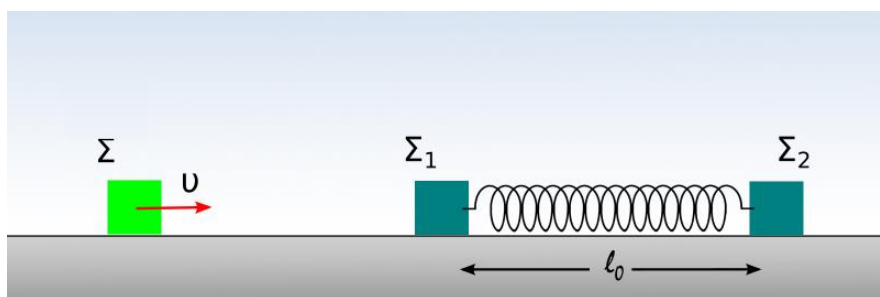

Οι ταχύτητες στο μονωμένο σύστημα

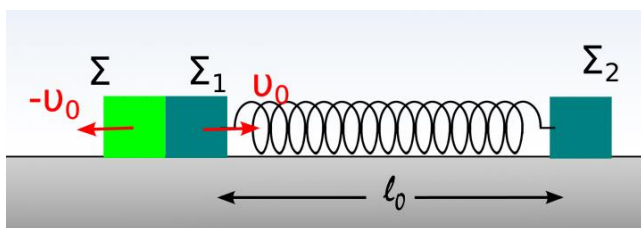
Το σώμα Σ του σχήματος μάζας m , κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v = 2v_0$ (όπου v_0 μία ποσότητα ταχύτητας). Πάνω στο ίδιο επίπεδο, ηρεμούν τα σώματα Σ_1 και Σ_2 μάζας $m_1 = m_2 = 3m$, τα οποία είναι συνδεδεμένα στα άκρα ενός οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , που έχει το φυσικό του μήκος ℓ_0 . Ο άξονας του ελατηρίου βρίσκεται στη διεύθυνση της ταχύτητας του Σ . Κάποια χρονική στιγμή που θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των χρόνων $t = 0$, το σώμα Σ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ_1 . Η κρούση θεωρείται ακαριαία.



- A.** Να αποδείξετε ότι μετά την κρούση, δεν υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία να μηδενίζονται ταυτόχρονα οι ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 .
- B.** Να αποδείξετε ότι μετά την κρούση, δεν υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία και τα τρία σώματα να κινούνται ομόρροπα.
- Γ.** Να αποδείξετε ότι μετά την κρούση, τα σώματα Σ_1 και Σ_2 είτε κινούνται ομόρροπα, είτε μόνο το ένα από αυτά είναι στιγμιαία ακίνητο.
- Δ.** Να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση.
- Ε.** Να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή του μέτρου του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 μετά την κρούση.
- ΣΤ.** Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων $\Sigma_1 - \Sigma_2$ σε συνάρτηση με τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

Λύση

A. Επειδή η κρούση του σώματος Σ με το σώμα Σ_1 είναι κεντρική και ελαστική και το Σ_1 είναι αρχικά ακίνητο, για τις ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση έχουμε:



$$v' = \frac{m - m_1}{m + m_1} v = \frac{m - 3m}{m + 3m} \cdot 2v_0 \Rightarrow v' = -v_0$$

και

$$v'_1 = \frac{2m}{m + m_1} v = \frac{2m}{m + 3m} \cdot 2v_0 \Rightarrow v'_1 = v_0$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο σώματα μετά την κρούση κινούνται αντίρροπα.

Το σύστημα των σωμάτων $\Sigma_1 - \Sigma_2$ είναι μονωμένο (όπως φυσικά και το σύστημα $\Sigma - \Sigma_1 - \Sigma_2$). Επομένως, η ορμή του συστήματος αυτού διατηρείται κατά την εξέλιξη του φαινομένου. Έτσι, η ορμή του συστήματος μία οποιαδήποτε χρονική στιγμή θα είναι ίση με αυτή που απέκτησε αμέσως μετά την κρούση. Δηλαδή,

$$p_{1,2} = p'_1 = m_1 v'_1 = 3mv_0$$

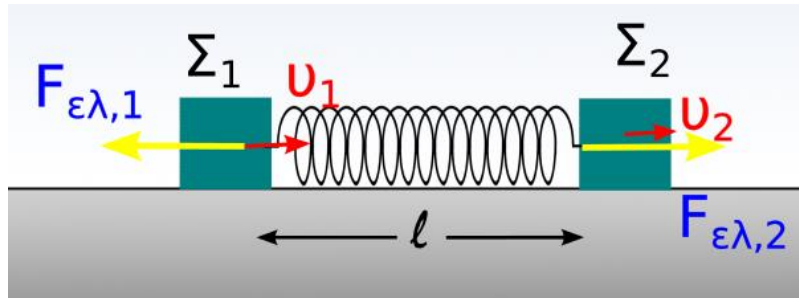
προς τα δεξιά.

Εάν κάποια χρονική στιγμή τόσο το Σ_1 , όσο και το Σ_2 είναι στιγμιαία ακίνητα, τότε η ορμή του συστήματός τους θα ισούται με μηδέν. Άτοπο, καθώς σε αυτή την περίπτωση δεν θα διατηρούταν η ορμή του μονωμένου αυτού συστήματος. Οπότε, είναι αδύνατο να ακινητοποιηθούν ταυτόχρονα τα σώματα Σ_1 και Σ_2 .

B. Όπως είδαμε και με βάση το σχήμα, το σώμα Σ μετά την κρούση κινείται προς τα αριστερά, ενώ το σώμα Σ_1 προς τα δεξιά. Η ορμή λοιπόν του συστήματος $\Sigma_1 - \Sigma_2$ είναι ένα διάνυσμα προς τα δεξιά και παραμένει σταθερό.

Για να κινούνται ομόρροπα και τα τρία σώματα, θα πρέπει τόσο το Σ_1 όσο και το Σ_2 , να έχουν ταυτόχρονα ταχύτητες με φορά προς τα αριστερά. Σε αυτή την περίπτωση όμως, η ορμή του συστήματος $\Sigma_1 - \Sigma_2$ θα ήταν ένα διάνυσμα προς τα αριστερά. Άτοπο, καθώς η σταθερή ορμή του συστήματος είναι προς τα δεξιά.

Γ. Επειδή το σύστημα των σωμάτων $\Sigma_1 - \Sigma_2$ είναι μονωμένο και η δύναμη του ελατηρίου συντηρητική, συμπεραίνουμε ότι η ορμή του συστήματος και η μηχανική του ενέργεια, διατηρούνται σταθερά. Έτσι, σε μία τυχαία χρονική στιγμή μετά την κρούση του Σ με το Σ_1 , αν v_1 η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του Σ_1 , v_2 η αντίστοιχη αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του Σ_2 και $\Delta\ell$ η τότε παραμόρφωση του ελατηρίου, έχουμε:



$$p_{1,2} = p_1 + p_2 \Rightarrow 3mv_0 = 3mv_1 + 3mv_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow v_0 = v_1 + v_2 \quad (1)$$

Και

$$\frac{1}{2} \cdot 3mv_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 3mv_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 3mv_2^2 + \frac{1}{2} k \Delta \ell^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + \frac{k}{3m} \Delta \ell^2 \quad (2)$$

Η (2) λόγω της (1) γίνεται

$$(v_1 + v_2)^2 = v_1^2 + v_2^2 + \frac{k}{3m} \Delta \ell^2 \Rightarrow 2v_1 v_2 = \frac{k}{3m} \Delta \ell^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{v_1 v_2 = \frac{k}{6m} \Delta \ell^2 \geq 0}$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι διαρκώς ομόσημες ή μία τουλάχιστον μηδέν (λόγω του ερωτήματος Α όμως, δεν μπορεί να ακινητοποιηθούν ταυτόχρονα).

Επομένως, τα δύο σώματα είτε κινούνται ομόρροπα (προς τα δεξιά με βάση το σχήμα) ή είναι στιγμιαία μόνο το ένα από αυτά ακίνητο.

Δ. Από τα παραπάνω, είναι εμφανές ότι

$$0 \leq v_1 \leq v_0 \quad \text{και} \quad 0 \leq v_2 \leq v_0$$

Και μάλιστα (σχέση 1), όταν $v_1 = v_0$ τότε $v_2 = 0$, ενώ όταν $v_1 = 0$ τότε $v_2 = v_0$.

Εάν για παράδειγμα $v_1 > v_0$, τότε θα έπρεπε $v_2 < 0$, άτοπο καθώς τα σώματα αποδείξαμε ότι κινούνται ομόρροπα προς τα δεξιά.

Επομένως, η μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ισούται με v_0 (θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά με βάση το σχήμα).

Ε. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του κάθε σώματος (επιτάχυνση) θα μεγιστοποιηθεί όταν η ασκούμενη σε αυτό δύναμη από το ελατήριο λάβει τη μέγιστη (κατά μέτρο) τιμή της. Το γεγονός αυτό θα συμβεί όταν η παραμόρφωση του ελατηρίου

λάβει τη μέγιστη (κατά απόλυτη τιμή) τιμή της. Δηλαδή, όταν τα δύο σώματα βρίσκονται είτε στη μέγιστη μεταξύ τους απόσταση, είτε στην αντίστοιχη ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση. Οι επιταχύνσεις των σωμάτων θα έχουν διαρκώς ίσα μέτρα (θα είναι όμως αντίθετα διανύσματα), καθώς οι μάζες των σωμάτων είναι ίσες και οι δυνάμεις που δέχονται από το ελατήριο αντίθετες.

Για όσο χρόνο $v_2 > v_1$ το μήκος του ελατηρίου μεγαλώνει, ενώ όταν $v_1 > v_2$ η απόσταση των δύο σωμάτων μειώνεται. Έτσι, η ελάχιστη απόσταση των δύο σωμάτων (ομοίως και η αντίστοιχη μέγιστη) επιτυγχάνεται όταν $v_1 = v_2$.

Για $v_1 = v_2 = \frac{v_0}{2}$ (από τη σχέση 1) η σχέση (2) δίνει

$$v_0^2 = \frac{v_0^2}{4} + \frac{v_0^2}{4} + \frac{k}{3m} \Delta \ell_{max}^2 \Rightarrow v_0^2 = \frac{2k}{3m} \Delta \ell_{max}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\Delta \ell|_{max} = v_0 \sqrt{\frac{3m}{2k}}$$

Οπότε

$$\left| \frac{dv_1}{dt} \right|_{max} = \left| \frac{dv_2}{dt} \right|_{max} = |a_1|_{max} = |a_2|_{max} = \frac{|F_{\varepsilon\lambda,1}|_{max}}{m_1} = \frac{|F_{\varepsilon\lambda,2}|_{max}}{m_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a_1|_{max} = |a_2|_{max} = \frac{k|\Delta \ell|_{max}}{3m} = \frac{v_0 k}{3m} \sqrt{\frac{3m}{2k}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|a_1|_{max} = |a_2|_{max} = v_0 \sqrt{\frac{k}{6m}}}$$

ΣΤ. Όπως είδαμε, η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Δηλαδή,

$$K_1 + K_2 + U_{\varepsilon\lambda} = E_{μηχ,αρχ} = \text{σταθ.}$$

Επομένως

$$K_{ολ} + U_{\varepsilon\lambda} = K'_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 \Rightarrow K_{ολ} + U_{\varepsilon\lambda} = \frac{3}{2} m v_0^2 \Rightarrow$$

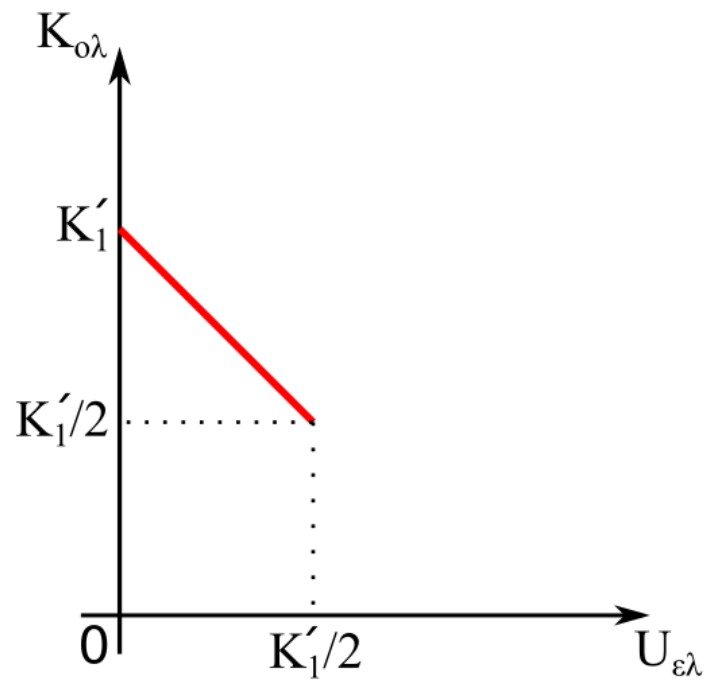
$$\Rightarrow \boxed{K_{ολ} = \frac{3}{2} m v_0^2 - U_{\varepsilon\lambda}}$$

Όπου

$$0 \leq U_{\varepsilon\lambda} \leq U_{\varepsilon\lambda,max} = \frac{1}{2} k \Delta \ell_{max}^2 = \frac{1}{2} k v_0^2 \frac{3m}{2k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{0 \leq U_{\varepsilon\lambda} \leq \frac{3}{4} m v_0^2 = \frac{K'_1}{2}}$$

Προκύπτει λοιπόν το παρακάτω ευθύγραμμο τμήμα:



Όπου $K'_1 = \frac{3}{2}mv_0^2$ και όταν $U_{ελ} = U_{ελ,max} = \frac{K'_1}{2}$, τότε $K_{ολ} = K'_1 - \frac{K'_1}{2} = \frac{K'_1}{2}$.

Μίλτος Καδιτζόγλου
miltoskadiltzoglou@gmail.com