

ΜΕΛΕΤΗ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΚΡΟΥΣΗΣ ΔΥΟ ΣΦΑΙΡΩΝ

Δυο σφαίρες (Σ_1), (Σ_2) με μάζες m_1, m_2 και ταχύτητες v_1, v_2 αντίστοιχα συγκρούονται ακαριαία, κεντρικά και πλαστικά κινούμενες πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.



Α) Ταχύτητα συσσωματώματος u .

Έστω u η ταχύτητα του παραγόμενου συσσωματώματος μάζας $m_1 + m_2$. Με εφαρμογή της Α.Δ.Ο. παίρνουμε:

$$p_{\text{ΑΡΧ}} = p_{\text{ΤΕΛ}} \quad \text{ή} \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u \quad \text{ή}$$

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Αν $\lambda = \frac{m_1}{m_2}$ είναι ο λόγος των μαζών των δύο σφαιρών, τότε η σχέση (1) μπορεί να πάρει την μορφή:

$$u = \frac{\lambda v_1 + v_2}{\lambda + 1} \quad (2)$$

Από την σχέση (2) συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα του συσσωματώματος εξαρτάται από τις αρχικές ταχύτητες και από το λόγο των μαζών των σφαιρών (Σ_1) και (Σ_2).

Β) Μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος ΔK .

$$\Delta K = K_{\text{ΤΕΛ}} - K_{\text{ΑΡΧ}} \quad \text{ή}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) \quad \text{ή} \quad (\text{χρήση (1)})$$

$$\Delta K = - \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 \quad (3)$$

Από την σχέση (3) παρατηρούμε ότι η απώλεια κινητικής ενέργειας του συστήματος εξαρτάται από τις μάζες m_1, m_2 των σφαιρών (Σ_1), (Σ_2) αντίστοιχα και την διαφορά $v_1 - v_2$ των αλγεβρικών τιμών των ταχυτήτων των δύο σφαιρών.

Αν Q η απώλεια της μηχανικής (κινητικής) ενέργειας του συστήματος με την χρήση της Α.Δ.Ε. προκύπτει:

$$K_{\text{ΑΡΧ}} = K_{\text{ΤΕΛ}} + Q \quad \text{ή} \quad Q = |\Delta K| \quad \text{ή} \quad (\text{χρήση (3)})$$

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 \quad (4)$$

Από την (4) προκύπτουν:

1) Όταν οι ταχύτητες των σφαιρών (Σ_1), (Σ_2) είναι ομόρροπες τότε $v_1 - v_2 = |v_1| - |v_2|$, οπότε η απώλεια γίνεται ελάχιστη, άρα:

$$Q_{\text{min}} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (|v_1| - |v_2|)^2 \quad (5)$$

2) Όταν οι ταχύτητες των σφαιρών (Σ_1), (Σ_2) είναι αντίρροπες τότε $v_1 - v_2 = |v_1| + |v_2|$, οπότε η απώλεια γίνεται μέγιστη, άρα:

$$Q_{\text{max}} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (|v_1| + |v_2|)^2 \quad (6)$$

Γ)Ειδική περίπτωση: Η σφαίρα (Σ_2) είναι αρχικά ακίνητη.

Τότε η σχέση (4) για $v_2 = 0$ γράφεται:

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2 \quad \text{ή} \quad Q = \frac{m_2}{m_1 + m_2} K_1 \quad \text{όπου} \quad K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \text{η}$$

αρχική κινητική ενέργεια της σφαίρας (Σ_1).

Το ποσοστό απώλειας (x) της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας (Σ_1) λόγω της κρούσης είναι:

$$x = \frac{Q}{K_1} \quad \text{ή} \quad x = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{ή} \quad x = \frac{m_2}{\lambda m_2 + m_2} \quad \text{ή}$$

$$x = \frac{1}{\lambda + 1} \quad (7)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (7) το ποσοστό απώλειας κινητικής ενέργειας εξαρτάται μόνο από το λόγο των μαζών.

Το ποσοστό (y) της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας (Σ_1) λόγω της κρούσης μεταβιβάστηκε στην αρχικά ακίνητη σφαίρα (Σ_2) είναι:

$$y = \frac{K'_2}{K_1} \quad \text{ή} \quad y = \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{v}{v_1} \right)^2 \quad (8)$$

Η σχέση (2) θέτοντας $v_2=0$ γίνεται:

$$v = \frac{\lambda v_1}{\lambda + 1} \quad (9)$$

Η (8) λόγω της (9) γράφεται ισοδύναμα:

$$y = \frac{\lambda}{(\lambda + 1)^2} \quad (10)$$

Το ποσοστό (z) της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας (Σ_1) που η σφαίρα αυτή έχει μετά την κρούση είναι:

$$z = \frac{K'_1}{K_1} \quad (11)$$

Από την Α.Δ.Ε. έχουμε:

$$K_{\text{ΑΡΧ}} = K_{\text{ΤΕΛ}} + Q \quad \text{ή} \quad K_1 = K'_1 + K'_2 + Q \quad \text{ή}$$

$$\frac{Q}{K_1} + \frac{K'_2}{K_1} + \frac{K'_1}{K_1} = 1 \quad \text{ή} \quad x + y + z = 1 \quad \text{ή}$$

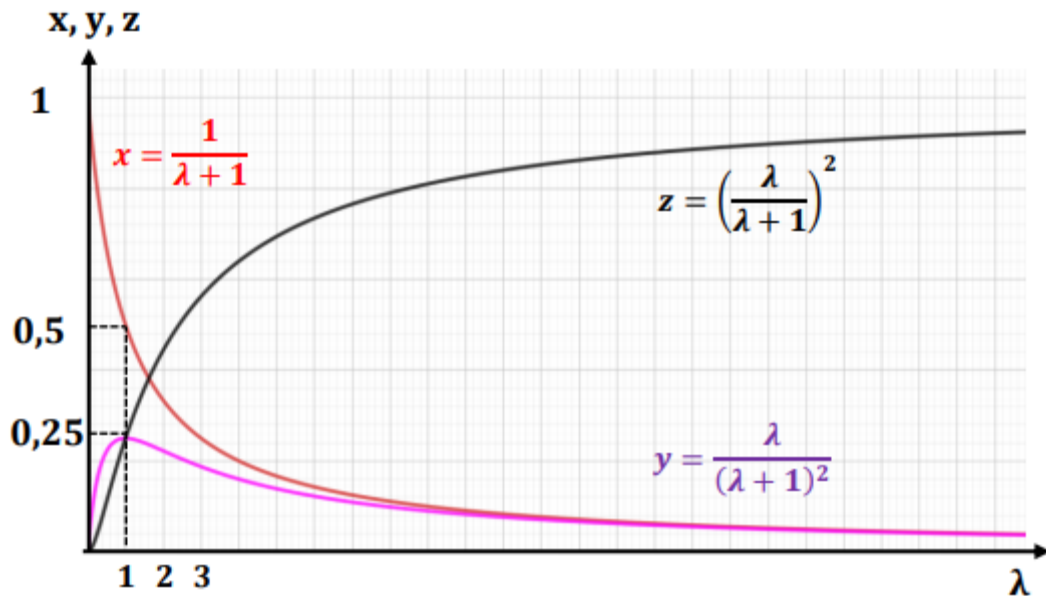
$$z = 1 - (x + y) \quad \text{ή} \quad (\text{χρήση (7) και (10)})$$

$$z = \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1} \right)^2 \quad (12)$$

Παρατίθενται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$x = x(\lambda), \quad y = y(\lambda) \quad \text{και} \quad z = z(\lambda) \quad \text{με} \quad \lambda > 0,$$

σε κοινό σύστημα αξόνων.



Παρατηρούμε ότι για $\lambda = 1$ ή $m_1 = m_2$ προκύπτει ότι:

$$x = 0,5 = 50\% \quad \text{και} \quad y = z = 0,25 = 25\%$$