπώθηκε το 1840 κατά την διάρκεια των μελετών που έκανε ο M. Jacobi για την ηλεκτρική μηχανή σε μια εποχή που η έννοια Ενέργεια ήταν ακόμη ομιχλώδης και το μέγεθος αντί – ηλεκτρεγερτική δύναμη δεν είχε οριστεί.

Η διατύπωση:

«Η ισχύς που μεταφέρεται από μια ηλεκτρική πηγή σε κύκλωμα που περιλαμβάνει ωμικές αντιστάσεις γίνεται μέγιστη, όταν η εσωτερική αντίσταση της πηγής είναι ίση με

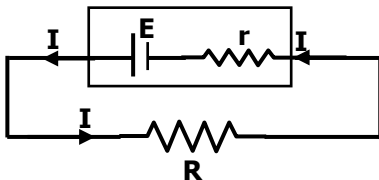
την εξωτερική αντίσταση (φορτίο) του κυκλώματος η οποία μπορεί να μεταβάλλεται, ενώ η εσωτερική αντίσταση της πηγής παραμένει σταθερή.»

Οι παρανοήσεις στις οποίες οδήγησε η διατύπωση του θεωρήματος είναι αξιοσημείωτες. Αρχικά, το θεώρημα διαπραγματεύεται τη μεταφορά μέγιστης ισχύος στο εξωτερικό κύκλωμα που τροφοδοτείται από μια **συγκεκριμένη** ηλεκτρική πηγή με **δεδομένη** εσωτερική αντίσταση καθώς η εξωτερική αντίσταση μπορεί να παίρνει διαφορετικές τιμές και όχι το πώς θα επιλέξουμε την εσωτερική αντίσταση μιας πηγής, ώστε να τροφοδοτήσουμε μια συγκεκριμένη εξωτερική αντίσταση με μέγιστη ισχύ.

Μια άλλη παρανόηση που συνόδευσε τη διατύπωση του θεωρήματος μέγιστης εξωτερικής ισχύος σχετίζεται με τη σύγχυση ανάμεσα στις έννοιες *μέγιστη ισχύς (power)* και *μέγιστη απόδοση (efficiency)*. Πιο συγκεκριμένα, αν η εξωτερική αντίσταση αυξηθεί και γίνει μεγαλύτερη από την εσωτερική αντίσταση της πηγής, αυξάνεται και το ποσοστό της ισχύος της πηγής που διατίθεται στην εξωτερική αντίσταση και η απόδοση ($P_{εξ} / P_{πηγής}$) αυξάνεται. Αντίθετα, όταν η εξωτερική αντίσταση ελαττωθεί και γίνει μικρότερη από την εσωτερική αντίσταση της πηγής, η απόδοση μειώνεται διότι το μεγαλύτερο ποσοστό της ισχύος της πηγής διατίθεται στην εσωτερική αντίσταση της πηγής, παρόλο που η συνολική ισχύς της πηγής αυξάνεται καθώς η συνολική αντίσταση του κυκλώματος ελαττώνεται. Ένα επιφανές θύμα αυτής της παρανόησης υπήρξε και ο **James Prescott Joule** (24 Δεκεμβρίου 1818 – 11 Οκτωβρίου 1889) ο οποίος ερμήνευσε το θεώρημα μέγιστης ισχύος ως έναν αναπόφευκτο περιορισμό που «καταδικάζει» την ισχύ που αποδίδεται στο εξωτερικό κύκλωμα να μην μπορεί να υπερβεί το 50%, όταν η εσωτερική αντίσταση της πηγής και η εξωτερική είναι ίσες. Το εσφαλμένο αυτό της άποψης θα δειχθεί αρκετά χρόνια αργότερα (1880) από τον **Thomas Alva Edison** (Φεβρουάριος 11, 1847 – Οκτώβριος 18, 1931) και τον συνεργάτη του **Francis Robbins Upton** (1852 – Μάρτιος 10, 1921) οι οποίοι συνειδητοποίησαν ότι η μέγιστη απόδοση δεν είναι το ίδιο πράγμα με τη μέγιστη εξωτερική ισχύ. Κατανόησαν ότι η απόδοση της πηγής μεγιστοποιείται, όταν η εσωτερική της αντίσταση παίρνει τιμή που πλησιάζει όσον το δυνατόν περισσότερο στην τιμή μηδέν. Κατάφεραν να κατασκευάσουν μια ηλεκτρική μηχανή που η απόδοσή της πλησίαζε το 90% και αποτελούσε μια πρακτική εναλλακτική λύση της θερμικής μηχανής.

Το Θεώρημα της μέγιστης ισχύος με την απαραίτητη προσαρμογή ισχύει και σε κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος. Η ισχύς που αποδίδει η πηγή εναλλασσόμενης τάσης στο εξωτερικό κύκλωμα γίνεται μέγιστη, όταν η εμπέδηση (impedance) του εξωτερικού κυκλώματος γίνεται ίση με τη συζυγή της σύνθετης (μιγαδικής) αντίστασης (εμπέδησης) της πηγής. Στη συνέχεια αυτής της μελέτης αυτό το θέμα θα μας απασχολήσει στην απλούστερη εκδοχή του όπου το κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος θα έχει μόνο ωμικές αντιστάσεις.

Θα επιχειρήσουμε να αποδείξουμε το Θεώρημα (Νόμο) του Jacobi με Αλγεβρικό τρόπο και γραφικά, αφού η παρούσα εργασία απευθύνεται πρωτίστως σε μαθητές που δεν γνωρίζουν απαραίτητα τις Αρχές του Διαφορικού Λογισμού.



Σχήμα 1

Στο κύκλωμα του **Σχήματος 1** η ηλεκτρική πηγή συνεχούς ρεύματος έχει ηλεκτρεγερτική δύναμη E , εσωτερική αντίσταση r και τροφοδοτεί με συνεχές ηλεκτρικό ρεύμα τον αντιστάτη αντίστασης R .

1ος Τρόπος

Από τον Ν.Οhm στο κλειστό κύκλωμα υπολογίζουμε την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος:

$$I = \frac{E}{R+r} \quad (1)$$

Ο Νόμος αποτελεί συνέπεια της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας, η οποία σε χρόνο λειτουργίας t της πηγής δίνει: $EIt = I^2 R t + I^2 r t \Rightarrow EI = P + I^2 r \Rightarrow rI^2 - EI + P = 0$ (2), όπου $P =$ η ισχύς που προσφέρεται από την πηγή (και καταναλώνεται) στην αντίσταση R . Η δευτεροβάθμια εξίσωση (2) προφανώς πρέπει να έχει πραγματικές ρίζες, άρα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη :

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow E^2 - 4rP \geq 0 \Leftrightarrow P \leq \frac{E^2}{4r} \Leftrightarrow P_{\max} = \frac{E^2}{4r} \quad (3)$$

Με αντικατάσταση της τιμής της μέγιστης ισχύος από την σχέση (3) στη σχέση (2) προκύπτει:

$I = \frac{E}{2r}$ (4). Με αντικατάσταση της τιμής της έντασης του ρεύματος, όταν η ισχύς P είναι μέγιστη, στη σχέση (1) προκύπτει $R=r$.

Η απόδοση του κυκλώματος τότε, είναι: $a = \frac{P_{\max}}{P_{\text{πηγής}}} \Rightarrow a = \frac{\frac{E^2}{4r}}{EI} \Rightarrow a = \frac{E}{4r \frac{E}{2r}} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ ή (50%).

2ος Τρόπος

Η ισχύς που προσφέρεται στην αντίσταση R γράφεται:

$$P = I^2 R \Rightarrow P = \frac{E^2}{(R+r)^2} R \Rightarrow P = \frac{E^2}{R^2 + 2Rr + r^2} R \Rightarrow P = \frac{E^2 R r}{r(R^2 + 2Rr + r^2)} \Rightarrow P = \frac{E^2}{r} \frac{1}{\left(\frac{R}{r} + 2 + \frac{r}{R}\right)} \quad (5).$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι για δεδομένες (σταθερές) τις τιμές των E και r η μεγιστοποίηση της P γίνεται, όταν ο παρονομαστής γίνεται ελάχιστος και πιο συγκεκριμένα γίνεται ελάχιστη η τιμή του αθροίσματος $\frac{R}{r} + \frac{r}{R}$. Αποδεικνύουμε τη γνωστή ανισότητα :

$$\left(\frac{r}{R} - 1\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{r}{R} - 2 + \frac{R}{r} \geq 0 \Rightarrow \frac{r}{R} + \frac{R}{r} \geq 2 \Rightarrow \left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r}\right)_{\min} = 2 \quad (6).$$

Από τις (5) και (6) προκύπτει: $P_{\max} = \frac{E^2}{4r}$ και στη συνέχεια, όπως αποδείχθηκε στον 1ο Τρόπο, προκύπτει $R=r$.

3ος Τρόπος

Θέτουμε $\frac{r}{R} = \lambda$ και η σχέση (5) γράφεται: $P = \frac{E^2}{r} \frac{1}{\left(\lambda + 2 + \frac{1}{\lambda}\right)}$ ή $P = \frac{E^2}{r} f(\lambda)$,

$$\text{όπου } f(\lambda) = \frac{1}{\left(\lambda + 2 + \frac{1}{\lambda}\right)} \quad (7).$$

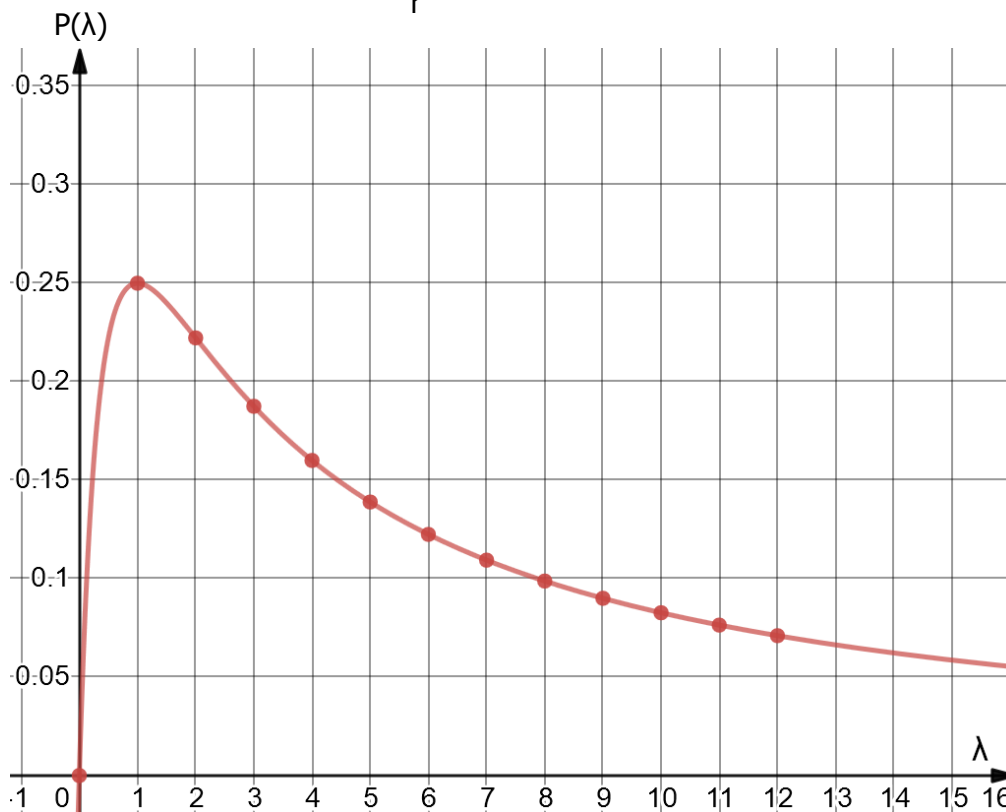
Η συνάρτηση $f(\lambda)$, που θα μας απασχολήσει και στη συνέχεια αυτής της μελέτης, παρουσιάζει

μέγιστο, όταν $\lambda = \frac{r}{R} = 1$, $f(\lambda)_{\max} = \frac{1}{4}$ και $P = \frac{E^2}{4r}$.

Αντίστοιχα, όταν $R=0$ είναι προφανές ότι $P=0$ και

όταν $R \rightarrow \infty$ (πρακτικά $R \gg r$), $\lambda \rightarrow 0$ και $P \rightarrow 0$. Συμπέρασμα εύλογο, αφού η υπέρμετρη αύξηση της τιμής της αντίστασης R προκαλεί ελάττωση της έντασης του ρεύματος $\left(\downarrow I = \frac{E}{\uparrow R+r}\right)$, άρα και της ισχύος που μεταφέρεται στην αντίσταση R .

Με αυτές τις απλές παρατηρήσεις μπορεί κάποιος να σχεδιάσει την γραφική παράσταση της $P(\lambda)$ που ακολουθεί στην οποία ο παράγοντας $\frac{E^2}{r}$ θεωρήθηκε ίσος με 1:



Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι : $P_{\max} = \frac{E^2}{4r}$.

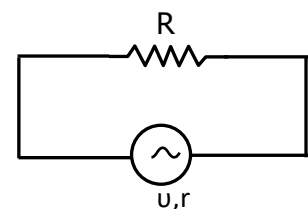
Πρόκειται για μια απλή εκδοχή αυτού που σε διάφορες εφαρμογές της ηλεκτρονικής ονομάζεται προσαρμογή εμπέδησης (impedance matching) και έχει ως σκοπό να επιτευχθεί η μεταφορά μέγιστης ισχύος, για παράδειγμα μεταξύ ενός ενισχυτή και ενός μεγαφώνου.

Συνοψίζοντας, όταν $r=R$ η ισχύς που μεταφέρεται στην αντίσταση R γίνεται μέγιστη, αλλά η απόδοση είναι 50%, η μισή από την ισχύ που αποδίδει η πηγή καταναλώνεται στην εσωτερική της αντίσταση, έτσι ένας ενισχυτής ισχύος που σχεδιάζεται για να αποδώσει μέγιστη ισχύ, θερμαίνεται.

Αντίθετα καθώς αυξάνεται η τιμή της αντίστασης R και γίνεται $R \gg r$ η απόδοση πλησιάζει ασυμπτωτικά το 100% γι' αυτό οι συσκευές χαμηλής κατανάλωσης ενέργειας (low-drain devices), όπως τα κινητά τηλέφωνα, δεν απαιτούν σημαντική ισχύ για μεγάλο χρονικό διάστημα, αλλά υψηλή απόδοση, ώστε η μπαταρία να διαρκεί για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Εφαρμογή 1η

Στο κύκλωμα του **Σχήματος 2** η πηγή εναλλασσόμενης τάσης (μονοφασικός εναλλακτήρας) δημιουργεί τάση της μορφής $u=V_m \sin \omega t$ και θεωρούμε ότι παρουσιάζει μόνον ωμική αντίσταση r . Το κύκλωμα περιλαμβάνει αντιστάτη αντίστασης R . Να δείξετε ότι η μέγιστη μέση ισχύς με την οποία μπορεί να τροφοδοτηθεί ο αντιστάτης R είναι $\bar{P}_{\max} = \frac{V_{\text{ev}}^2}{4r}$, όπου V_{ev} η ενεργός τιμή της τάσης u , και επιτυγχάνεται, όταν $r=R$.



Σχήμα 2

Λύση

Σε χρόνο μιας περιόδου T η πηγή παρέχει στο κύκλωμα ενέργεια $W = V_{\text{EV}} I_{\text{EV}} T$ η οποία καταναλώνεται στην εσωτερική της αντίσταση r $Q_r = I_{\text{EV}}^2 r T$ και στον αντιστάτη αντίστασης R όπου και εκλύεται ως θερμότητα. Από το N. Joule αντίστοιχα έχουμε: $Q_r = I_{\text{EV}}^2 r T$ και $Q_R = I_{\text{EV}}^2 R T$.

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας προκύπτει:

$$V_{\text{EV}} I_{\text{EV}} T = I_{\text{EV}}^2 r T + I_{\text{EV}}^2 R T \Rightarrow V_{\text{EV}} I_{\text{EV}} = I_{\text{EV}}^2 r + \bar{P} \Rightarrow r I_{\text{EV}}^2 - V_{\text{EV}} I_{\text{EV}} + \bar{P} = 0 \quad (1)$$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) προφανώς πρέπει να έχει πραγματικές ρίζες, άρα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη :

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow V_{\text{EV}}^2 - 4r\bar{P} \geq 0 \Leftrightarrow \bar{P} \leq \frac{V_{\text{EV}}^2}{4r} \Leftrightarrow \bar{P}_{\text{max}} = \frac{V_{\text{EV}}^2}{4r} \quad (2)$$

Με αντικατάσταση της τιμής της μέγιστης ισχύος από την σχέση (2) στη σχέση (1) προκύπτει:

$$I_{\text{EV}} = \frac{V_{\text{EV}}}{2r} \quad (3). \text{ Αλλά από το N. Ohm } I_{\text{EV}} = \frac{V_{\text{EV}}}{R+r} \Rightarrow \frac{V_{\text{EV}}}{2r} = \frac{V_{\text{EV}}}{R+r} \Rightarrow r = R.$$

Σχόλιο 1 (Για τους διδάσκοντες)

Παρά την αποσπασματική παρουσίαση των κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος στα πλαίσια της παρούσας εξεταστέας ύλης, το θέμα μπορεί να παρουσιαστεί καθόσον **τελικά** σχετίζεται με τη σχέση των r και R .

Αναλυτικότερα, η πηγή εναλλασσόμενης τάσης παρουσιάζει μια σύνθετη αντίσταση (εμπέδηση) $z_n = r + jx_n$ και έστω ότι τροφοδοτεί ένα «φορτίο» σύνθετης αντίστασης $z_\phi = R + jx_\phi$, τότε ο N. Ohm για τις ενεργές τιμές τάσης και έντασης δίνει:

$$I_{\text{EV}} = \frac{V_{\text{EV}}}{\sqrt{(r+R)^2 + (x_n + x_\phi)^2}} \text{ και η μέση ισχύς που καταναλώνεται στην ωμική αντίσταση του } R$$

«φορτίου» (πραγματικό μέρος της σύνθετης ή μιγαδικής αντίστασης) γράφεται:

$$\bar{P} = I_{\text{EV}}^2 R \Rightarrow \bar{P} = \frac{V_{\text{EV}}^2 R}{(r+R)^2 + (x_n + x_\phi)^2}.$$

Η $\bar{P}$ μεγιστοποιείται: **1.** όταν $x_n = -x_\phi$, δηλαδή τα μιγαδικά τμήματα των z_n και z_ϕ γίνουν αντίθετα, οπότε η $\bar{P}$ τώρα γράφεται $\bar{P} = \frac{V_{\text{EV}}^2 R}{(r+R)^2}$, και **2.** σύμφωνα με τα προηγούμενα, όταν $r=R$.

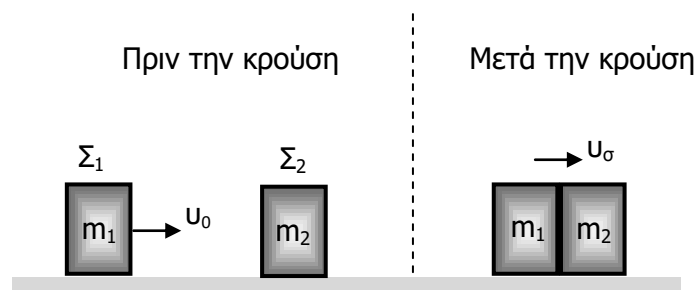
Άρα για να επιτευχθεί η προσαρμογή εμπέδησης πρέπει, όπως προαναφέραμε, η σύνθετη αντίσταση της πηγής και η αντίστοιχη του «φορτίου» να γίνουν συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

Συμπερασματικά, επειδή στα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος ενέργεια καταναλώνουν μόνον οι ωμικές αντιστάσεις καθόσον οι χωρητικότητες (πυκνωτές) και οι επαγωγές (ιδανικά πηνία) είναι άεργα στοιχεία, ήταν αναμενόμενο να μην αλλάζει η συνθήκη μεγιστοποίησης της ισχύος, αλλά να απαιτείται *προσαρμογή* της προσαρμογής εμπέδησης.

Εφαρμογή 2η

Το σώμα Σ_1 μάζας m_1 που κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου u_0 συγκρούεται με αρχικά ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας m_2 . Η κρούση είναι μετωπική και πλαστική. (Σχήμα 3)

Με δεδομένες (σταθερές) τις τιμές m_1 και u_0 , να δείξετε ότι η κινητική ενέργεια K_2 που αποκτά το σώμα μάζας m_2 μετά την κρούση, καθώς αποτελεί μέρος του συσσωματώματος που σχηματίζεται, γίνεται μέγιστη, όταν $m_1 = m_2$ και να υπολογίσετε την μέγιστη τιμή της.



Σχήμα 3

Λύση

Κατά την κρούση των σωμάτων το σύστημα που αποτελούν είναι μονωμένο και η ορμή του διατηρείται σταθερή: $\vec{P}_{\text{Πριν την κρούση}} = \vec{P}_{\text{Μετά την κρούση}} \Rightarrow m_1 u_0 = (m_1 + m_2) u_\sigma \Rightarrow u_\sigma = \frac{m_1 u_0}{m_1 + m_2}$ **(1)**

Όπου u_σ = το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος μετά την κρούση.

Η κινητική ενέργεια πριν την κρούση είναι η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 : $K_{1n} = \frac{1}{2} m_1 u_0^2$ **(2)**

Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 μετά την κρούση είναι:

$$K_{2\mu} = \frac{1}{2} m_2 u_\sigma^2 \Rightarrow K_{2\mu} = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1 u_0}{m_1 + m_2} \right)^2 \Rightarrow K_{2\mu} = \frac{1}{2} m_1 u_0^2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \Rightarrow K_{2\mu} = K_{1n} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$
$$\Rightarrow K_{2\mu} = K_{1n} \frac{m_1 m_2}{m_1^2 + 2m_1 m_2 + m_2^2} \Rightarrow K_{2\mu} = K_{1n} \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 2 + \frac{m_2}{m_1}}. \text{ Αν θέσουμε } \frac{m_1}{m_2} = \lambda, \text{ η τελευταία σχέση}$$

$$\text{γράφεται: } K_{2\mu} = K_{1n} \frac{1}{\lambda + 2 + \frac{1}{\lambda}} \quad \textbf{(3)}$$

Η συνάρτηση $f(\lambda) = \frac{1}{(\lambda + 2 + \frac{1}{\lambda})}$ εμφανίζεται πάλι και σύμφωνα με την εισαγωγική ανάλυση παίρνει

την μέγιστη τιμή της, όταν $\lambda=1$, δηλαδή $m_1=m_2$ και η μέγιστη τιμή της $K_{2\mu}$ είναι $K_{2\mu \max} = \frac{1}{4} K_{1n} \Rightarrow$ **(1)**

$$K_{2\mu \max} = \frac{1}{8} m_1 u_0^2.$$

Σχόλιο 2

Το είδος της κρούσης (πλαστική) επιβάλλει την ύπαρξη απώλειας Κινητικής ενέργειας.

Αν ως «απόδοση» α της όλης διαδικασίας ορίσουμε την Κινητική ενέργεια που αποκτά το σώμα μάζας m_2 μετά την κρούση ως ποσοστό (%) της ολικής Κινητικής ενέργειας που απέμεινε μετά την κρούση, τότε στην περίπτωση που η $K_{2\mu}$ είναι μέγιστη ($m_1=m_2$), είναι:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2} m_2 u_\sigma^2}{\frac{1}{2} (m_1 + m_2)^2 u_0^2} 100(\%) \xrightarrow{m_1=m_2} \alpha = 50\%.$$

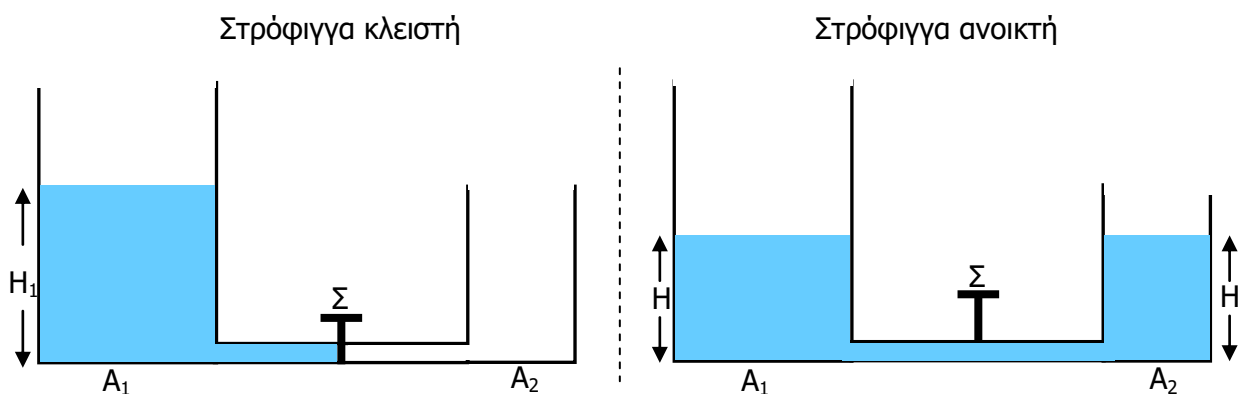
Αν $m_2 \rightarrow \infty$ (πρακτικά $m_2 \gg m_1$), $\lambda \rightarrow 0$ και $K_{2\mu} \rightarrow 0$. Συμπέρασμα εύλογο, αφού η υπέρμετρη αύξηση της τιμής της μάζας m_2 προκαλεί ελάττωση της ταχύτητας του συσσωματώματος

$\left(\downarrow u_\sigma = \frac{m_1 u_0}{m_1 + m_2} \uparrow \right)$, άρα και της Κινητικής ενέργειας που μεταφέρεται στο αρχικά ακίνητο σώμα μάζας m_2 . Εδώ η *προσαρμογή εμπέδησης* σχετίζεται με την «εμπέδηση=μάζα».

Εφαρμογή 3η

Τα κατακόρυφα κυλινδρικά δοχεία του Σχήματος 4 είναι ανοικτά στην ατμόσφαιρα και συνδέονται με οριζόντιο σωλήνα μικρής διατομής στον οποίο έχει προσαρμοστεί στρόφιγγα Σ. Αρχικά η στρόφιγγα Σ είναι κλειστή και στο αριστερό δοχείο υπάρχει υγρό που η ελεύθερη επιφάνειά του βρίσκεται σε ύψος H_1 από τη βάση του. Τα εμβαδά των βάσεων του αριστερού και δεξιού δοχείου είναι αντίστοιχα A_1 και A_2 . Τα δοχεία βρίσκονται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο που θεωρείται και ως το επίπεδο μηδενικής Δυναμικής ενέργειας.

Ανοίγουμε τη στρόφιγγα Σ και υγρό μετακινείται στο δεξιό δοχείο. Με δεδομένες (σταθερές) τις τιμές των H_1 και A_1 , να δείξετε ότι όταν το σύστημα βρεθεί σε κατάσταση ισορροπίας η δυναμική ενέργεια της ποσότητας του υγρού που μετακινήθηκε στο δεξιό δοχείο γίνεται μέγιστη, όταν $A_1=A_2$ και να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της. Δίνονται η πυκνότητα του υγρού ρ και το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας g και ότι η εκάστοτε ποσότητα υγρού στον οριζόντιο σωλήνα θεωρείται αμελητέα.



Σχήμα 4

Λύση

Μετά το άνοιγμα της στρόφιγγας Σ , υγρό μετακινείται από το αριστερό δοχείο προς το δεξιό μέχρι το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας και στα δύο δοχεία να γίνει το ίδιο (Αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων), τότε το σύστημα ισορροπεί. Ο όγκος του υγρού δεν μεταβάλλεται:

$$H_1 A_1 = (A_1 + A_2) H \Rightarrow H = \frac{H_1 A_1}{A_1 + A_2} \quad (1)$$

Η Δυναμική Ενέργεια του υγρού στο αριστερό δοχείο, πριν ανοίξουμε τη στρόφιγγα, είναι:

$$U_1 = mg \frac{H_1}{2} \Rightarrow U_1 = \rho H_1 A_1 g \frac{H_1}{2} \Rightarrow U_1 = \rho A_1 g \frac{H_1^2}{2} \quad (2)$$

Διότι το κέντρο μάζας του υγρού βρίσκεται σε ύψος $\frac{H_1}{2}$.

Η Δυναμική Ενέργεια του υγρού στο δεξιό δοχείο μετά το άνοιγμα της στρόφιγγας και όταν αυτό βρεθεί σε κατάσταση ισορροπίας, αντίστοιχα είναι: $U_2 = \rho A_2 g \frac{H^2}{2} \quad (3)$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\rho A_2 g \frac{H^2}{2}}{\rho A_1 g \frac{H_1^2}{2}} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{A_2 H^2}{A_1 H_1^2} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{A_2 \left(\frac{H_1 A_1}{A_1 + A_2} \right)^2}{A_1 H_1^2} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{A_1^2 A_2}{(A_1 + A_2)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{A_1 A_2}{A_1^2 + 2 A_1 A_2 + A_2^2} \Rightarrow U_2 = U_1 \frac{1}{\frac{A_1}{A_2} + 2 + \frac{A_2}{A_1}}. \text{ Αν θέσουμε } \frac{A_1}{A_2} = \lambda, \text{ η τελευταία σχέση γράφεται :}$$

$$U_2 = U_1 \frac{1}{\lambda + 2 + \frac{1}{\lambda}}. \text{ Η συνάρτηση } f(\lambda) = \frac{1}{(\lambda + 2 + \frac{1}{\lambda})} \text{ πάλι στο προσκίνητο και η } U_2 \text{ γίνεται μέγιστη ,}$$

όταν $\lambda=1$, δηλαδή $A_1=A_2$ (4). Τότε από την (1) $\Rightarrow H = \frac{H_1}{2}$ (5) και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με :

$$U_{2\max} = \frac{1}{4} U_1 \Rightarrow U_{2\max} = \rho A_1 g \frac{H_1^2}{8} \text{ (6).}$$

Σχόλιο 3

Στη διατύπωση του θέματος δεν γίνεται αναφορά στη φύση του υγρού. Αν το υγρό είναι πραγματικό κατά τη μετακίνησή του, μετά το άνοιγμα της στρόφιγγας, λόγω των τριβών μεταξύ υγρού και τοιχωμάτων των δοχείων και της εσωτερικής τριβής εκλύεται θερμότητα, αλλά η μάζα υγρού που μεταφέρεται στο αρχικά άδειο δεξιό δοχείο, άρα και η τελική δυναμική ενέργεια του υγρού, για δεδομένες διατομές των δοχείων, είτε το υγρό είναι πραγματικό είτε ιδανικό, δεν αλλάζει.

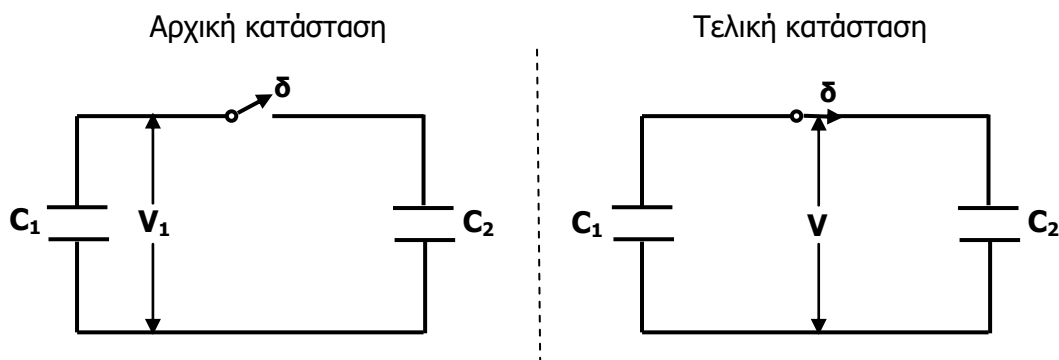
Αν ως «απόδοση» a της όλης διαδικασίας ορίσουμε τη Δυναμική ενέργεια U_2 που αποκτά το υγρό που μετακινείται στο αρχικά άδειο δοχείο μάζας m_2 ως ποσοστό (%) της ολικής Δυναμικής ενέργειας που έχει το σύστημα μετά την αποκατάσταση ισορροπίας, τότε στην περίπτωση που η U_2 είναι μέγιστη ($A_1=A_2$), είναι:

$$a = \frac{\rho A_1 g \frac{H_1^2}{8}}{\rho A_1 g \frac{H_1^2}{8} + \rho A_1 g \frac{H_1^2}{8}} 100(\%) \Rightarrow a = 50\% .$$

Αν $A_2 \rightarrow \infty$ (πρακτικά $A_2 \gg A_1$), $\lambda \rightarrow 0$ και $U_2 \rightarrow 0$. Συμπέρασμα εύλογο, αφού η υπέρμετρη αύξηση της τιμής της διατομής A_2 προκαλεί ελάττωση του κοινού ύψους της στήλης του υγρού στα δύο δοχεία $\left(\downarrow H = \frac{H_1 A_1}{A_1 + A_2} \uparrow \right)$, άρα και της Δυναμικής ενέργειας του υγρού που μεταφέρεται στο αρχικά άδειο δεξιό δοχείο εμβαδού διατομής A_2 . Εδώ η *προσαρμογή εμπίεσης* σχετίζεται με την «εμπίεση=εμβαδόν διατομής του δοχείου».

Εφαρμογή 4η

Ο πυκνωτής χωρητικότητας C_1 έχει φορτιστεί και στους οπλισμούς του η διαφορά δυναμικού είναι V_1 . Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5 ο πυκνωτής αυτός συνδέεται μέσω διακόπτη δ , που αρχικά είναι ανοικτός, με αφορτιστο πυκνωτή χωρητικότητας C_2 . Κλείνουμε το διακόπτη δ και όταν το κύκλωμα βρεθεί σε κατάσταση ισορροπίας οι πυκνωτές έχουν κοινή διαφορά δυναμικού V στους οπλισμούς τους. Με δεδομένες (σταθερές) τις τιμές των C_1 και V_1 , να δείξετε ότι όταν το κύκλωμα βρεθεί σε κατάσταση ισορροπίας η Ηλεκτρική Δυναμική ενέργεια U_2 στον πυκνωτή χωρητικότητας C_2 , γίνεται μέγιστη, όταν $C_1=C_2$ και να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της. Δίνονται C_1, V_1 .



Σχήμα 5

Λύση

Μετά το κλείσιμο του διακόπτη δ φορτίο μετακινείται από τον αρχικά φορτισμένο πυκνωτή χωρητικότητας C_1 προς τον αρχικά αφόρτιστο πυκνωτή χωρητικότητας C_2 μέχρι οι δύο πυκνωτές να αποκτήσουν κοινή Διαφορά Δυναμικού V στους οπλισμούς τους. Από μια άλλη σπουδαία Αρχή Διατήρησης, αυτής του φορτίου προκύπτει:

$$q_1 = q'_1 + q'_2$$

όπου:

q_1 = η αρχική τιμή του φορτίου του πυκνωτή χωρητικότητας C_1 , πριν κλείσουμε το διακόπτη δ,
 $q_2 = 0$ = η αρχική τιμή του φορτίου του πυκνωτή χωρητικότητας C_2 , πριν κλείσουμε το διακόπτη δ,
 q'_1 = η τελική τιμή του φορτίου του πυκνωτή χωρητικότητας C_1 , αφού έχουμε κλείσει το διακόπτη δ,
 q'_2 = η τελική τιμή του φορτίου του πυκνωτή χωρητικότητας C_2 , αφού έχουμε κλείσει το διακόπτη δ.
Από τον ορισμό της χωρητικότητας πυκνωτή η σχέση γράφεται:

$$C_1 V_1 = C_1 V + C_2 V \Rightarrow V = \frac{C_1 V_1}{C_1 + C_2} \quad (1)$$

Η Ηλεκτρική Δυναμική ενέργεια που υπάρχει στον αρχικά φορτισμένο πυκνωτή χωρητικότητας C_1 είναι: $U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2$ (2)

Η Ηλεκτρική Δυναμική ενέργεια που στον πυκνωτή χωρητικότητας C_2 , όταν το κύκλωμα βρεθεί στην τελική κατάσταση ισορροπίας του, όπου οι δύο πυκνωτές έχουν αποκτήσει κοινή Διαφορά Δυναμικού είναι: $U_2 = \frac{1}{2} C_2 V^2$ (3)

$$\begin{aligned} \frac{U_2}{U_1} &= \frac{\frac{1}{2} C_2 V^2}{\frac{1}{2} C_1 V_1^2} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2 V^2}{C_1 V_1^2} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2 \left(\frac{C_1 V_1}{C_1 + C_2} \right)^2}{C_1 V_1^2} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{C_1^2 C_2}{(C_1 + C_2)^2}}{C_1} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} \\ \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} &= \frac{C_1 C_2}{C_1^2 + 2C_1 C_2 + C_2^2} \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\frac{C_1}{C_2} + 2 + \frac{C_2}{C_1}}. \text{ Αν θέσουμε } \frac{C_1}{C_2} = \lambda, \text{ η τελευταία σχέση γράφεται :} \end{aligned}$$

$$U_2 = U_1 \frac{1}{\lambda + 2 + \frac{1}{\lambda}}. \text{ Η συνάρτηση } f(\lambda) = \frac{1}{\left(\lambda + 2 + \frac{1}{\lambda}\right)} \text{ συνεπής στην εμφάνισή της και η } U_2 \text{ γίνεται}$$

μέγιστη, όταν $\lambda = 1$, δηλαδή $C_1 = C_2$ (4). Τότε από την (1) $\stackrel{(4)}{\Rightarrow} V = \frac{V_1}{2}$ (5) και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με :

$$U_{2\max} = \frac{1}{4} U_1 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} U_{2\max} = \frac{C_1 V_1^2}{8} \quad (6).$$

Σχόλιο 4

Κατά την μετακίνηση φορτίου προς τον αρχικά αφόρτιστο πυκνωτή χωρητικότητας C_2 , υπάρχει απώλεια ενέργειας λόγω φαινομένου Joule στην όποια αντίσταση παρουσιάζει το κύκλωμα (που στην προηγούμενη παρουσίαση θεωρήθηκε αμελητέα), αλλά και λόγω εκπομπής Ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από το φορτίο που επιταχύνεται μετακινούμενο από τον έναν πυκνωτή στον άλλο.

Αν ως «απόδοση» a της όλης διαδικασίας ορίσουμε την Ηλεκτρική Δυναμική ενέργεια U_2 που αποκτά ο αρχικά αφόρτιστος πυκνωτής χωρητικότητας C_2 ως ποσοστό (%) της ολικής Δυναμικής ενέργειας που έχει το σύστημα μετά την αποκατάσταση ισορροπίας, τότε στην περίπτωση που η

$$U_2 \text{ είναι μέγιστη } (C_1=C_2), \text{ είναι: } a = \frac{\frac{C_1 V_1^2}{8}}{\frac{C_1 V_1^2}{8} + \frac{C_1 V_1^2}{8}} 100(\%) \Rightarrow a = 50\% . \quad (6)$$

Αν $C_2 \rightarrow \infty$ (πρακτικά $C_2 \gg C_1$), $\lambda \rightarrow 0$ και $U_2 \rightarrow 0$. Συμπέρασμα εύλογο, αφού η υπέρμετρη αύξηση της τιμής της χωρητικότητας C_2 προκαλεί ελάττωση της τιμής της κοινής Διαφοράς Δυναμικού στους δύο πυκνωτές $\left(\downarrow V = \frac{C_1 V_1}{C_1 + C_2} \uparrow \right)$, άρα και της Δυναμικής ενέργειας που αποκτά ο αρχικά αφόρτιστος πυκνωτής χωρητικότητας C_2 . Εδώ η *προσαρμογή εμπέδησης* σχετίζεται με την «εμπέδηση=χωρητικότητα».

Ίδιος Φορμαλισμός, αλλά διαφορετική Φυσική

Μια σύγκριση της **Εφαρμογής 3** και της **Εφαρμογής 4** δίνει ομοιότητες και αντιστοιχίες όχι μόνο ως προς τις τιμές και τις εκφράσεις της μέγιστης Βαρυτικής Δυναμικής ενέργειας του υγρού στο αρχικά άδειο δεξιό δοχείο και της μέγιστης Ηλεκτρικής Δυναμικής ενέργειας στον αρχικά αφόρτιστο πυκνωτή ή τη συνθήκη μεγιστοποίησης σε κάθε εφαρμογή, αλλά και ως προς τα φυσικά χαρακτηριστικά:

Αναλογία Εμβαδών των διατομών των δοχείων $\rightarrow$ Αναλογία των Χωρητικοτήτων των πυκνωτών, το υγρό ρέει προς το αρχικά άδειο δοχείο $\rightarrow$ το φορτίο «ρέει» προς τον αρχικά αφόρτιστο πυκνωτή.

Η φυσική πίσω από τα δύο φαινόμενα (διαδικασίες) παρουσιάζει όμως μια διαφορά που είναι άξια λόγου.

Η εκάστοτε Βαρυτική Δυναμική ενέργεια του υγρού που μεταφέρεται στο αρχικά άδειο δοχείο είναι: $U = mg\left(\frac{H}{2}\right)$, όπου m =η μάζα της στήλης υγρού στο δοχείο και H = το κοινό ύψος της στήλης υγρού στα δοχεία, όταν το σύστημα βρεθεί στη τελική κατάσταση ισορροπίας του.

Η εκάστοτε Ηλεκτρική Δυναμική ενέργεια στον αρχικά αφόρτιστο πυκνωτή είναι: $U_2 = \frac{1}{2} C_2 V^2$ και

από τον ορισμό της χωρητικότητας πυκνωτή $q'_2 = C_2 V$ γράφεται ως: $U_2 = \frac{1}{2} q'_2 V$, όμως στο χώρο μεταξύ των οπλισμών του φορτισμένου πυκνωτή δημιουργείται ομογενές ηλεκτρικό πεδίο το μέτρο της έντασης του οποίου δίνεται από τη σχέση: $\mathcal{E} = \frac{V}{\ell}$, όπου ℓ = η απόσταση μεταξύ των οπλισμών

του πυκνωτή. Τελικά, $U_2 = \frac{1}{2} q'_2 \mathcal{E} \ell$ και η κρίσιμη αναδιάταξη της σχέσης δίνει: $U_2 = q'_2 \left(\frac{\mathcal{E}}{2}\right) \ell$.

Οι δύο Δυναμικές ενέργειες που μας απασχολούν προφανώς σχετίζονται με δύο Δυναμικά διατηρητικά (συντηρητικά) πεδία, το Βαρυτικό και το Ηλεκτροστατικό αντίστοιχα. Η μάζα m σε όποιο δοχείο και αν βρίσκεται, είναι υπό την επίδραση του ίδιου Βαρυτικού πεδίου έντασης μέτρου g και όταν σχηματίζει στήλη ύψους H το κέντρο μάζας της απέχει $\frac{H}{2}$ από το επίπεδο μηδενικής Δυναμικής ενέργειας. Το φορτίο q'_2 στον πυκνωτή χωρητικότητας C_2 όμως δεν βρίσκεται στο ηλεκτρικό πεδίο έντασης μέτρου $\mathcal{E}$ που δημιουργείται μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή, αλλά μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο έντασης μέτρου $\frac{\mathcal{E}}{2}$. Ο λόγος; Ως φορτίο ενός πυκνωτή ορίζεται το φορτίο του ενός οπλισμού κατά απόλυτη τιμή. Το φορτίο κάθε οπλισμού βρίσκεται μέσα στο ηλεκτρικό

πεδίο που δημιουργεί ο άλλος οπλισμός και έχει ένταση μέτρου $\frac{\mathcal{E}}{2}$. Τώρα «δεν είναι η μάζα του υγρού μέσα στο Βαρυτικό πεδίο της Γης», είναι αυτό που ορίζουμε ως φορτίο πυκνωτή «μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ο ετερόνυμος παρτενέρ του». Κατά τα άλλα, αν αντιπαραθέσουμε τις δύο εκφράσεις με τις μορφές: $U = \frac{mgH}{2}$ και $U_2 = \frac{q_2 \mathcal{E} \ell}{2}$ η αντιστοιχία είναι πλήρης, υπάρχει το υπόθεμα, η ένταση του πεδίου και το μισό κάποιας απόστασης.

Εφαρμογή 5η

Η κατακόρυφη ράβδος ΟΓ του σχήματος που είναι αρθρωμένη στο άκρο της Ο θεωρείται μικρού πάχους έχει μάζα Μ και το μήκος της είναι L. Βλήμα μάζας m αμελητέων διαστάσεων που κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου u_0 συγκρούεται πλαστικά με την ράβδο σε απόσταση x από το άκρο Ο της ράβδου. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα βλήμα-ράβδος αρχίζει να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο Ο της ράβδου.

Με δεδομένες (σταθερές) τις τιμές m και u_0 , να δείξετε ότι η κινητική ενέργεια K_p που αποκτά η ράβδος μετά την κρούση, καθώς αποτελεί μέρος του συσσωματώματος που σχηματίζεται, γίνεται μέγιστη, όταν $I_{p(O)} = mx^2$ και να υπολογίσετε την μέγιστη τιμή της. Δίνεται η ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς

τον άξονα περιστροφής της $I_{p(O)} = \frac{1}{3}ML^2$.

Λύση

Κατά τη διάρκεια της κρούσης στη ράβδο ασκούνται η οριζόντια ισχυρή κρουστική δύναμη $\vec{F}$, η βαρυτική δύναμη $\vec{W}_p$ και η δύναμη από την άρθρωση $\vec{A}$. Στο βλήμα ασκούνται η οριζόντια ισχυρή κρουστική δύναμη $\vec{F}'$ και η βαρυτική δύναμη $\vec{W}_b$. Για το σύστημα βλήμα-ράβδος οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων $\vec{W}_p$, $\vec{W}_b$ και $\vec{A}$ ως προς το σημείο Ο είναι μηδέν και στροφορμή του συστήματος ως προς το σημείο Ο διατηρείται:

$$mxu_0 = (I_{p(O)} + mx^2)\omega \Rightarrow \omega = \frac{mxu_0}{I_{p(O)} + mx^2} \quad (1)$$

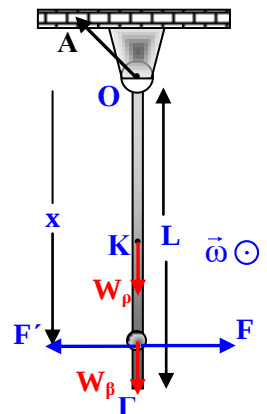
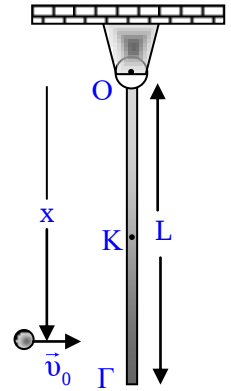
ω =το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας με την οποία το συσσωμάτωμα βλήμα - ράβδος θα αρχίσει να περιστρέφεται περί τον οριζόντιο άξονα που διέχεται από το Ο μετά την κρούση.

Η κινητική ενέργεια του βλήματος πριν την κρούση είναι: $K_n = \frac{1}{2}mu_0^2 \quad (2)$

Η κινητική ενέργεια της ράβδου μετά την κρούση είναι:

$$K_{p,\mu} = \frac{1}{2}I_{p(O)}\omega^2 \Rightarrow K_{p,\mu} = \frac{1}{2}I_{p(O)}\left(\frac{mxu_0}{I_{p(O)} + mx^2}\right)^2 \Rightarrow K_{p,\mu} = \frac{1}{2}I_{p(O)}\frac{m^2x^2u_0^2}{(I_{p(O)} + mx^2)^2} \quad (2)$$

$$\Rightarrow K_{p,\mu} = K_n \frac{I_{p(O)}mx^2}{(I_{p(O)} + mx^2)^2} \Rightarrow K_{p,\mu} = K_n \frac{1}{\frac{I_{p(O)}}{mx^2} + \frac{mx^2}{I_{p(O)}} + 2} \text{ . Αν θέσουμε } \frac{I_{p(O)}}{mx^2} = \lambda \text{ , η τελευταία σχέση}$$



γράφεται : $K_{ρμ} = K_π \frac{1}{λ + 2 + \frac{1}{λ}}$. Η συνάρτηση $f(λ) = \frac{1}{(λ + 2 + \frac{1}{λ})}$ κατά τα γνωστά παίρνει τη μέγιστη

τιμή της , όταν $λ=1$, δηλαδή $I_{ρ(0)} = mx^2$ και η μέγιστη τιμή της $K_{2μ}$ είναι $K_{ρ,μ \max} = \frac{1}{4} K_π \Rightarrow$ ⁽²⁾

$$K_{ρ,μ \max} = \frac{1}{8} m u_0^2.$$

Σχόλιο 5

Αν αντικαταστήσουμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου $I_{ρ(0)}$ στη σχέση $I_{ρ(0)} = mx^2$ προκύπτει:

$\frac{1}{3} ML^2 = mx^2$. Εδώ ο αδρανειακός παράγοντας διαστέλλεται γιατί πρέπει να συμπεριλάβει και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του στερού. Έτσι η μεγιστοποίηση της κινητικής ενέργειας της ράβδου μετά την κρούση (για δεδομένη τιμή της μάζας m) επιτυγχάνεται για παράδειγμα:

αν $\frac{1}{3} M = m$ ή $M = 3m$, όταν $x=L$,

αν $M = m$, όταν $x = L \frac{\sqrt{3}}{3}$. Σ αυτή την περίπτωση η απόσταση x αντιστοιχεί στην *ακτίνα αδράνειας*

της ράβδου, δηλαδή την απόσταση που θα έπρεπε να απέχει από το σημείο O ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με τη μάζα της ράβδου για να έχει την ίδια ροπή αδράνειας με αυτή που έχει η ράβδος ως προς το O .

Είναι προφανές ότι σ' ένα τέτοιο πρόβλημα για κάθε συγκεκριμένη τιμή της μάζας M μπορεί να ζητείται η τιμή του x (και αντίστροφα) για να μεγιστοποιείται η κινητική ενέργεια της ράβδου μετά την κρούση. Μάλιστα αν $m=M$, όταν μεγιστοποιείται η κινητική ενέργεια της ράβδου, όχι μόνον η ροπή αδράνειας του βλήματος ισούται με τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής, αλλά είναι και ίση με τη ροπή αδράνειας εκείνου του υλικού σημείου με το οποίο θα μπορούσαμε να υποκαταστήσουμε τη ράβδο αν το τοποθετούσαμε σε απόσταση ίση με την *ακτίνα αδράνειας* της ράβδου. Εδώ η *προσαρμογή εμπίδησης* σχετίζεται με την «εμπέδηση=ροπή αδράνειας».

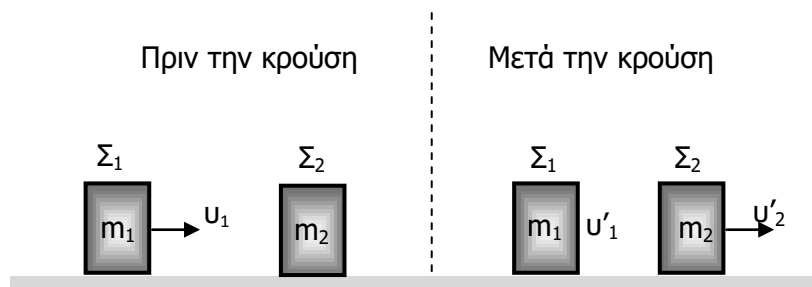
Στις πέντε εφαρμογές που προηγήθηκαν είδαμε ότι ένα μέρος της αρχικής ενέργειας που διαθέτει το σύστημα χάνεται κατά την εξέλιξη της όλης διαδικασίας. Αυτή η απώλεια ενέργειας στην 1^η εφαρμογή αντιστοιχεί στην θερμότητα λόγω φαινομένου Joule που τελικά ακτινοβολείται στο περιβάλλον, στη 2^η και 5^η είναι η θερμότητα που εκλύεται στο περιβάλλον κατά την πλαστική κρούση, στην 3^η είναι επίσης η θερμότητα που εκλύεται λόγω τριβών μεταξύ υγρού και τοιχωμάτων και προκαλεί τη θέρμανση των τοιχωμάτων των δοχείων και στην 4^η πάλι η θερμότητα που εκλύεται στο κύκλωμα λόγω φαινομένου Joule, αλλά και η Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που εκπέμπεται καθώς το φορτίο επιταχύνεται κατά την μετακίνησή του από τον έναν πυκνωτή στον άλλο.

Τι θα συμβεί όμως αν σε κάποια διαδικασία **δεν παρατηρείται απώλεια ενέργειας**; Ας δούμε τις επόμενες τρεις εφαρμογές.

Εφαρμογή 6η

Το σώμα Σ_1 μάζας m_1 που κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου u_1 συγκρούεται με αρχικά ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας m_2 . Η κρούση είναι μετωπική και ελαστική. (Σχήμα 6)

Με δεδομένες (σταθερές) τις τιμές m_1 και u_0 , να δείξετε ότι η κινητική



ενέργεια K_2 που αποκτά το σώμα μάζας m_2 μετά την κρούση, γίνεται μέγιστη, όταν $m_1=m_2$ και να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της.

Λύση

Κατά τη μετωπική και ελαστική κρούση των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 η ορμή και η κινητική ενέργεια του συστήματος που αυτά αποτελούν διατηρούνται σταθερές και η ταχύτητα u'_2 του αρχικά ακίνητου

σώματος Σ_2 μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση: $u'_2 = \frac{2m_1u_1}{m_1 + m_2}$ (1)

Η κινητική ενέργεια πριν την κρούση είναι η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 : $K_{1n} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$ (2)

Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 μετά την κρούση είναι:

$$K_{2\mu} = \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} K_{2\mu} = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{2m_1u_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \Rightarrow K_{2\mu} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} K_{2\mu} = 4K_{1n} \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$\Rightarrow K_{2\mu} = 4K_{1n} \frac{m_1m_2}{m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2} \Rightarrow K_{2\mu} = 4K_{1n} \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 2 + \frac{m_2}{m_1}}. \text{ Αν θέσουμε } \frac{m_1}{m_2} = \lambda, \text{ η τελευταία σχέση}$$

γράφεται: $K_{2\mu} = 4K_{1n} \frac{1}{\lambda + 2 + \frac{1}{\lambda}}$ (3). Η συνάρτηση $f(\lambda) = \frac{1}{(\lambda + 2 + \frac{1}{\lambda})}$ τώρα συνοδεύεται από τον

παράγοντα 4 και σύμφωνα με την εισαγωγική ανάλυση παίρνει την μέγιστη τιμή της, όταν $\lambda=1$, δηλαδή $m_1=m_2$ και η μέγιστη τιμή της $K_{2\mu}$ είναι $K_{2\mu \max} = K_{1n} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} K_{2\mu \max} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$. Δηλαδή η κινητική

ενέργεια του σώματος Σ_1 πριν την κρούση μεταφέρεται πλήρως στο αρχικά ακίνητο σώμα Σ_2 και η μέγιστη τιμή της $K_{2\mu}$ τετραπλασιάζεται σε σχέση με την αντίστοιχη μέγιστη τιμή της στην 2^η εφαρμογή, όπου η κρούση των σωμάτων ήταν πλαστική. Και εδώ η προσαρμογή εμπέδησης σχετίζεται με την «εμπέδηση=μάζα».

Σχόλιο 6

Από τη συγκριτική μελέτη της 2^{ης} και 6^{ης} εφαρμογής προκύπτει ότι η κινητική ενέργεια που μεταφέρεται από το αρχικά κινούμενο σώμα προς το αρχικά ακίνητο γίνεται μέγιστη, όταν $m_1=m_2$. Αυτό συμβαίνει ανεξάρτητα από το είδος της κρούσης (ελαστική – πλαστική) και διαψεύδει τη διαισθητική εκτίμηση ότι η μέγιστη μεταφορά κινητικής ενέργειας γίνεται, όταν το αρχικά κινούμενο σώμα μετά την κρούση ακινητοποιείται. Φαίνεται ότι η παράμετρος $\lambda = \frac{m_1}{m_2}$ επιμένει να

έχει τον πρώτο λόγο.

Όταν η διαισθηση διαψεύδεται (Για τους διδάσκοντες)

Γενικά σε μια μετωπική κρούση δύο σωμάτων μαζών m_1 και m_2 στην οποία η ορμή διατηρείται αν u_1 και u_2 είναι οι ταχύτητες των συγκρουομένων σωμάτων πριν την κρούση και u'_1 , u'_2 οι ταχύτητές τους μετά την κρούση αντίστοιχα. Ορίζουμε ως **συντελεστή αποκατάστασης e (coefficient of restitution)** ή παλαιότερα **συνελεστή κρούσης**, το αντίθετο του πηλίκου της σχετικής ταχύτητας των σωμάτων μετά την κρούση προς τη σχετική ταχύτητά τους πριν την κρούση:

$$e = -\frac{u'_2 - u'_1}{u_2 - u_1} \quad (4)$$

Ο συντελεστής αποκατάστασης παίρνει τιμές: $0 \leq e \leq 1$. Η τιμή $e=0$ αντιστοιχεί στην περίπτωση της τελείως ανελαστικής (πλαστικής) κρούσης και η τιμή $e=1$ στην περίπτωση της τελείως ελαστικής κρούσης. Όλες οι ενδιάμεσες τιμές αντιστοιχούν σε περιπτώσεις ανελαστικής κρούσης.

Από τη διατήρηση της ορμής : $m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u'_1 + m_2 u'_2$ (5)

Από τις σχέσεις (4) και (5) :

$$u'_1 = \frac{m_2(1+e)}{m_1+m_2} u_2 + \frac{(m_1 - em_2)}{m_1+m_2} u_1 \quad (6) \quad \text{και} \quad u'_2 = \frac{m_1(1+e)}{m_1+m_2} u_1 + \frac{(m_2 - em_1)}{m_1+m_2} u_2 \quad (7)$$

Αν το σώμα μάζας m_2 πριν την κρούση είναι ακίνητο : $u_2 = 0$, από τις σχέσεις (6) και (7):

$$u'_1 = \frac{(m_1 - em_2)}{m_1+m_2} u_1 \quad (6a) \quad \text{και} \quad u'_2 = \frac{m_1(1+e)}{m_1+m_2} u_1 \quad (7a)$$

Στην ερώτηση τι πρέπει να συμβεί, ώστε η κινητική ενέργεια του αρχικά κινούμενου σώματος (m_1) να μεταφερθεί κατά την κρούση πλήρως στο αρχικά ακίνητο σώμα (m_2) η διαίσθηση προτρέπει να απαντήσουμε ότι πρέπει $u'_1 = 0$.Είναι όμως έτσι;

Από την (6a) προκύπτει: $m_1 - em_2 = 0 \Rightarrow m_1 = em_2$.Δηλαδή η διαισθητική προσέγγιση οδηγεί σε λύση που θέλει η μέγιστη μεταφορά κινητικής ενέργειας προς το αρχικά ακίνητο σώμα να εξαρτάται από το είδος της κρούσης (τιμή του e).Στην περίπτωση της τελείως ελαστικής κρούσης ($e=1$) προκύπτει $m_1 = m_2$, όμως στην περίπτωση της πλαστικής ($e=0$) προκύπτει $m_1=0$, εδώ φαίνεται ότι η διαίσθηση οδηγεί σε αποτέλεσμα μη αποδεκτό.

(Από (6a) και (7a) για $e=0$, $u'_1 = u'_2 = u_{\text{συσσωματώματος}}$)

Η κινητική ενέργεια που μεταφέρεται κατά την κρούση στο αρχικά ακίνητο σώμα είναι :

$$K'_2 = \frac{1}{2} m_2 u'^2_2 \xrightarrow{(7a)} K'_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{m_1(1+e)}{m_1+m_2} u_1 \right]^2 \Rightarrow K'_2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \frac{m_1 m_2 (1+e)^2}{(m_1+m_2)^2} \Rightarrow K'_2 = K_1 \frac{m_1 m_2 (1+e)^2}{(m_1+m_2)^2} \Rightarrow$$
$$\kappa = \frac{K'_2}{K_1} = \frac{m_1 m_2 (1+e)^2}{(m_1+m_2)^2}$$

Η τελευταία σχέση δίνει το κλάσμα κ της κινητικής ενέργειας που μεταφέρεται κατά την κρούση και αν θέσουμε $\frac{m_1}{m_2} = \lambda$ γράφεται: $\kappa = \frac{\lambda(1+e)^2}{(1+\lambda)^2}$.

Η μεγιστοποίηση της τιμής του κ προσδιορίζεται με χρήση του Διαφορικού Λογισμού:

$$\frac{d\kappa}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{(1+e)^2(1+\lambda)^2 - 2\lambda(1+\lambda)(1+e)^2}{(1+\lambda)^4} = 0 \Rightarrow (1+e)^2 \left[\frac{(1+\lambda)^2 - 2\lambda(1+\lambda)}{(1+\lambda)^4} \right] = 0 \Rightarrow$$
$$(1+e)^2 \left[\frac{1-\lambda}{(1+\lambda)^3} \right] = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\frac{d^2\kappa}{d\lambda^2} = (1+e)^2 \left[\frac{-(1+\lambda)^3 - 3(1-\lambda)(1+\lambda)^2}{(1+\lambda)^6} \right] \Rightarrow \frac{d^2\kappa}{d\lambda^2} = 2(1+e)^2 \frac{(\lambda-2)}{(1+\lambda)^4} \xrightarrow{\lambda=1} \frac{d^2\kappa}{d\lambda^2} < 0$$

Άρα, η μεταφορά κινητικής ενέργειας μεγιστοποιείται όταν $\lambda=1$, δηλαδή $m_1=m_2$ και ανεξάρτητα από το είδος της κρούσης που καθορίζεται από την τιμή του συντελεστή αποκατάστασης e . Πλήρης η αντίθεση με τη διαισθητική προσέγγιση που οδηγεί στη σχέση $m_1=em_2$. Έτσι αιτιολογείται το ότι η μεγιστοποίηση της μεταφοράς κινητικής ενέργειας στην **2^η εφαρμογή** (πλαστική κρούση, $e=0$) και στην **6^η εφαρμογή** (ελαστική κρούση, $e=1$) συμβαίνει , όταν $m_1=m_2$.

Από τη σχέση $\kappa = \frac{\lambda(1+e)^2}{(1+\lambda)^2}$ για $\lambda=1$ προκύπτει ότι: αν $e=1$, $\kappa=1$ (100%) και

αν $e=0$, $\kappa=0,25$ (25%), όπως έχει δειχθεί.

$$\text{Γενικά, } \kappa_{\max} = \frac{(1+e)^2}{4} .$$

Η διαίσθηση θέλει για να γίνεται μέγιστη η μεταφορά κινητικής ενέργειας να μηδενίζεται η κινητική ενέργεια του αρχικά κινούμενου σώματος · δεν συνεκτιμά ότι τότε οι απώλειες προς το περιβάλλον μπορεί να είναι μεγαλύτερες από την κινητική ενέργεια που μεταφέρεται.

Εφαρμογή 7η

Η κατακόρυφη ράβδος ΟΓ του σχήματος που είναι αρθρωμένη στο άκρο της Ο θεωρείται μικρού πάχους έχει μάζα Μ και το μήκος της είναι L. Βλήμα μάζας m αμελητέων διαστάσεων που κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου u_0 συγκρούεται ελαστικά με την ράβδο σε απόσταση x από το άκρο Ο της ράβδου. Μετά την κρούση το βλήμα κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση και η ράβδος αρχίζει να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Ο.

Με δεδομένες (σταθερές) τις τιμές m και u_0 , να δείξετε ότι η κινητική ενέργεια K_p που αποκτά η ράβδος μετά την κρούση γίνεται μέγιστη, όταν $I_{p(O)} = mx^2$ και να υπολογίσετε την μέγιστη τιμή της. Δίνεται η ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_{p(O)} = \frac{1}{3}ML^2$.

Λύση

Κατά τη διάρκεια της κρούσης στη ράβδο ασκούνται η οριζόντια ισχυρή κρουστική δύναμη $\vec{F}$, η βαρυτική δύναμη $\vec{W}_p$ και η δύναμη από την άρθρωση $\vec{A}$. Στο βλήμα ασκούνται η οριζόντια ισχυρή κρουστική δύναμη $\vec{F}'$ και η βαρυτική δύναμη $\vec{W}_b$. Για το σύστημα βλήμα-ράβδος οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων $\vec{W}_p$, $\vec{W}_b$ και $\vec{A}$ ως προς το σημείο Ο είναι μηδέν και στροφορμή του συστήματος ως προς το σημείο Ο διατηρείται:

$$mxu_0 = -mxu + (I_{p(O)} + mx^2)\omega \Rightarrow u_0 + u = \frac{I_{p(O)}}{mx}\omega \quad (1)$$

Η κινητική ενέργεια βλήματος – ράβδου κατά την κρούση διατηρείται:

$$\text{Η κινητική ενέργεια του βλήματος πριν την κρούση είναι : } K_{\beta n} = \frac{1}{2}mu_0^2$$

$$\text{Η κινητική ενέργεια του βλήματος μετά την κρούση είναι : } K_{\beta \mu} = \frac{1}{2}mu^2$$

$$\text{Η κινητική ενέργεια της ράβδου μετά την κρούση είναι : } K_{p,\mu} = \frac{1}{2}I_{p(O)}\omega^2$$

Η κινητική ενέργεια βλήματος – ράβδου κατά την κρούση διατηρείται:

$$\frac{1}{2}mu_0^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}I_{p(O)}\omega^2 \Rightarrow u_0^2 - u^2 = \frac{I_{p(O)}}{m}\omega^2 \quad (2)$$

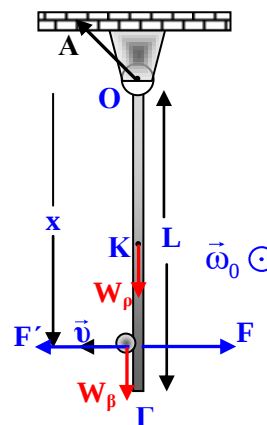
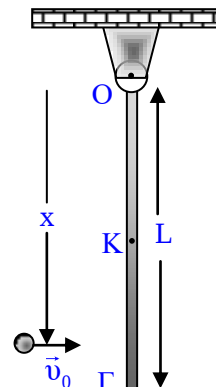
$$\text{Από τη διαίρεση κατά μέλη των (2) και (1) : } u_0 - u = \omega x \quad (3)$$

$$\text{Από την πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (3) : } 2u_0 = \frac{I_{p(O)}}{mx}\omega + \omega x \Rightarrow \omega = \frac{2mxu_0}{I_{p(O)} + mx^2} \quad (4)$$

$$\text{Από (3) } \Rightarrow u = u_0 - \frac{2mx^2u_0}{I_{p(O)} + mx^2} \Rightarrow u = \frac{(I_{p(O)} - mx^2)u_0}{I_{p(O)} + mx^2} \quad (5)$$

Η κινητική ενέργεια της ράβδου μετά την κρούση είναι:

$$K_{p,\mu} = \frac{1}{2}I_{p(O)}\omega^2 \xRightarrow{(4)} K_{p,\mu} = \frac{1}{2}I_{p(O)}\left(\frac{2mxu_0}{I_{p(O)} + mx^2}\right)^2 \Rightarrow K_{p,\mu} = \frac{1}{2}I_{p(O)}\frac{4m^2x^2u_0^2}{(I_{p(O)} + mx^2)^2} \Rightarrow K_{p,\mu} = K_{\beta n}\frac{4mx^2I_{p(O)}}{(I_{p(O)} + mx^2)^2}$$



$$\Rightarrow K_{\rho,\mu} = K_{\beta,\eta} \frac{4I_{\rho(O)}mx^2}{I_{\rho(O)}^2 + 2I_{\rho(O)}mx^2 + m^2x^4} \Rightarrow K_{\rho,\mu} = K_{\beta,\eta} \frac{4}{\frac{I_{\rho(O)}}{mx^2} + \frac{mx^2}{I_{\rho(O)}} + 2}.$$

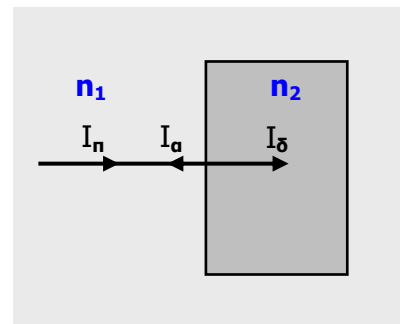
Αν θέσουμε $\frac{I_{\rho(O)}}{mx^2} = \lambda$, η τελευταία σχέση γράφεται : $K_{\rho\mu} = K_{\beta,\eta} \frac{4}{\lambda + 2 + \frac{1}{\lambda}}$. Η συνάρτηση

$$f(\lambda) = \frac{1}{(\lambda + 2 + \frac{1}{\lambda})} \text{ κατά τα γνωστά παίρνει τη μέγιστη τιμή της, όταν } \lambda=1, \text{ δηλαδή } I_{\rho(O)} = mx^2 \text{ και}$$

η μέγιστη τιμή της $K_{2\mu}$ είναι $K_{\rho\mu \max} = K_{\beta,\eta}$. Όπως αναμένεται, όταν η κινητική ενέργεια της ράβδου μετά την κρούση γίνεται μέγιστη από την (5) προκύπτει $u=0$ καθώς όλη η κινητική ενέργεια του βλήματος πριν την κρούση μεταφέρεται στη ράβδο της οποίας η μέγιστη τιμή κινητικής ενέργειας είναι τετραπλάσια σε σχέση με αυτήν στην 5^η εφαρμογή. Και εδώ η προσαρμογή εμπέδησης σχετίζεται με την «εμπέδηση=ροπή αδράνειας».

Εφαρμογή 8η

Ακτίνα φωτός έντασης I_n προσπίπτει κάθετα στη διαχωριστική επιφάνεια δύο οπτικών μέσων διαδιδόμενη από το οπτικό μέσο (1) με δείκτη διάθλασης n_1 προς το οπτικό μέσο (2) με δείκτη διάθλασης n_2 . Αν I_a είναι η ένταση της ανακλωμένης ακτίνας και I_δ είναι η ένταση της διαθλωμένης ακτίνας, να δείξετε ότι η ένταση της διαθλωμένης ακτίνας, I_δ γίνεται μέγιστη, όταν $n_1=n_2$ και να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της.



Λύση

Η ένταση I_n της προσπίπτουσας ακτινοβολίας συνδέεται με τις εντάσεις I_a και I_δ της ανακλωμένης και διαθλωμένης ακτινοβολίας αντίστοιχα με τη σχέση:

$$I_n = I_a + I_\delta \Rightarrow I_\delta = I_n - I_a \quad (1)$$

Οι εντάσεις I_n και I_a συνδέονται με τους δείκτες διάθλασης n_1 του οπτικού μέσου στο οποίο βρίσκεται η προσπίπτουσα ακτινοβολία και n_2 του οπτικού μέσου στο οποίο θα διαδοθεί με τη

σχέση:

$$I_a = I_n \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad (2)^*$$

Από (1) και (2) : $I_\delta = I_n - I_n \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \Rightarrow I_\delta = I_n \left(1 - \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \right)$

$$\Rightarrow I_\delta = I_n \frac{4n_1n_2}{n_2^2 + 2n_1n_2 + n_1^2} \Rightarrow I_\delta = 4I_n \frac{1}{\frac{n_1}{n_2} + 2 + \frac{n_2}{n_1}}$$

Αν θέσουμε $\frac{n_1}{n_2} = \lambda$, η τελευταία σχέση γράφεται: $I_\delta = 4I_n \frac{1}{\lambda + 2 + \frac{1}{\lambda}} \quad (3).$

Η συνάρτηση $f(\lambda) = \frac{1}{(\lambda + 2 + \frac{1}{\lambda})}$ πάλι συνοδεύεται από τον παράγοντα 4 και σύμφωνα με την

εισαγωγική ανάλυση παίρνει την μέγιστη τιμή της, όταν $\lambda=1$, δηλαδή $n_1=n_2$ και η μέγιστη τιμή της I_δ είναι $I_{\delta \max} = I_n$. Πράγματι, αν $n_1=n_2$, η φωτεινή ακτίνα δεν αλλάζει τη διεύθυνση διάδοσής της

και όλη η ένταση της ακτινοβολίας μεταφέρεται στο οπτικό μέσο δείκτη διάθλασης n_2 . Εδώ η *προσαρμογή εμπίδησης* σχετίζεται με την «εμπέδηση = δείκτης διάθλασης».

* Σε σχέση με την απόδειξη της σχέσης **(2)** ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται μπορεί να ανατρέξει σε παλαιότερη ανάρτηση του γράφοντος στο ylikonet.gr με τίτλο [«Κυματικά φαινόμενα στο περιθώριο της Λυκειακής διδασκαλίας»](#) (σελ. 12 σχέση 20), όπου σε ηχητικό κύμα αποδεικνύεται η αντίστοιχη της σχέσης **(2)** με τις ακουστικές εμπεδήσεις. Το θέμα που παρουσιάζεται εκεί, θα μπορούσε να αποτελεί και μια ακόμη εφαρμογή της παρούσας μελέτης.

Συμπερασματικά, η συνάρτηση $f(\lambda)$ βλέπουμε να εμφανίζεται σε διαφορετικές φυσικές διαδικασίες στις οποίες υπάρχει ένα φυσικό μέγεθος που διατηρείται (το φορτίο, η ορμή...) και μια παράμετρος που είναι συνάρτηση δευτέρου βαθμού του εν λόγω διατηρούμενου μεγέθους (ενέργεια πυκνωτή, κινητική ενέργεια...). Η επαναλαμβανόμενη εμφάνισή της μας οδηγεί *mutatis mutandis* σε αντιστοιχίες πίσω από τις οποίες όμως μπορεί να υπάρχει διαφορετική Φυσική.

Τέλος, το «Θεώρημα Jacobi» ή «Θεώρημα μέγιστης ισχύος» με τη βοήθεια της συνάρτησης $f(\lambda)$ μας έδωσε την δυνατότητα για τη διασταλτική εφαρμογή της *προσαρμογής εμπίδησης* σε φαινόμενα με διαφορετικές θεμελιώδεις φυσικές αρχές.

Επιμύθιο

Η παρούσα εργασία είχε ως αφετηρία την πρόθεση να δοθεί ως εφαρμογή το Θεώρημα Μέγιστης Ισχύος στα πλαίσια της συρρικνωμένης παρουσίασης του εναλλασσόμενου ρεύματος. Η σκέψη ότι διδάχθηκα και διδάσκω το εν λόγω θεώρημα επί δεκαετίες, χωρίς να με απασχολήσει ποιος το διετύπωσε, με οδήγησε στην αναζήτηση και την συνακόλουθη έκπληξη για όσα αναφέρονται στην εισαγωγή. Διδάσκουμε το $N \cdot Ohm$, το $N \cdot Joule$, αλλά λέμε «Θεώρημα μέγιστης ισχύος». Θα άξιζε όσοι ασχολούνται με την Ιστορία της Φυσικής να αναζητήσουν το λόγο. Είναι φορές που κάποιοι με αξιόλογο επιστημονικό έργο δεν παίρνουν τη θέση που τους αναλογεί από συγκυρίες ή ως θύματα μιας ευρύτερης οικογενειακής αίγλης που την μονοπωλούν άλλα επιφανέστερα μέλη της οικογένειας. Στην περίπτωση του Moritz Herman von Jacobi, ίσως ο νεότερος και διάσημος αδελφός του, ο Μαθηματικός Carl Gustav Jacob Jacobi να μην άφησε περιθώρια. Ίσως...

Η αναζήτηση βιβλιογραφίας με οδήγησε σε δύο εργασίες (Αναφορές 4 και 5) με καθαρά διδακτικούς στόχους οι οποίες εκατόν εβδομήντα χρόνια μετά από τη διατύπωση του θεωρήματος (1840) το αξιοποίησαν εντυπωσιακά. Αποφάσισα να εμπλουτίσω το εγχείρημα με τις εφαρμογές που αναφέρονται στο εναλλασσόμενο ρεύμα και τις κρούσεις που συμμετέχει στερεό σώμα και να γράψω τα σχόλια που αναδεικνύουν τις ομοιότητες και τις διαφορές που παρουσιάζουν διαδικασίες που καταλήγουν σε ίδιους φορμαλισμούς καθώς και τη διερεύνηση που περιγράφεται στην **6^η εφαρμογή**.

Καταληκτικά, πάντα υπάρχουν περιθώρια για νέες διδακτικές προσεγγίσεις, ανάδειξη γόνιμων αντιστοιχιών. Απαραίτητη η επισήμανση ότι ίδια μαθηματικά μοτίβα μπορεί και να προέρχονται από διαφορετική Φυσική.

Αναφορές

1. www.encyclopedia.com
2. www.eti.kit.edu
3. www.saint-petersburg.com
4. Physical collisions and the maximum power theorem: an analogy between mechanical and electrical situations. Mark Harrison IOP science
5. Energy transfer and a recurring mathematical function. Keith Atkin IOP science