

ΘΕΩΡΙΑ 1

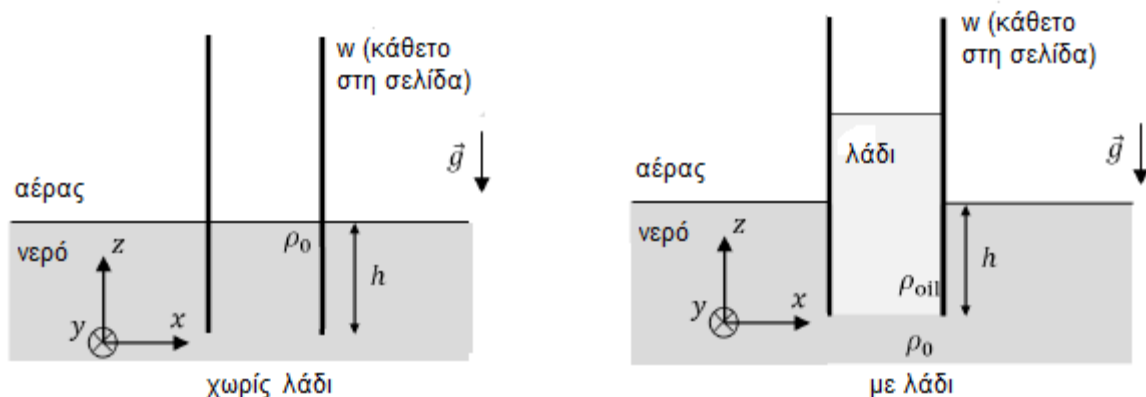
Πλανητική Φυσική

Το πρόβλημα αυτό σχετίζεται με το εσωτερικό των πλανητών και αποτελείται από δύο ανεξάρτητα μέρη. Οι επιδράσεις της καμπυλότητας της επιφάνειας των πλανητών θεωρούνται αμελητέες. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ακόλουθη σχέση:

$$(1 + x)^{\epsilon} \approx 1 + \epsilon x, \text{ όταν } |x| \ll 1$$

Μέρος Α. Μεσοωκεάνια ράχη (Ωκεάνια Κορυφογραμμή)

Θεωρήστε ένα μεγάλο δοχείο με νερό το οποίο βρίσκεται μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g . Δύο πλάκες σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, παράλληλες μεταξύ τους, τοποθετούνται κατακόρυφα κατά τρόπο που να μην είναι δυνατό να μετακινηθούν μέσα στο δοχείο και έτσι ώστε τα κατακόρυφα άκρα τους να εφάπτονται χωρίς κενό με τα κατακόρυφα τοιχώματα του δοχείου. Μήκος h κάθε μίας πλάκας είναι βυθισμένο στο νερό (Εικ. 1). Το πλάτος των πλακών κατά μήκος του άξονα y όπως αυτός σημειώνεται στο σχήμα ορίζουν το επίπεδο w . Θεωρήστε ότι κανένα υγρό δεν μπορεί να εισέλθει ή να εξέλθει στο χώρο ανάμεσα στις πλάκες από τα τοιχώματα του δοχείου. Η πυκνότητα του νερού είναι ρ_0 .



Εικ. 1 Παράλληλες πλάκες βυθισμένες σε νερό

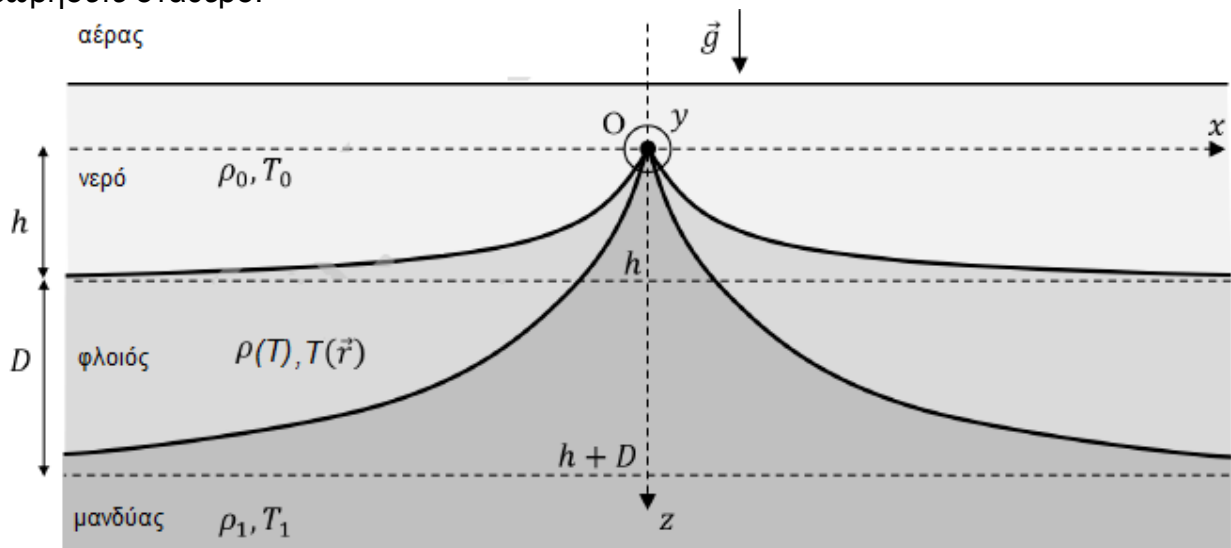
Λάδι πυκνότητας $\rho_{oil} = \rho_1$ ($\rho_1 < \rho_0$) χύνεται στο χώρο μεταξύ των πλακών μέχρι το χαμηλότερο επίπεδο λαδιού να φτάσει στα κάτω άκρα των πλακών. Να θεωρήσετε ότι τόσο τα τοιχώματα των δύο πλακών όσο και οι άκρες των τοιχωμάτων του δοχείου εκτείνονται σε αρκετό ύψος ώστε να μην υπάρχει περίπτωση να υπερχειλίσει το λάδι. Να αγνοήσετε τα φαινόμενα που οφείλονται στην επιφανειακή τάση ή στην ανάμιξη των υγρών στο όριο της διαχωριστικής τους επιφάνειας.

A1. Να υπολογίσετε την οριζόντια συνιστώσα F_x της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στην δεξιά πλάκα (μέτρο και κατεύθυνση).

Στην Εικ. 2 φαίνεται η διατομή μιας μεσοωκεάνιας ράχης. Στη μεσοωκεάνια ράχη διακρίνονται τα ακόλουθα στρώματα: (i) μανδύας, (ii) φλοιός και (iii) νερό του ωκεανού. Ο μανδύας αποτελείται από πετρώματα που υποθέτουμε ότι μπορούν να ρέουν σε γεωλογικές χρονικές κλίμακες και επομένως, σε αυτό το πρόβλημα θα αντιμετωπίζεται ως υγρό. Το πάχος του φλοιού είναι πολύ μικρότερο από τη χαρακτηριστική κλίμακα μήκους της x – διεύθυνσης, ως εκ τούτου, ο φλοιός συμπεριφέρεται ως πλάκα που μπορεί να κάμπτεται ελεύθερα. Με μεγάλη ακρίβεια, μια τέτοια ράχη μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα δισδιάστατο σύστημα, το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο της Εικ. 2 και κατά μήκος του άξονα y δεν μεταβάλλεται κάποια από τις μεταβλητές. Να υποθέσετε ακόμα ότι το μήκος της κορυφογραμμής L κατά μήκος του άξονα y είναι πολύ μεγαλύτερο από οποιοδήποτε άλλο μήκος εμφανίζεται στο πρόβλημα αυτό.

Να θεωρήσετε ότι στην κορυφή (κέντρο της ράχης) το πάχος του φλοιού είναι μηδέν. Όσο η απόσταση x δεξιά και αριστερά από το μέσο της ράχης αυξάνεται τόσο το πάχος του φλοιού αυξάνεται και τείνει προς την σταθερή τιμή D όταν η απόσταση από το μέσο τείνει στο άπειρο, $x \rightarrow \infty$. Αντίστοιχα, όσο η απόσταση x δεξιά και αριστερά από το μέσο της ράχης αυξάνεται τόσο το βάθος του νερού του ωκεανού εκτείνεται κατά ύψος h κάτω από

την κορυφή της ράχης O , την οποία να θεωρήσετε ως την αρχή του συστήματος συντεταγμένων που θα χρησιμοποιήσετε. Να θεωρήσετε ότι οι τιμές της πυκνότητας του νερού ρ_0 , της θερμοκρασίας του νερού T_0 , της πυκνότητας του μανδύα ρ_1 καθώς και της θερμοκρασίας του μανδύα T_1 είναι όλες σταθερές στον χώρο και στον χρόνο. Η θερμοκρασία του φλοιού T είναι ανεξάρτητη από το χρόνο αλλά εξαρτάται από τη θέση. Είναι γνωστό, με μεγάλη ακρίβεια, ότι το υλικό του φλοιού διαστέλλεται γραμμικά ανάλογα με τη θερμοκρασία T . Με δεδομένο ότι τόσο η θερμοκρασία του νερού όσο και του μανδύα είναι σταθερές, είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσετε μια τροποποιημένη εκδοχή του συντελεστή θερμικής διαστολής με βάση την αλλαγή κλίμακας. Έτσι για κάθε διάσταση θα ισχύει, $\ell(T) = \ell_1 [1 - k_\ell \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}]$, όπου ℓ είναι το μήκος του τμήματος του υλικού του φλοιού σε θερμοκρασία T , ℓ_1 το αντίστοιχο μήκος του τμήματος του φλοιού σε θερμοκρασία T_1 και k_ℓ είναι ο συντελεστής θερμικής διαστολής με βάση την αλλαγή κλίμακας, τον οποίο να θεωρήσετε σταθερό.



Εικ. 2 Μεσοωκεάνια Ράχη

A2. Υποθέτοντας ότι ο φλοιός είναι ισότροπος, να βρείτε την εξάρτηση της πυκνότητας ρ από την θερμοκρασία T . Να θεωρήσετε ότι $|k_\ell| \ll 1$ και να γράψετε την απάντησή σας σε προσεγγιστική μορφή

$$\rho(T) \approx \rho_1 [1 + k \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}]$$

όπου οι όροι δεύτερης τάξης k_ℓ^2 καθώς και ανώτερης αγνοούνται. Στη συνέχεια προσδιορίστε την τιμή της σταθεράς k .

Είναι γνωστό ότι $k > 0$. Επίσης, να θεωρήσετε σταθερή την τιμή του συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας κ του φλοιού. Κατά συνέπεια, πολύ μακριά από τον άξονα της κορυφογραμμής η θερμοκρασία του φλοιού εξαρτάται γραμμικά από το βάθος.

A3. Να θεωρήσετε ότι ο μανδύας όπως και το νερό συμπεριφέρονται ως ασυμπίεστα υγρά σε υδροστατική ισορροπία και να υπολογίσετε την σταθερή τιμή D στην οποία τείνει το πάχος του φλοιού καθώς η απόσταση από το μέσο της ράχης τείνει στο άπειρο, σε σχέση με τους όρους h , ρ_0 , ρ_1 και k . Να αγνοήσετε την όποια κίνηση του υλικού.

A4. Να εκφράσετε συναρτήσει των ρ_0 , ρ_1 , h , L , k και g την συνισταμένη οριζόντια δύναμη F η οποία ασκείται στο δεξί μισό του φλοιού ($x > 0$). Να παραληφθούν οι όροι ανώτερης τάξης για την σταθερά k (να χρησιμοποιηθεί στη χαμηλότερη τάξη).

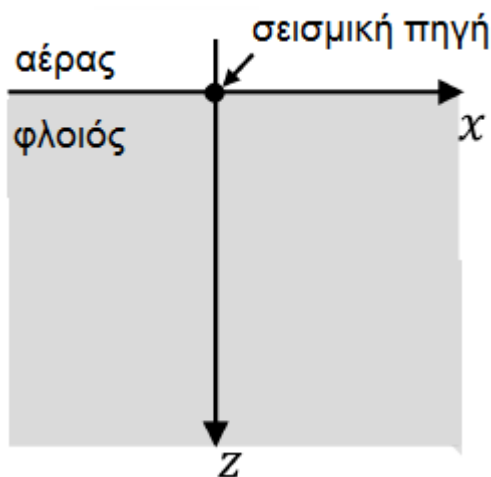
Να υποθέσετε ότι ο φλοιός της Γης είναι θερμικά μονωμένος από τα υπόλοιπα γήινα στρώματα. Ως αποτέλεσμα της θερμικής αγωγής οι θερμοκρασίες του ανώτερου και του κατώτερου στρώματος του φλοιού τείνουν να πλησιάσουν μεταξύ τους μέχρι ο φλοιός να φτάσει σε θερμική ισορροπία. Η ειδική θερμότητα (θερμοχωρητικότητα) του φλοιού είναι c και μπορεί να θεωρηθεί σταθερή.

A5. Να χρησιμοποιήσετε διαστατική ανάλυση για να εκτιμήσετε το χαρακτηριστικό χρονικό διάστημα τ στο οποίο η διαφορά θερμοκρασίας ανάμεσα στο ανώτερο και στο κατώτερο στρώμα του φλοιού, μακριά από το μέσο της ράχης τείνει να γίνει μηδέν. Να υποθέσετε ότι το χαρακτηριστικό χρονικό διάστημα τ δεν εξαρτάται από τις αρχικές θερμοκρασίες της πάνω και της κάτω επιφάνειας του φλοιού.

Μέρος Β. Σεισμικά κύματα σε ένα μέσο που αποτελείται από στρώματα (στρωματοποιημένο)

Να υποθέσετε ότι πραγματοποιείται μια σεισμική δόνηση μικρής διάρκειας στην επιφάνεια κάποιου πλανήτη. Να υποθέσετε ακόμα ότι τα σεισμικά κύματα εκπέμπονται από μια γραμμική πηγή που βρίσκεται κατά μήκος της ευθείας $z = x = 0$, όπου x είναι η οριζόντια συντεταγμένη και όπου z είναι το βάθος κάτω από την επιφάνεια (Εικ. 3). Ακόμα, να υποθέσετε ότι το μήκος της πηγής των κυμάτων είναι πολύ μεγαλύτερο από οποιοδήποτε άλλο μήκος εμπλέκεται στο ερώτημα αυτό.

Ως αποτέλεσμα της σεισμικής δόνησης, εκπέμπονται διαμήκη κύματα P ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις στο επίπεδο $x - z$, τα οποία έχουν θετική συνιστώσα κατά μήκος του άξονα z . Δεδομένου, ότι η θεωρία της διάδοσης των κυμάτων σε ένα στερεό είναι γενικά πολύπλοκη, σε αυτό το πρόβλημα θα αγνοήσουμε όλα τα άλλα κύματα που εκπέμπονται κατά τη σεισμική δόνηση. Η στρωμάτωση του φλοιού του πλανήτη έχει ως αποτέλεσμα η ταχύτητα u των διαμήκων κυμάτων P να εξαρτάται από το βάθος z σύμφωνα με τη σχέση $u = u_0(1 + \frac{z}{z_0})$, όπου u_0 είναι η ταχύτητα των κυμάτων στην επιφάνεια του πλανήτη και z_0 είναι μια γνωστή θετική σταθερά.



Εικόνα 3. Το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται στο μέρος Β

B1. Να θεωρήσετε μια ακτίνα η οποία εκπέμπεται από τη σεισμική δόνηση, σχηματίζει αρχική γωνία $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ με τον άξονα z και διαδίδεται στο επίπεδο $x - z$.

Να προσδιορίσετε την οριζόντια συντεταγμένη $x_1(\theta_0) \neq 0$ στην οποία η ακτίνα μπορεί να ανιχνευθεί στην επιφάνεια του πλανήτη. Θεωρήστε γνωστό ότι η τροχιά της ακτίνας είναι τόξο κύκλου. Η απάντησή σας να δοθεί στη μορφή $x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$ όπου οι σταθερές A και b πρέπει να υπολογιστούν ($\cot\theta = 1/\tan\theta$).

Υποθέσετε ότι η ενέργεια ανά μονάδα μήκους που ελευθερώνεται από την πηγή υπό μορφή διαμήκων κυμάτων P στον φλοιό κατά τη διάρκεια της σεισμικής δόνησης είναι E και ότι τα κύματα απορροφώνται πλήρως όταν φτάνουν στην επιφάνεια του πλανήτη από το εσωτερικό του.

B2. Να εξάγετε τη σχέση ανάμεσα στην ενέργεια ανά μονάδα εμβαδού που απορροφάται από την επιφάνεια του πλανήτη $\varepsilon(x)$ και στην απόσταση x κατά μήκος της επιφάνειας. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $\varepsilon(x)$.

Στη συνέχεια να θεωρείτε ότι τα κύματα ανακλώνται πλήρως όταν φτάνουν στο όριο της επιφάνειας του πλανήτη. Να φανταστείτε μια συσκευή κατά μήκος της ευθείας $z = x = 0$ της

ίδιας γεωμετρικής μορφής με την πηγή των κυμάτων που αναφέρθηκε προηγουμένως. Η συσκευή έχει τη δυνατότητα να εκπέμπει διαμήκη κύματα P σε μια ελεύθερα επιλεγμένη γωνιακή κατανομή. Η συσκευή ρυθμίζεται έτσι ώστε να εκπέμπει ένα σήμα σε πολύ μικρό εύρος γωνιών εκπομπής. Συγκεκριμένα, η αρχική γωνία ανάμεσα στην ευθεία διάδοσης του σήματος και την κατακόρυφο εμπίπτει στο διάστημα $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$ όπου $0 < \theta_0 < \pi/2$, $\delta\theta_0 \ll 1$ και $\delta\theta_0 \ll \theta_0$.

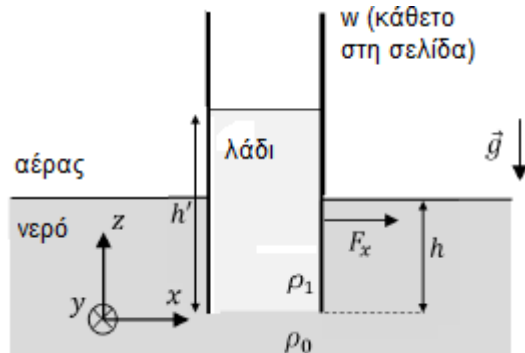
B3. Να υπολογίσετε τη μέγιστη απόσταση $x_{\max}$ από την πηγή κατά μήκος της επιφάνειας του πλανήτη, στην οποία βρίσκεται το πιο απομακρυσμένο σημείο στο οποίο δεν φτάνει το σήμα.

Να γράψετε το αποτέλεσμα σε συνάρτηση με τους όρους θ_0 , $\delta\theta_0$ και άλλων σταθερών οι οποίες δόθηκαν προηγουμένως.

Απαντήσεις

Μέρος Α

A1. Έστω h' το ύψος της στήλης λαδιού (βλ. Εικ. 1). Η πίεση σε βάθος h κάτω από την επιφάνεια του νερού πρέπει να είναι $p_h = \rho_0 g h = \rho_1 g h'$, από όπου $h' = \frac{\rho_0}{\rho_1} h$.



Εικ. 1

Η οριζόντια δύναμη στην δεξιά πλάκα είναι $F_x = F_1 - F_0$, όπου η δύναμη που οφείλεται στο λάδι είναι $F_1 = \frac{1}{2} (\rho_1 g h') h' w$ και η δύναμη που οφείλεται στο νερό είναι $F_0 = \frac{1}{2} (\rho_0 g h) h w$. Συνδυάζοντας όλα αυτά στην εξίσωση της οριζόντιας δύναμης, έχουμε

$$F_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1 \right) \rho_0 g h^2 w$$

A2. Εξετάζουμε μια ορθογώνια στοιχειώδη μάζα του φλοιού. Δεδομένου ότι η σχέση $\ell(T) = \ell_1 \left[1 - k_\ell \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right]$ ισχύει και για τις τρεις διαστάσεις του στερεού, ο όγκος V της στοιχειώδους μάζας ικανοποιεί τη σχέση

$$V = V_1 \left(1 - k_\ell \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right)^3$$

όπου V_1 είναι η όγκος σε θερμοκρασία T_1 . Εάν η στοιχειώδη μάζα είναι m , η πυκνότητα θα είναι

$$\rho(T) = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_1} \left(1 - k_\ell \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right)^{-3} = \rho_1 \left(1 - k_\ell \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right)^{-3}$$

Από το $k_\ell \ll 1$, αυτή μπορεί να προσεγγιστεί ως

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left(1 + 3k_\ell \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right)$$

και η τιμή της σταθεράς k είναι $k = 3k_\ell$.

A3. Δεδομένου ότι ο μανδύας συμπεριφέρεται σαν ένα ρευστό σε υδροστατική ισορροπία, η πίεση $p(x, z)$ στο $z = h + D$ πρέπει να είναι η ίδια για όλα τα x . Ως εκ τούτου,

$$p(0, h+D) = p(\infty, h+D)$$

Ομοίως, πρέπει να έχουμε

$$p(0, 0) = p(\infty, 0)$$

Συνεπώς, η μεταβολή της πίεσης μεταξύ $z = 0$ και $z = \infty$ πρέπει να είναι η ίδια στα δύο $x = 0$ και $x = \infty$. Στον άξονα της κορυφογραμμής

$$p(0, h+D) - p(0, 0) = \rho_1 g (h + D)$$

ενώ μακριά

$$p(\infty, h+D) - p(\infty, 0) = \rho_0 g h + \int_h^{h+D} \rho(T(\infty, z)) g dz$$

Μακριά από τον άξονα κορυφογραμμής, οι δύο επιφάνειες του φλοιού είναι ουσιαστικά οριζόντιες, πράγμα που σημαίνει ο νόμος της αγωγής θερμότητας μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{dT}{dz} = \text{σταθ.}$$

Μετά την εφαρμογή των σχετικών συνθηκών ορίων θερμοκρασίας

$$\frac{dT}{dz} = \frac{T_1 - T_0}{D}$$

από την οποία με ολοκλήρωση παίρνουμε

$$T(\infty, z) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{z-h}{D}$$

Από όλες τις παραπάνω εξισώσεις και χρησιμοποιώντας τον τύπο της πυκνότητας που δίνεται στο κείμενο του προβλήματος, έχουμε

$$\begin{aligned}\rho_1 g(h+D) &= \rho_0 g h + \int_h^{h+D} \rho_1 \left(1 + k \frac{T_1 - T_0 - (T_1 - T_0) \frac{z-h}{D}}{T_1 - T_0} \right) g dz \Rightarrow \\ \rho_1 g(h+D) &= \rho_0 g h + \rho_1 g \int_h^{h+D} \left(1 + k + \frac{kh}{D} - \frac{k}{D} z \right) dz \Rightarrow \\ \rho_1 g(h+D) &= \rho_0 g h + \rho_1 g \left(D + \frac{kD}{2} \right)\end{aligned}$$

από όπου λαμβάνουμε

$$D = \frac{2}{k} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) h$$

A4. Η οριζόντια συνισταμένη δύναμη στο μισό του φλοιού είναι η διαφορά μεταξύ των δυνάμεων εξ αιτίας της πίεσης που ασκούνται στο $x = 0$ και $x = \infty$:

$$F = L \int_0^{h+D} [p(0, z) - p(\infty, z)] dz$$

Από την προηγούμενη ερώτηση, η πίεση στο $x = 0$ είναι

$$p(0, z) = p(0, 0) + \rho_1 g z$$

ενώ είναι πολύ μακριά στο $x = \infty$ είναι

$$p(\infty, z) = \begin{cases} p(\infty, 0) + \rho_0 g z & \text{για } 0 \leq z \leq h \\ p(\infty, 0) + \rho_0 g z + \int_h^z \rho_1 \left(1 + k \frac{T_1 - T_0 - (T_1 - T_0) \frac{z'-h}{D}}{T_1 - T_0} \right) g dz' & \text{για } h \leq z \leq h + D \end{cases}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να συνδυαστούν στην

$$\begin{aligned}F &= L \int_0^{h+D} [p(0, 0) + \rho_1 g z] dz - L \int_0^h [p(\infty, 0) + \rho_0 g z] dz - \\ &- L \int_h^{h+D} [p(\infty, 0) + \rho_0 g z] dz - L \int_h^{h+D} \left[\int_h^z \rho_1 \left(1 + k \left(1 - \frac{z'-h}{D} \right) \right) g dz' \right] dz\end{aligned}$$

Το διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση

$u = z - h$, $u' = z' - h$:

$$\int_h^{h+D} \left[\int_h^z \rho_1 \left(1 + k \left(1 - \frac{z'-h}{D} \right) \right) g dz' \right] dz = \int_0^D \left[\int_0^u \rho_1 \left(1 + k \left(1 - \frac{u'}{D} \right) \right) g du' \right] du$$

Μετά από μια απλή ολοκλήρωση και χρησιμοποιώντας $p(0, 0) = p(\infty, 0)$ καθώς και το αποτέλεσμα της προηγούμενης ερώτησης,

$$F = gL \left[\rho_1 \left(\frac{h^2}{2} + hD - \frac{kD^2}{3} \right) - \rho_0 \left(\frac{h^2}{2} + hD \right) \right] = gL h^2 (\rho_1 - \rho_0) \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3k} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) \right]$$

Από το $k \ll 1$, ο όρος με το $\frac{1}{k}$ είναι της χαμηλότερης τάξης, επομένως, η απαιτούμενη απάντηση είναι

$$F \approx \frac{2gLh^2}{3k} \frac{(\rho_1 - \rho_0)^2}{\rho_1}$$

A5. Το χρονικό διάστημα τ αναμένεται να εξαρτάται από την πυκνότητα του φλοιού ρ_1 , την ειδική θερμότητά του c , τη θερμική αγωγιμότητα κ και το πάχος D . Ως εκ τούτου, μπορούμε να γράψουμε $\tau = A \rho_1^\alpha c^\beta \kappa^\gamma D^\delta$, όπου A είναι μια σταθερά χωρίς διαστάσεις. Θα υπολογίσουμε τις δυνάμεις α έως δ μέσω διαστατικής ανάλυσης.

Ορίζουμε τα σύμβολα για τις διαφορετικές διαστάσεις: L για μήκος, M για μάζα, T για χρόνο και Θ για θερμοκρασία. Τότε τα τ , ρ_1 , c , κ και D έχουν διαστάσεις T , ML^{-3} , $L^2 T^{-2} \Theta^{-1}$, $MLT^{-3} \Theta^{-1}$ και L , αντίστοιχα.

Η εξίσωση διαστάσεων είναι

$$\begin{aligned}[T] &= [ML^{-3}]^\alpha [L^2 T^{-2} \Theta^{-1}]^\beta [MLT^{-3} \Theta^{-1}]^\gamma [L]^\delta \Rightarrow \\ [T] &= [L]^{-3\alpha+2\beta+\gamma+\delta} [M]^\alpha [T]^{-2\beta-3\gamma} [\Theta]^{-\beta-\gamma}\end{aligned}$$

Για την εξισορρόπηση των δυνάμεων μήκους, μάζας, χρόνου και θερμοκρασίας, αντίστοιχα, προκύπτει το σύνολο των γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{cases} 0 = -3\alpha + 2\beta + \gamma + \delta \\ 0 = \alpha + \gamma \\ 1 = -2\beta - 3\gamma \\ 0 = -\beta - \gamma \end{cases}$$

Η επίλυση του συστήματος δίνει $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -1$, $\delta = 2$. Ως εκ τούτου,

$$\tau = A \frac{c\rho_1 D^2}{\kappa}$$

Μέρος Β

B1. Τα σεισμικά κύματα σε αυτό το πρόβλημα μπορούν να αντιμετωπιστούν χρησιμοποιώντας τη θεωρία των ακτίνων, δηλαδή, η διάδοσή τους περιγράφεται από τον νόμο διάθλασης του Snell

$$n(0)\sin\theta_0 = n(z)\sin\theta$$

όπου ο δείκτης διάθλασης είναι

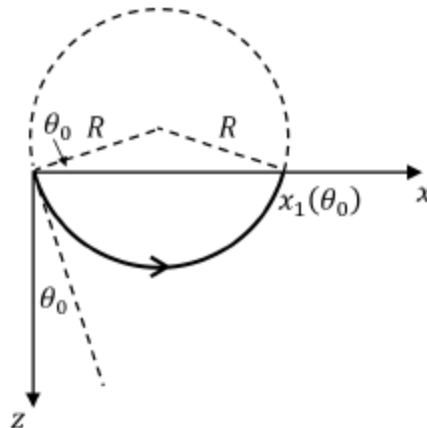
$$n(z) = \frac{c}{v(z)} = \frac{c}{v_0(1+\frac{z}{z_0})}$$

και c δηλώνει την ταχύτητα του σεισμικού κύματος σε ένα υλικό με δείκτη διάθλασης $n = 1$. Από τις δύο παραπάνω εξισώσεις έχουμε

$$(1 + \frac{z}{z_0}) \sin\theta_0 = \sin\theta$$

Η διαφορίση της εξίσωσης δίνει

$$\frac{dz}{z_0} \sin\theta_0 = \cos\theta d\theta$$



Εικ. 2

Ένα απειροστό μήκος της διαδρομής της ακτίνας $d\ell$ σχετίζεται με την μεταβολή στην κατακόρυφη συντεταγμένη

$$dz = d\ell \cos\theta$$

δίνοντας

$$d\ell = \frac{z_0}{\sin\theta_0} d\theta$$

Αυτή είναι εξίσωση ενός τόξου κύκλου ακτίνας $R = \frac{z_0}{\sin\theta_0}$ (βλ. Εικ. 2).

Με απλή γεωμετρία παίρνουμε

$$x_1(\theta_0) = 2R \cos\theta_0$$

και τελικά

$$x_1(\theta_0) = 2z_0 \cot\theta_0 \Rightarrow x_1(\theta_0) = A \cot(b\theta_0)$$

δηλαδή $A=2z_0$ και $b=1$.

B2. Σε δύο διαστάσεις, η ενέργεια που μεταφέρουν οι ακτίνες που εκπέμπονται στο διάστημα $[\theta_0, \theta_0+d\theta_0]$ είναι $\frac{E}{\pi}d\theta_0$. Από την άλλη πλευρά, η ενέργεια που μεταφέρεται από τις ακτίνες που φτάνουν στο διάστημα $[x, x+dx]$ της επιφάνειας του πλανήτη είναι edx . Ως εκ τούτου,

$$\varepsilon = \frac{E}{\pi} \left| \frac{d\theta_0}{dx} \right|$$

Με διαφορίση του αποτελέσματος της ερώτησης B1 παίρνουμε

$$dx = -\frac{Ab}{\sin^2(b\theta_0)} d\theta_0 \Rightarrow \frac{dx}{d\theta_0} = -\frac{Ab}{\sin^2(b\theta_0)}$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση $\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\cot^2\varphi}$ έχουμε

$$\frac{dx}{d\theta_0} = -Ab(1+\cot^2(b\theta_0)) = -Ab(1 + \frac{x^2}{A^2}) = -\frac{b}{A}(A^2 + x^2)$$

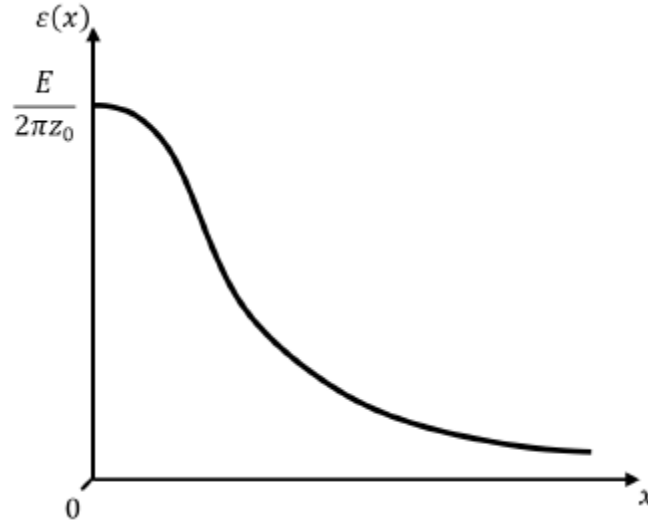
Ως εκ τούτου,

$$\varepsilon(x) = \frac{E}{\pi} \frac{A}{b(A^2 + x^2)}$$

και τελικά

$$\varepsilon(x) = \frac{2z_0 E}{\pi(4z_0^2 + x^2)}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής απεικονίζεται στην Εικ. 3.



Εικ.3 Γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varepsilon(x)$

B3. Ονομάζουμε x_1 την οριζόντια απόσταση του σημείου του εδάφους από την πηγή του κύματος όπου ανακλάται για πρώτη φορά το σήμα που εκπέμπεται από την πηγή υπό γωνία θ_0 με τον άξονα z και $x_- = x_1(\theta_0 - \frac{\delta\theta_0}{2})$, $x_+ = x_1(\theta_0 + \frac{\delta\theta_0}{2})$ τις οριζόντιες αποστάσεις από την πηγή του κύματος στις οποίες ανακλώνται για πρώτη φορά οι άκρες του σήματος. Χρησιμοποιώντας την απάντηση του ερωτήματος B1, παίρνουμε

$$x_1 = A \cot(b\theta_0)$$

$$x_- = A \cot(b(\theta_0 - \frac{\delta\theta_0}{2}))$$

$$x_+ = A \cot(b(\theta_0 + \frac{\delta\theta_0}{2}))$$

Η οριζόντια απόσταση $|x_+ - x_-|$ μεταξύ των σημείων όπου οι άκρες του σήματος ανακλώνται, είναι

$$|x_+ - x_-| = A |\cot(b(\theta_0 + \frac{\delta\theta_0}{2})) - \cot(b(\theta_0 - \frac{\delta\theta_0}{2}))|$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του αθροίσματος $\cot a - \cot b = \frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b}$, παίρνουμε

$$|x_+ - x_-| = A \left| \frac{\sin[b(\theta_0 + \frac{\delta\theta_0}{2}) - b(\theta_0 - \frac{\delta\theta_0}{2})]}{\sin[b(\theta_0 + \frac{\delta\theta_0}{2})] \sin[b(\theta_0 - \frac{\delta\theta_0}{2})]} \right|$$

Από $\delta\theta_0 \ll \theta_0$, μπορούμε να προσεγγίσουμε

$$|x_+ - x_-| \approx A \frac{\sin(b\delta\theta_0)}{\sin^2(b\theta_0)}$$

Για την αρχική ανάκλαση $x_- \approx x_+ \approx x_1(\theta_0)$. Σε κάθε επόμενη ανάκλαση του σήματος, η οριζόντια απόσταση μεταξύ των σημείων όπου οι άκρες του σήματος ανακλώνται, αυξάνεται κατά $|x_+ - x_-|$. Κινούμενοι κατά μήκος του θετικού x - άξονα, αυτές οι ζώνες γίνονται ευρύτερες έως ότου επικαλύπτονται. Αυτό συμβαίνει όταν μετά από N αντανάκλασεις, γίνει

$$N |x_+ - x_-| = x_1(\theta_0) \Rightarrow N A \frac{\sin(b\delta\theta_0)}{\sin^2(b\theta_0)} = A \cot(b\theta_0) \Rightarrow$$

$$N = \frac{\cot(b\theta_0)}{\frac{\sin(b\delta\theta_0)}{\sin^2(b\theta_0)}}$$

Η θέση όπου οι ζώνες αρχίζουν να αλληλεπικαλύπτονται είναι στο $x_{\max} = N x_1(\theta_0)$. Ως εκ τούτου,

$$x_{\max} = \frac{\cot(b\theta_0)}{\frac{\sin(b\delta\theta_0)}{\sin^2(b\theta_0)}} A \cot(b\theta_0) = A \frac{\cot^2(b\theta_0)}{\frac{\sin(b\delta\theta_0)}{\sin^2(b\theta_0)}} = A \frac{\cos^2(b\theta_0)}{\sin(b\delta\theta_0)}$$

Από $\delta\theta_0 \ll 1$, μπορούμε να προσεγγίσουμε $\sin(b\delta\theta_0) \approx b\delta\theta_0$ και η έκφραση γίνεται

$$X_{\max} = \frac{A \cos^2(b\theta_0)}{b\delta\theta_0}$$

Θέτοντας $A=2z_0$ και $b=1$, τελικά παίρνουμε

$$X_{\max} = \frac{2z_0 \cos^2\theta_0}{\delta\theta_0}$$