Ιστορικά Προβλήματα

- Το παράδοξο του De Méré (1654)

Τον 17^o αιώνα συνήθιζαν να παίζουν ρίχνοντας ένα κανονικό ζάρι τέσσερις φορές ποντάροντας ότι θα έρθει ένα τουλάχιστον «6» (Π1). Σύμφωνα με ένα «παλιό νόμο των παικτών» αυτό είναι ισοδύναμο με το να έρθει τουλάχιστον μία φορά «(6,6)» ρίχνοντας δύο κανονικά ζάρια 24 φορές (Π2).

Αυτό, διότι ο λόγος 4 (ρίψεις) προς 6 (αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων στο Π1) είναι ίσος με το λόγο του 24 (ρίψεις) προς 36 (αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων στο Π2).

Ο Chevalier de Méré (1607-1684), γάλλος ευγενής και διάσημος παίκτης τυχερών παιχνιδιών παρατήρησε ότι όταν στοιχημάτιζε με το παιχνίδι Π1 κατά κανόνα κέρδιζε (σε μεγάλο πλήθος παιχνιδιών). Όταν όμως στοιχημάτιζε με το παιχνίδι Π2 τότε έχανε, κάτι που κατά τη γνώμη του ήταν μεγάλο σκάνδαλο και σήμαινε ότι τα αριθμητικά θεωρήματα δεν είναι πάντα αληθή και ότι η αριθμητική πέφτει σε αντιφάσεις.

Απευθύνθηκε στον Pascal, ο οποίος με τη σειρά του απευθύνθηκε στο φίλο του Fermat και έλυσαν το πρόβλημα.

Λύση. (α) Αν θέσουμε $X_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$, ο δειγματικός χώρος Ω_1 του πειράματος τύχης που εκτελούμε (ρίψη ζαριού 4 φορές) είναι ο $\Omega_1 = \{(a_1,a_2,a_3,a_4) : a_i \in X_1, i = 1,2,3,4\} = X_1 \times X_1 \times X_1 \times X_1 = X_1^4$, όπου το στοιχείο a_i συμβολίζει την ένδειξη της $i-$οστής ρίψης. Άρα, $|\Omega_1| = |X_1^4| = |X_1|^4 = 6^4 = 1296$. Ορίζουμε το ενδεχόμενο A_1: καμία από τις 4 ενδείξεις δεν είναι «6», και είναι φανερό ότι η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει είναι η $P(A_1^{'}) = 1 - P(A_1)$. Όμως, για το ενδεχόμενο A_1 έχουμε $A_1 = \{(a_1,a_2,a_3,a_4) \mid a_i \in \{1,2,3,4,5\}\}$, δηλαδή το A_1 αποτελείται από όλες τις επαναληπτικές διατάξεις $n = 5$ στοιχείων του συνόλου $\{1,2,3,4,5\} = X_1 - \{6\}$ ανά $k = 4$. Επομένως, $|A_1| = 5^4$ και για τη ζητούμενη πιθανότητα έχουμε:

$$P(A_1^{'}) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{|A_1|}{|\Omega_1|} = 1 - \frac{5^4}{6^4} \cong 52\%.$$

(β) Στην περίπτωση αυτή ο δειγματικός χώρος Ω_2 θα περιέχει 24-άδες (τα αποτελέσματα των 24 ρίψεων) που το κάθε στοιχείο τους θα είναι ένα ζεύγος (i, j) με $i, j \in \{1,2,3,4,5,6\}$ (το αποτέλεσμα της ρίψης δύο ζαριών). Μπορούμε να γράψουμε: $\Omega_2 = \{(a_1,\dots,a_{24}) \mid a_i \in X_2, i = 1,\dots,24\} = X_2 \times \cdots \times X_2 = X_2^{24}$,

όπου $X_2 = \{(1,1),(1,2),\dots,(6,5),(6,6)\}$, οπότε $|\Omega_2| = |X_2^{24}| = |X_2|^{24} = 36^{24}$.

Για το ενδεχόμενο A_2: σε καμιά από τις 24 ρίψεις των δύο ζαριών δεν εμφανίστηκε το αποτέλεσμα (6,6), έχουμε: $A_2 = \{(a_1,\dots,a_{24}) \mid a_i \in X_2 - \{(6,6)\}, i = 1,\dots,24\}$, οπότε $|A_2| = 35^{24}$ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A_2^{'}) = 1 - P(A_2) = 1 - \frac{|A_2|}{|\Omega_2|} = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \cong 49\%.$$

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των (α) και (β), μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης έχει το ενδεχόμενο A_1.

Ένα κουτί περιέχει 10 άσπρες, 4 μαύρες και 2 κόκκινες μπάλες. Εάν πάρουμε δύο μπάλες χωρίς επανάθεση από το κουτί να υπολογιστεί η πιθανότητα
α) και οι δύο να είναι άσπρες
β) και οι δύο να είναι κόκκινες
γ) τουλάχιστον μια να είναι άσπρη
δ) το πολύ μια να είναι άσπρη
ε) ακριβώς μια να είναι άσπρη
στ) καμία κόκκινη
ζ) καμία άσπρη

Πλήθος των δυνατών συνδυασμών: $\binom{16}{2} = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$

Έστω A_i={το δείγμα έχει i άσπρες μπάλες}, M_i={το δείγμα έχει i μαύρες μπάλες}, K_i={το δείγμα έχει i κόκκινες μπάλες}.

α) και οι δύο να είναι άσπρες $P(A_2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{6}{0}}{\binom{16}{2}} = \frac{45}{120} = 0{,}375$	β) και οι δύο να είναι κόκκινες $P(K_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{14}{0}}{\binom{16}{2}} = \frac{1}{120} = 0{,}008$
γ) τουλάχιστον μια να είναι άσπρη $P(A_{i\geq 1}) = 1 - P(A_0) = 1 - \frac{\binom{10}{0}\binom{6}{2}}{\binom{16}{2}} = 1 - \frac{15}{120} = 0{,}875$	δ) το πολύ μια να είναι άσπρη $P(A_{i\leq 1}) = P(A_0) + P(A_1) =$ $= \frac{\binom{10}{0}\binom{6}{2} + \binom{10}{1}\binom{6}{1}}{\binom{16}{2}} = \frac{15+60}{120} = 0{,}625$
ε) ακριβώς μια να είναι άσπρη $P(A_1) = \frac{\binom{10}{1}\binom{6}{1}}{\binom{16}{2}} = \frac{60}{120} = 0{,}5$	στ) καμία κόκκινη $P(K_0) = \frac{\binom{14}{2}\binom{2}{0}}{\binom{16}{2}} = \frac{91}{120} = 0{,}758$
ζ) καμία άσπρη $P(A_0) = \frac{\binom{10}{0}\binom{6}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{15}{120} = 0{,}125$	

ΖΑΡΙ – ΖΑΡΙΑ (ΡΙΧΝΟΥΜΕ ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΔΥΟ ΖΑΡΙΑ)

1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6

κάτω ή πάνω από τη διαγώνιο: 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15

μαζί με τη διαγώνιο: 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 = 15+ 6 **η ζαριά στο τάβλι παίξιμο**

όλα τα νούμερα εκτός από τη διαγώνιο 6χ6 – 6 = 36 - 6 = 30

όλα τα νούμερα με τη διαγώνιο 6χ6 = 36 **ο δειγματοχώρος της ζαριάς**

όλα τα νούμερα εκτός με τη διαγώνιο να μετράει δυο φορές 6χ6 + 6 = 36 +6 = 42

ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΟΜΟΙΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ (Δυο αντικείμενα σε έξι θέσεις, όπως το ζάρι)

αρίθμηση	1	2	3	4	5	6
1	●	●				
2	●		●			
3	●			●		
4	●				●	
5	●					●
6		●	●			
7		●		●		
8		●			●	
9		●				●
10			●	●		
11			●		●	
12			●			●
13				●	●	
14				●		●
15					●	●
16	● ●					
17		● ●				
18			● ●			
19				● ●		
20					● ●	
21						● ●

τα 21 είναι όπως η ζαριά στο τάβλι

ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΑΝΟΜΟΙΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ (Δυο αντικείμενα σε έξι θέσεις, όπως το ζάρι)

αρίθμηση	1	2	3	4	5	6
1	●	☺				
2	●		☺			
3	●			☺		
4	●				☺	
5	●					☺
6		●	☺			
7		●		☺		
8		●			☺	
9		●				☺
10			●	☺		
11			●		☺	
12			●			☺
13				●	☺	
14				●		☺
15					●	☺
16	☺	●				
17	☺		●			
18	☺			●		
19	☺				●	
20	☺					●
21		☺	●			
22		☺		●		
23		☺			●	
24		☺				●
25			☺	●		
26			☺		●	
27			☺			●
28				☺	●	
29				☺		●
30					☺	●
31	● ☺					
32		● ☺				
33			● ☺			
34				● ☺		
35					● ☺	
36	**Είναι ο δειγματοχώρος δυο ζαριών**					● ☺
37	☺ ●					
38		☺ ●				
39			☺ ●			
40				☺ ●		
41					☺ ●	
42						☺ ●

Μας ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής των στοιχείων;

ΝΑΙ

Επιτρέπεται η χρήση ενός στοιχείου περισσότερες από μία φορές;

ΝΑΙ

ΝΑΙ Η ΣΕΙΡΑ

ΟΧΙ Η ΣΕΙΡΑ

ΟΧΙ

ΟΧΙ

Επιτρέπεται η χρήση ενός στοιχείου περισσότερες από μία φορές;

ΝΑΙ

ΟΧΙ

Επαναληπτικές Διατάξεις των ν ανά κ

$(\nu \geq 1,\ k \geq 1)$

$$\frac{(\nu + k - 1)!}{(\nu - 1)!}$$

αριθμός διατεταγμένων δειγμάτων μεγέθους κ σε δειγματοληψία με επανάθεση

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ με κατανομή κ διακεκριμένων αντικειμένων σε ν διακεκριμένες περιοχές, να μπορούν πάνω από ένα αντικείμενο σε κάθε περιοχή και να παίζει ρόλο η σειρά στην ίδια περιοχή

Ρίψη ζαριών κ= 2 φορές με ν=6 έδρες το καθένα, το ένα ζάρι πράσινο, το άλλο κόκκινο, όλες οι διατεταγμένες δυάδες και στα ίδια νούμερα (1,1) … (6,6) και παίζει ρόλο και το χρώμα του ζαριού

42 αποτελέσματα

Επαναληπτικές Διατάξεις των ν ανά κ

$(\nu \geq 1,\ k \geq 1)$

$$\nu^k$$

αριθμός διατεταγμένων δειγμάτων μεγέθους κ σε δειγματοληψία με επανάθεση

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ με κατανομή κ διακεκριμένων αντικειμένων σε ν διακεκριμένες περιοχές, να μπορούν πάνω από ένα αντικείμενο σε κάθε περιοχή χωρίς να παίζει ρόλο η σειρά στην ίδια περιοχή

Ρίψη ομοίων ζαριών κ= 2 φορές με ν=6 έδρες το καθένα, όλες οι διατεταγμένες δυάδες και τα ίδια νούμερα (1,1) … (6,6) επιτρέπονται

36 αποτελέσματα

Διατάξεις των ν ανά κ

$(1 \leq k \leq \nu)$

$$\Delta_k^{\nu} = \nu(\nu - 1)\ldots(\nu - k + 1) = \\ = \frac{\nu!}{(\nu - k)!}$$

(αριθμός διατεταγμένων δειγμάτων μεγέθους κ σε δειγματοληψία χωρίς επανάθεση)

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ με κατανομή κ διακεκριμένων αντικειμένων σε ν διακεκριμένες περιοχές, χωρίς να μπορούν πάνω από ένα αντικείμενο σε κάθε περιοχή

Ρίψη ομοίων ζαριών κ= 2 φορές με ν=6 έδρες το καθένα, όλες οι διατεταγμένες δυάδες και τα ίδια νούμερα (1,1) … (6,6) δεν επιτρέπονται

30 *αποτελέσματα*

Επαναληπτικοί συνδυασμοί των ν ανά κ

$(\nu \geq 1,\ k \geq 1)$

$$\begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix} = \binom{\nu + k - 1}{k} = \frac{(\nu + k - 1)!}{k! \cdot (\nu - 1)!}$$

(αριθμός μη διατεταγμένων δειγμάτων μεγέθους κ σε δειγματοληψία με επανάθεση)

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ με κατανομή κ μη διακεκριμένων αντικειμένων σε ν διακεκριμένες περιοχές, να μπορούν πάνω από ένα αντικείμενο σε κάθε περιοχή

Ρίψη ομοίων ζαριών κ= 2 φορές με ν=6 έδρες το καθένα, όλοι οι συνδυασμοί δυάδων και τα ίδια νούμερα (1,1) … (6,6) επιτρέπονται

η ζαριά στο τάβλι

21 αποτελέσματα

Συνδυασμοί των ν ανά κ

$(1 \leq k \leq \nu)$

$$\binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k! \cdot (\nu - k)!}$$

(αριθμός μη διατεταγμένων δειγμάτων μεγέθους κ σε δειγματοληψία χωρίς επανάθεση)

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ με κατανομή κ μη διακεκριμένων αντικειμένων σε ν διακεκριμένες περιοχές, χωρίς να μπορούν πάνω από ένα αντικείμενο σε κάθε περιοχή

Ρίψη ομοίων ζαριών κ= 2 φορές με ν=6 έδρες το καθένα, όλοι οι συνδυασμοί δυάδων και τα ίδια νούμερα (1,1) … (6,6) δεν επιτρέπονται

15 αποτελέσματα