Χάντρα σε σύρμα

Τερλεμές Σπύρος
spyrosssterlemes@gmail.com
18-6-2021

Έστω μια χάντρα που είναι περασμένη σε σύρμα y=f(x), και κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας. Η Lagragian του συστήματος (αδέσμευτη) είναι:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mf'^2\dot{x}^2 - mgf$$

(1)

Όπου $f' = df/dx$. Εφόσον η χάντρα ακολουθεί καθορισμένη φυσική τροχιά, τότε από τις εξισώσεις Euler-Lagrange έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mf''f'\dot{x}^2 - mgf'$$

(2)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} + f'^2\dot{x})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m(\ddot{x} + \ddot{x}f'^2 + 2f'f''\,\dot{x}^2)$$

(3)

Οπότε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \Longrightarrow \ddot{x} + \ddot{x}f'^2 + f'f''\dot{x}^2 + gf' = 0$$

(4)

Παρατηρούμε, ότι όταν η χάντρα βρίσκεται σε σημεία τοπικού ακροτάτου f'=0, τότε από την σχέση (4) παίρνουμε $\ddot{x} = 0$ το οποίο είναι αναμενόμενο αφού σε εκείνες τις θέσεις η εφαπτομένη της τροχιάς είναι οριζόντια και οριζοντίως δεν έχουμε καμία δύναμη ώστε να προκαλέσει αύξηση (ή μείωση) της επιτάχυνσης.

Διαφορετικά, εφόσον η Lagragian δεν είναι εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου, η Hamiltonian παραμένει αναλλοίωτη σε όποια χρονική μεταβολή, οπότε:

$$H = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy = E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mf'^2\dot{x}^2 + mgf$$

(5)

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση, και εφόσον $\dot{H} = 0$, παίρνουμε την εξίσωση κίνησης (4).

Η σχέση (5) είναι αρκετά χρήσιμη γιατί μπορεί να μας δώσει τον χρόνο που απαιτείται από την χάντρα για να διανύσει ένα ορισμένο διάστημα. Δηλαδή:

$$\frac{1}{2}m(1+f'^2)\dot{x}^2 = E - mgf \Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{c-2gf}{1+f'^2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{c-2gf}{1+f'^2}}$$

(6)

Όπου $c = 2E/m.$ Έστω ότι η χάντρα πηγαίνει από μια θέση με $x = a$ σε μια θέση με $x = b,$ τότε ολοκληρώνοντας την (6) παίρνουμε τον χρόνο που χρειάζεται η χάντρα για αυτήν την μετατόπιση :

$$t = \int_a^b \sqrt{\frac{1+f'^2}{c-2gf}}dx$$

(7)

Υποθέτουμε ότι έχουμε διαφορετικά και ξεχωριστά σύρματα. Το ένα περιγράφεται από την συνάρτηση $f(x) = x^2$ και το άλλο από την $h(x) = x.$ Έχουμε δύο χάντρες μάζας m=2kg, οι οποίες ξεκινούν (αφήνονται) από τα σημεία (1,1), η μια στην f και η άλλη στην h. Θέλουμε να συγκρίνουμε σε ποιο σύρμα, η χάντρα χρειάζεται λιγότερο και σε ποιο περισσότερο χρόνο για να διανύσει μια ορισμένη απόσταση. Η εξίσωση (7) γίνεται για το πρώτο σύρμα:

$$t_f = \int_1^b \sqrt{\frac{1+4x^2}{c-2gx^2}}dx$$

(8)

Για το δεύτερο σύρμα:

$$t_h = \int_1^b \sqrt{\frac{2}{c-2gx}}dx$$

(9)

Η σταθερά εκφράζει μια σχέση της ολικής ενέργειας η οποία σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες είναι ίδια σε κάθε χάντρα. Η αρχική ενέργεια είναι E=20J άρα c=2E/m=20J/kg. Συγκρίνουμε τα ολοκληρώματα, (αντικαθιστώντας $g = 10m/s$) υποθέτοντας αρχικά ότι $t_f > t_h$:

$$\int_1^b \sqrt{\frac{1+4x^2}{20-20x^2}}dx > \int_1^b \sqrt{\frac{2}{20-20x}}dx \Rightarrow \int_1^b (\sqrt{\frac{1+4x^2}{20-20x}} - \sqrt{\frac{2}{20-20x}})\, dx > 0$$

(10)

Επομένως έχουμε ότι η ολοκληρωτέα πρέπει να είναι θετική, άρα:

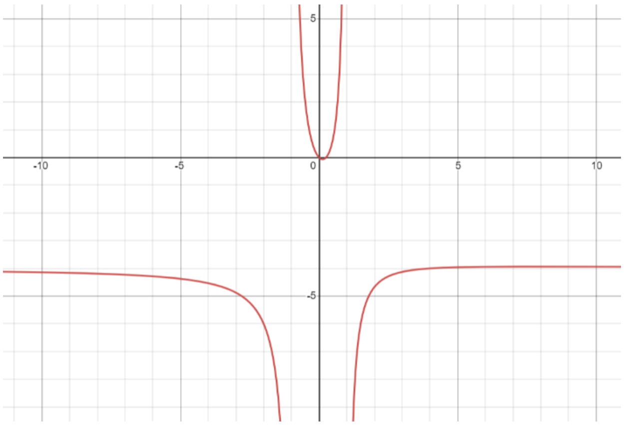
$$\frac{1+4x^2}{20-20x^2} > \frac{2}{20-20x} \Rightarrow \frac{1+4x^2}{1-x^2} > \frac{1}{1-x}$$

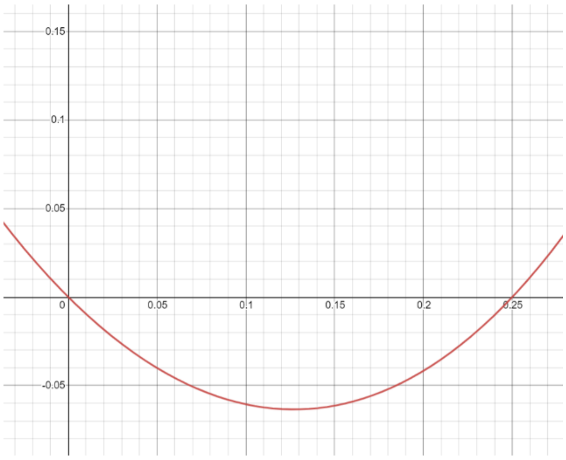
Δηλαδή πρέπει να ισχύει ότι:

$$\frac{1}{1-x}\left(\frac{1+4x^2}{1+x} - 1\right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{1-x}\left(\frac{4x^2-x}{1+x}\right) > 0 \Rightarrow \frac{x}{1-x}\frac{4x-1}{1+x} > 0$$

(11)

Κάνοντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (4x-1)x/(1-x^2)$ έχουμε, ότι η f είναι θετική όταν το x ανήκει στα διαστήματα $x\epsilon(-1,0) \cup (0.25, 1)$





Αυτό σημαίνει ότι σύμφωνα με την αρχική μας υπόθεση, ο χρόνος που απαιτείται για να διανυθεί ένα διάστημα στην παραβολή, είναι μεγαλύτερος από αυτόν που απαιτείται στην ευθεία, όταν το $x\epsilon(-1,0) \cup (0.25, 1)$ ενώ μικρότερος στο υπόλοιπο. Έτσι, αν αφήσουμε για παράδειγμα την χάντρα από ύψος ενός μέτρου στην παραβολή, μέχρι να φτάσει στο σημείο (0.25, 0.0625) διανύει κάθε τυχαίο διάστημα, αργότερα από αυτό που θα διένυε η χάντρα στο ευθύ σύρμα.