|  |
| --- |
| **ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ** |
| **Προαπαιτούμενες γνώσεις από την φυσική της Α΄Λυκείου. Μέρος 2ο** |
| **Ενεργειακή μελέτη των κινήσεων(Ι)** |

|  |
| --- |
| **Μανδραβέλης Παρμενίων Iούλιος 2021** |

**Περιεχόμενα:**

1. **Εισαγωγή της έννοιας ‘ Έργο δύναμης’...............................................σελ 3**
2. **Έργο σταθερής δύναμης**  **κατά μήκος ευθείας διαδρομής του σημ. εφαρμογής της........................................................................................... .σελ 4**
3. **Έργο σταθερής τριβής σε ευθεία διαδρομή..................................... σελ 6**
4. **Λυμένες εφαρμογές 1,2,3,..................................................................... .σελ 7**
5. **Έργο τριβής σταθερού μέτρου, το διάνυσμα της οποίας εφάπτεται σε καμπύλη τροχιά μήκους S..............................................................σελ 12**
6. **Λυμένη εφαρμογή 4..................................................................................σελ 12**
7. **Έργο βάρους (γενική σχέση).................................................................σελ 13**
8. **Λυμένες εφαρμογές 5,6,..........................................................................σελ 15**
9. **Έργο κάθετης δύναμης.............................................................................σελ16**

**10.Έργο τάσης νήματος στο μαθηματικό εκκρεμές..........................σελ 16**

**11.Λυμένη εφαρμογή 7,.................................................................................σελ 18**

**12.Έργο δύναμης σταθερής διεύθυνσης της οποίας το μέτρο μεταβάλ-**

**λεται σε συνάρτηση με την μετατόπιση του σημείου εφαρμογής**

**της.................................................................................................................σελ18**

**13Λυμένες εφαρμογές.8,9,10,11,12..........................................................σελ 19**

**14Εργο δύναμης ελατηρίου..........................................................................σελ 25**

**15Λυμένες εφαρμογές13,14.........................................................................σελ 26**

**16Κινητική ενέργεια σώματος....................................................................σελ 31**

**17.θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας................................σελ 33**

**18.Λυμένες εφαρμογές 15,16,17,18,19,20.21,22,23,24......................σελ 35**

**19.θέματα για λύση.........................................................................................σελ 66**

**Πως μπορούμε εύκολα να οδηγηθούμε στον ορισμό του έργου μιας δύναμης;**

Ένα σώμα μάζας **m=2Κg** κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύ-τητα ταχύτητα μέτρου **υ0=10m/s**.Θέλουμε να **τριπλασιάσουμε** το μέτρο της ταχύ-τητας του σώματος ,διατηρώντας σταθερή την κατεύθυνσή της.**Ποιo** το μέτρο της οριζόντιας σταθερής δύναμης ,ομόρροπης της ταχύτητας που πρέπει να ασκή-σουμε στο σώμα;

**Απάντηση:**



****

****



**S**

****

ΣΧΗΜΑ 1



Γράφουμε την αλγεβρική τιμή της συνισταμένης δύναμης σε κάθε άξονα:

Foλ,x = mα , F = mα **(1)**

Foλ,y = 0 , N - w = 0 , N = w **(2)**

Το σώμα πραγματοποιεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και ισχύ-ουν:

υ=υ0+αt , 3υ0=υ0+αt , 2υ0 =αt , 2.10=αt , t=  **(3)**

S =υ0t +  **(4)** ,

(3) , (4) S =10  + ,

**(5)**



(1) , (5) F = mα ,  F = 2,  **F.S = 800 N.m (6)**

Διαπιστώνουμε ότι ο τριπλασιασμός του μέτρου της ταχύτητας του σώματος μπορεί να επιτευχθεί ασκώντας **οποιαδήποτε** οριζόντια δύναμη σταθερού μέ-τρου, **αρκεί**  η δύναμη αυτή να δράσει σε μια διαδρομή μήκους **S,** τέτοια ώστε το **γινόμενο F.S** να έχει τιμή **800Νm**.Το συμπέρασμα είναι ότι για να επιτύχουμε τον τριπλασιασμό του μέτρου της ταχύτητας του σώματος **δεσμευτική συνθή-κη δεν αποτελεί** η τιμή του μέτρου της δύναμης, αλλά η τιμή του γινομένου **F.S**. Μπορούμε π.χ. να επιτύχουμε τον στόχο μας ασκώντας μια οριζόντια δύναμη με-τρου **200Ν,** η οποία θα δράσει σε διαδρομή **4m** ή μία δύναμη **40Ν,** η οποία θα δράσει σε διαδρομή μήκους **20m**.Καταλήγουμε, ότι το μέτρο της δύναμης, απο-τελεί μέτρο του **πόσο έντονα** δρούμε σε κάποιο σώμα, ενώ η τιμή του γινομέ-νου αποτελεί **το μέτρο της προσπάθειαs** που καταβάλλουμε, προκειμένου να τριπλασιαστεί το μέτρο της ταχύτητας.**Μπoρούμε να δράσουμε στο σώμα λι-γότερο ή περισσότερο έντονα, ωστόσο η καταβαλλόμενη προσπάθεια σε κάθε περίπτωση αποτιμάται στα 800 Νm.**

**Ορίζουμε λοιπόν το γινόμενο F.S, έργο της σταθερής δύναμης  στην ευθεία διαδρομή μήκους S του σημείου εφαρμογής της** και γράφουμε **:**

**WF= F.S (7)**

Mονάδα έργου στο S.I. είναι το **1Νm** η οποία ονομάζεται **1Joule, 1J=1Nm**

**To έργο μιας δύναμης επεκτάθηκε ως έννοια, ώστε να μπορεί να υπολο-γίζεται τόσο για σταθερές όσο και για μεταβλητές δυνάμεις, είτε η τρο-χιά του σημείου εφαρμογής κάποιας από αυτές τις δυνάμεις είναι ευθεία γραμμή,είτε καμπύλη.**Στη συνέχεια χωρίς να αναλωθούμε στις λεπτομέρειες επέκτασης της έννοιας του έργου αναφερόμαστε στις περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν.

**Α.ΕΡΓΟ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ  KATA MHKOΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΔΙΑΔΡΟΜΗΣ ΤΟΥ ΣΗΜ. ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ**

Έστω η σταθερή δύναμη**** η οποία δρα στο σώμαμαζί με τις υπόλοιπες δυνάμεις οι οποίες ασκούνται σ’ αυτό και έστω ακόμη ότι το σώμα, το οποίο θεωρείται ως υλικό σημείο, μετα-κινείται πάνω σε ευθεία γραμμή. Η διεύθυνση της δύναμης **** σχηματίζει γωνίαφ με την μετατόπιση ( ή την ταχύτητα του σώματος) όπως φαίνεται στο σχήμα. **Ορίζουμε το έργο της σταθερής δύναμης , ως το μονόμετρο μέγεθος**  **W,** **το οποίο εκφράζεται με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης, επί το μέτρο της μετατόπισης  επί το συνημίτονο της γωνίας φ ανάμεσα στη δύνα-μη και την μετατόπιση.**

**WF = FΔx συνφ (8)**

Ακολουθεί σχηματική παράθεση διαφόρων περιπτώσεων παραγωγής έργου. Να παραλείψετε την μελέτη των περιπτώσεων (ε)΄, (στ)΄,(ζ)΄

(δ)

(ε)΄

(β)

(α)

φ

****

****

****













φ

****

****

****

**Δx**

**Δx**

****

****

**φ=0 WF = F. Δx**

**φ=180ο  WF = - F. Δx**

**φ=90ο WF = 0**

**φ=90ο WF = 0**

**WF = FΔx συνφ**

**WF = WFx=(Fσυνφ)Δx=FΔxσυνφ**

**WFy = 0 διότι **

**WFy=0 καθώς Fy ** 

(γ)

(ε)

σχήμα 2



**(ζ)΄**

**( ζ )**

**(στ)΄**

(στ)

**φ΄**

**φ**

**φ**

**φ΄**

****

****





****

****

**φ**

**φ**

****

****

****

****

**Δx**

**WF = FΔx συνφ**

**WF=WFx=(F συνφ) Δx=**

**=F Δx συνφ**

**WFy=0 καθώς Fy ** 

**WFy=0 καθώς Fy ** 

**WF = FΔx συνφ= - FΔx συνφ΄**

**WF = -WFx= - (Fσυνφ΄)Δx WF = - FΔxσυνφ΄**

**WFy=0 καθώς Fy ** 

σχήμα 3

**Δx**

**Β. ΕΡΓΟ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΤΡΙΒΗΣ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ ΔΙΑΔΡΟΜΗ**

**WT = -T S= - μ Ν S (9)**

**Σ**

**Σ**

****

**S**

σχήμα 4

****

****

****

**wx**

**Τ**

**Σ**

**w**

**wy**

**θ**

**θ**

Αρχική θέση

σχήμα 5 πολύ σπάνια **WT = T S= μ Ν S**   **Βλέπε ασκηση 5.49 σχολικού**

Τελική θέση

**S**

**h**

Ν

Και σπάνια **WT = T S= μ Ν S (9α)**  **Βλέπε ασκηση 5.49 σχολικού Γ΄ λυκείου**

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ Ι**

**1.**Για το παρακάτω σχήμα δίνονται:**F1=20N**, **F2=10N**, **w = 20N** **F1=20N**, **μ=0,5**.Να υπολογίσετε τα έργα όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα για μετατόπιση **Δx=10m**.Δίνονται:**ημθ=0,6,** **συνθ=0.8**









θ





ΔΧ

σχήμα 6

**Λύση:**

**Ww =**w Δx συν900 **= 0 J**

**WN=**N Δx συν900 **= 0 J**

**WF2=**F2 Δx συν00=F2 Δx =10.10= **100J**

**WF1=**F1 Δx συνθ=20. 10. 0,8 =20.10.0,8= **160J**

**WT=**T Δx συν180=μ Ν Δx (-1)

**ΣFy=0,** N+ F1y –w=0, N = w –F1y

F1y = F1 ημθ = 20.0,6=12Ν **WT=**μ Ν Δx (-1) = **-** 0,5.8.10=-40J, **WT=-40J**

N = 20 –12=8Ν, N =8Ν

**2.** *Τα σώματα* ***Σ1*** *και* ***Σ2*** *του σχήματος έχουν ίσες μάζες ,δέχονται τις δυνάμεις τριβής με μέτρα* ***Τολ,1*** *,* ***Τολ,2****και κινούνται με σταθερή ταχύτητα.Τα σώματα έχουν μάζες* ***m1= m2*** *=****2Kg*** *και αντί-στοιχα.Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα Σ1 και στο οριζόντιο δάπεδο έχει τιμή* ***μ=0,5****,ενώ ανάμεσα στο σώμα* ***Σ2****και στο δάπεδο έχει τιμή* ***μ΄,*** *ακόμη* ***g=10m/s2.*** *Μετρήθηκε το μέτρο της τάσης του νήματος και βρέθηκε ίσο με* ***15Ν****.Να βρεθούν τα έργα όλων των δυνάμεων που δρουν στο σώμα για μετaτόπιση του σώματος κατά* ***Δx=5m***

**Λύση:**



**T2**

**Σ2**

Τ**ολ,2**

Τ**ολ,1**

**Σ1**

w2

N1

**υ**

**N2**

w1

**T1**

ΣΧΗΜΑ 7

**Έργο της** 

**WF** =F.Δx συν00 **(10)**

Το σώμα Σ1 πραγματοποιεί ευ-θύγραμμη ομαλή κίνηση και ε-πομένως δέχεται μηδενική συ-νισταμένη

Foλ1,x =0, F–Toλ,1-T = 0 **(11)**

Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό άρα για τα μέτρα των τάσεων που ασκεί αυτό στα σώματα Σ1και Σ2 ισχύει,

Τ1=Τ2=Τ=15Ν **(12)**

(11) , (12) F=Toλ,1+15 **(13)**

**Yπολογισμός του μέτρου** Toλ,1

**ΣF1y=0,** N1–w1=0, N1 = w1, N1 = m1g , N1 = 2.10, N1 = 20N **(14)**

Toλ,1=μ N1 , Toλ,1=0,5. 20 =10 Ν, **Toλ,1=10 Ν (15)**

(13) , (15) F=10+15 =20Ν, **F=25Ν** **(16)**

WF =F.Δx συν00= 25.5 .1=125N, **WF =125N (17)**

**Έργο της** 

**WΤ1**=Τ1.Δx συν1800 = 15.5.(-1)=**-**75Ν, **WΤ1=-75Ν (18)**

**Έργο της** 

**WΤολ,1**=Τολ,1.Δx συν1800 = 10.5.(-1)=**-**50Ν, **WΤ1=-50Ν (19)**

**Έργο της** 

**WΝ1**=Ν1.Δx συν900 = 0, **WΝ1=0 (20)**

**Έργο της** 

**Ww1**=w1.Δx συν900 = 0, **Ww1=0 (21)**

**Έργο της** 

**WΤ2**=Τ2.Δx συν00 = 15.5.1=75Ν, **WΤ2=75Ν (22)**

**Έργο της** 

**Yπολογισμός του μέτρου** Toλ,1

Το σώμα Σ2 πραγματοποιεί επίσης ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και επομένως δέχεται μηδενική συνισταμένη

Foλ2,x =0, T - Toλ,2= 0 , Toλ,2= T , Toλ,2= 15N **(23)**

**WΤολ,2**=Τολ,2.Δx συν1800 = 15.5.(-1)=**-7**5Ν, **WΤολ,2= -75Ν (24)**

**Έργο της** 

**WΝ2**=Ν2.Δx συν900 = 0, **WΝ2=0 (25)**

**Έργο της** 

**Ww2**=w2.Δx συν900 = 0, **Ww2=0 (26)**

***3.*** *Ένα σώμα έχει μάζα* ***m=10Kg*** *και κινείται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου υπό την επίδραση της δύναμης ,του βάρους και της τριβής.Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο κεκλιμένο και το σώμα είναι ίσος με* ***μ=3/4.*** *Δίνονται* ***g=10m/s2,******ημθ=0,6*** *,****συνθ=0,8.****Το σώμα κινείται προς τα πάνω με επι-τάχυνση, μέτρου* ***α=3m/s2Να*** *υπολογίσετε τα έργα όλων των δυνάμεων για μετατόπιση κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου κατά* ***4m.***

**α.**Αρχικά υπολογίζουμε τα μέτρα των δυνάμεων της τριβής καθώς και της



θ



****



θ







ΣΧΗΜΑ 8

**Τριβή**

wy= mgσυνθ=10.10. 0,8=80Ν

**wy=80Ν** (27)

wx = mgημθ=10.10.0,6=60Ν

**wx =60Ν** (28)

Foλ,y = 0 , N - wy = 0 , N- 80= 0 ,

**N =80 Ν** (29)

Τολ =μΝ =**80 =60Ν **Τολ =60Ν** (30)

**Δύναμη**  

Foλ,x = mα, F1 -wx –To λ = mα , F1 -60–60 = 10.3 **F1 = 150N (31)**

**Έργο της** 

**WF1** =F1.Δx συν00 =150.4.1=600J, **WF1 =600J (32)**

**Έργο της** 

**WΤ**=Τ.Δx συν1800 = 60.4.(-1)=**-**240Ν, **WΤ=-240Ν (33)**

**Έργο της** 

**WΝ**=Ν.Δx συν900 = 0, **WΝ=0 (34)**

**Έργο της** 

**α΄ τρόπος απευθείας μέσω της σχέσης ορισμού του έργου**

**Ww**=w.Δx συν(900 +θ)=mgΔx (-ημθ)=-10.10.4.0,6. =- 240 J , **Ww=-240** **J (35)**

**β΄ τρόπος απευθείας μέσω των έργων των συνιστωσών wx, wy**

**Ww**= Wwx + Wwy =Wwx  =wx  Δx συν1800 =100. 4.0,6. =- 240 J , **Ww=-240** **J (36)**

Wwy=0 καθώς η 

**B1.ΕΡΓΟ ΤΡΙΒΗΣ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΜΕΤΡΟΥ Η ΟΠΟΙΑ ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΗ ΤΡΟΧΙΑ ΜΗΚΟΥΣ S**

**WT =** -**T S =** - **μ Ν S (37)**



**Κάτοψη**

σχήμα 9



**Κ**

**S**

Αρχική θέση

Τελική θέση

**l=R**

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ II**

**4.**Για το παραπάνω σχήμα δίνονται **m=10Kg** ,**μ=0,5**, **l=()m**, **g = 10 m/s2**.Tη χρονική στιγμή t0= 0 δίνουμε αρχική ταχύτητα **υ0** στο σώμα και αυτό σταματά αφού στραφεί κατά γωνία **1,6π/3(rad).** Να βρεθεί το μέτρο της αρχικής ταχύτητας.

**Λύση:**

**WT=** -**T S =** - **μ Ν S**

κατά την διεύθυνση την του βάρους έχουμε :

ΣFy=0 , N-w=0, N=w, N=mg, N=10.10=100N, **N=100N**

Για την επίκεντρη γωνία **φ** και το μήκος του τόξου **S** που αντιστοιχεί στην διαδρομή του σώματος ισχύει η σχέση:

****

WT= **-** μ Ν S = **-** 0,5.100.1,6 =80 **J** , **WT = 80 J** **(38)**

**Γ. ΕΡΓΟ ΒΑΡΟΥΣ (γενική σχέση)**

Aνεξάρτητα από το είδος της τροχιάς για το έργο του βάρους ισχύει:

**Ww =  m g h** **(39)**

όπου **h** η υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην αρχική και την τελική θέση του σώμα-τος.Επιλέγουμε το πρόσημο

**(+) όταν η τελική θέση της διαδρομής του σώματος βρίσκεται χαμηλότερα από την αρχκή θέση** και

**(-) η τελική θέση της διαδρομής του σώματος βρίσκεται ψηλότερα από την αρχική θέση**

**h**

σχήμα 10

και για **οριζόντια μετατόπιση** **Ww = 0** καθώς **h=0**

**Σ**

**Σ**

****

**Δx**

σχήμα 11

**Ww = 0**

Στο κεκλιμένο επίπεδο εκτός της σχέσης **(39)** μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την σχέση:

**Ww =  m g S ημθ** **(40)**

όπου θ η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου.(Βλέπε παρακάτω σχήμα 12)

**Απόδειξη**: Η σχέση **(39)** **Ww =  m g h** λαμβάνοντας υπόψη ότι

**ημθ =**  ή **S ημθ = h (41)**

γράφεται: **Ww =  m g S ημθ**

**θ**

**w**

**wy**

**θ**

Αρχική θέση

σχήμα 12

Τελική θέση

**Σ**

**wx**

**S**

**h**

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΙΙΙ**

**5.**Στο παρακάτω σχήματαδύο σώματα μαζών m1,m2 αφήνονται να κινηθούν,το Σ1 από το σημείο Α στη Γ και το Σ2 από το σημείο Β στη Γ Τα σώματα μετά από λίγο συναντώνται στο σημείο Γ.Δί-νονται **m1=4Kg** και **m2=6Kg**.Ακόμη **g=10 m/s2**.Να υπολογίσετε τα έργα των βαρών των δύο Σσωμάτων.

(Γ)

Θ.Φ.Μ.

Θ.Ι.

do=0,3mM33

y 2=0,2m

h=0,6m

m1

(Β)

m2

m2

(Α)

**W2**

**W1**

Σ1

Σ2

σχήμα 13

**Λύση:**

Ww1 = w1h = m1g h = 4.10.0,6 = 40.0,6=36J, **Ww1=24 J (42)**

Ww2= **-**w2y2 = m2g y2  = 6.10.0,2 = 60.0,2 = 12J, **Ww2=12 J (43)**

**6.**Το σώμα Σ του σχήματος έχει μάζα **m=3Kg** και αφήνεται να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα από το σημείο Α του τεταρτοκύκλιου. Το σώμα φθάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου και συνεχί-ζοντας τη κίνησή του κατά μήκος του οριζόντιου επιπέδου, αρχίζει την άνοδό του στο κεκλιμένο ε-πίπεδο οπότε φτάνει στο σημείο Ε.Δίνονται: **g=10 m/s2**, **R=1m,** **h=0,7m**

Zητούνται:το έργο του βάρους του σώματος

**ι.** για την διαδρομή (ΑΓ), **ιι.**για την διαδρομή (ΓΔ), **ιιι.**για την διαδρομή (ΔΕ),**ιv.** για την διαδρομή (ΑΓΔΕ)

**υΕ**

**υΔ**

**υΓ**

**(Ε)**

**R**

**(Γ)**

**Λ**

**ΝΒ**

**(Α)**

**(Δ)**

**Σ**

**R**

σχήμα ια

**(Β)**

**W1**

**W1**

**W1**

**Σ**

h=0,7m

**Λύση:**

Ww1(AΓ) = m1g h=3.10.1=30J **Ww1(AΓ) =30 J**

Ww1(ΓΔ) = w1 .0 = 0 J **Ww1(ΓΔ)****= 0 J**

Ww1 (ΔΕ) =- m1g h = 3.10(0,7) = -21J, **Ww1(ΔΕ)****=-21 J**

Ww1(ΑΓΔΕ) = - m1g (R-h) = - 3.10.(1-0,7) = 3.10.0,3 = 9J, **Ww1(ΑΓΔΕ**) **=9 J**

**Δ. ΕΡΓΟ ΚΑΘΕΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ **

**υΕ**

**υΔ**

**υΓ**

**(Ε)**

**R**

**(Γ)**

**Λ**

**ΝΒ**

**(Α)**

**(Δ)**

**Σ**

**R**

σχήμα 14

**(Β)**

**W1**

**W1**

**W1**

**Σ**

h=0,7m

Καθώς η δύναμη αυτή έχοντας διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια συνεπαφής ,έχει διεύθυνση επίσης κάθετη στην διεύθυνση της ταχύτητας(σχήμα14). Υπάρχουν βέβαια και περιπτώσεις στις οποίες η κίνηση γίνεται κατά την διεύθυνση της .ΣΕ αυτές τι η δύναμη  παράγει έργο (σχήμα 15).Αναφερόμαστε τώρα στο σχήμα 14 και στις διαδρομές ΑΓ,ΓΔ,ΔΕ και ΑΓΔΕ στις οποίες υπολογίσαμε πριν το έργο της δύναμης του βάρους.Σ΄όλες αυτές τις διαδρομές το έργο της δύναμης είναι μηδενικό.

υ

**m2**

**Σ1**

**m1**

**Θ.Φ.Μ.**

**Σ2**

σχήμα 15

**Ν1,2**

**WΝ (AΓ) = WΝ (ΓΔ) = WΝ (ΔΕ) = WΝ (AΓΔΕ) =0**

**Ε. ΕΡΓΟ ΤΑΣΗΣ ΝΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ(ΑΠΛΟ ) ΕΚΚΡΕΜΕΣ**

Απλό ή μαθηματικό εκκρεμές είναι μια διάταξη που αποτελείται απ ό ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα ,στο ένα άκρο του οποίου είναι δεμένο σφαιρίδιο μικρής ακτίνας και το άλλο του άκρο είναι δεμένο σε σταθερό σημείο όπως π.χ. ένα καρφί το οποί-ο έχει εισχωρήσει σε κατακόρυφο τοίχο

**(Γ)**

**h**

**l**

**(Π)**

**(Ζ)**

θ

**υΓ**

**(Δ)**

**(A)**

**Σ1**

**ΤΑ**

**ΤΒ**

**(Λ)**

**l**

**ΤΓ**

**υΒ**

**ΤΔ**

**(B)**

**l**

σχήμα 16

Αρχική θέση

Τελική θέση

**υΔ**

**WTασης=0 (45)**

Καθώς η τάση του νήματος είναι διαρκώς **κάθετη στην ταχύτητα**

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΙV**

**7.**Για σχήμα (16) δίνονται **l=1,2m**, **m=2Kg**, **g=10 m/s2**.Nα υπολογιστούν τα έργα του βάρους και της τάσης του νήματος, για την κίνηση του σώματος από το σημείο (Α) μέχρι το σημείο (Δ).Η κίνηση του σώματος γίνεται σε κατακόρυφο επίπεδο.(Δίνεται: **συνθ=0,6**)

**Λύση:**

**WT(ΑΔ)=0**

Ww(ΑΔ) = m1g (-h) = 2.10.(1,2-h) =20(1,2-h) **(46)**

υπολογισμός του ( -h):

Στο τρίγωνο ΠΛΔ , συνθ=, 0,5 , 0,5 =-h, 0,5 .1,2=-h

0,6m=-h , -h=0,6m

(46)Ww(ΑΔ) = 20.0,6=12 J , **Ww(ΑΔ) =12 J**

Στο τρίγωνο ΠΛΔ , συνθ=, 0,5 , 0,5 =-h, h=-0,5 ,

h=0,5 , h=0,5.1,2 , h=06m **(47)**

**Z. ΕΡΓΟ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΤΗΣ ΟΠΟΙΑΣ ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΤΗΣ**





**υ0=0**

ΣΧΗΜΑ 17

**x = 0**

**x 1**

**x 2**

Έστω ένα σώμα μάζας m το οποίο κινείται **ευθύγραμμα** πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.Στο σώμα ασκούνται διάφορες δυνάμεις μία από τις οποίες είναι και η δύναμη  .Η δύναμη αυτή έχει σταθερή διεύθυνση,αυτή του άξονα x΄x ενώ το μέτρο της μεταβάλλεται σε συνάρτηση με την θέση x του σώματος (ή σε συνάρ-τηση με την μετατόπιση όταν η αρχική θέση του σώματος ληφθεί αρχή του άξονα x΄x.Έτσι το μέτρο της δύναμης μπορεί να ακολουθεί τη συναρτησιακή σχέση:

**F**=4+2**x** (S.I.)

Σε αυτή την περίπτωση όπως μπορεί να αποδειχθεί το έργο της δύναμης 

υπολογίζεται **από το εμβαδό στο διάγραμμα F-x.** Συγκεκριμένα, το έργο είναι ίσο με το εμβαδό του **χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση του μέτρου της δύναμης ,τον άξονα της θέσης ( ή μετατόπισης ) και τα ό-ρια x1,x2**ανάμεσα στα οποία πραγματοποιήθηκε η κίνηση.

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ V**

**8.**Στο διπλανό διάγραμμα **F−x** φαίνεται η μεταβολή της αλγεβρικής τιμής της δύ-ναμης F σε σχέση με τη μετατόπιση. Η δύναμη ασκείται σε σώμα μάζας m το ο-ποίο κινείται κατά μήκος του άξονα x΄x,Πόσο είναι το έργο της για μετατόπιση από:

**α.** **0≤x≤4m** και

**β.** **2m≤x≤4m**.

**

**Λύση:**

**α.**Το έργο είναι ίσο με το εμβαδό του ορθογω-νίου τριγώνου με βάση το μήκος της μετατόπι-σης από 0m έως 4m

W(02)= Eμβαδόν == =40J,

**W(02)=** **=40J.**

**β.** Το έργο τώρα είναι ίσο με το εμβαδό του τραπεζίου, με ύψος το μήκος της μετατόπισης από 2m έως 4m.Το τραπέζιο αυτό έχει βάση μεγάλη (Β) μήκους 20Ν και βάση μικρή (β) μήκους 10Ν. Αυτό ,διότι με βάση το διά-γραμμα φαίνεται ότι το μέτρο της δύναμης είναι ανάλογο του μέτρου της μετατόπισης, οπότε στο **μισό του μέτρου της συνολικής μετατόπισης** α-ντιστοιχεί το **μισό μέτρο της δύναμης.**

W(24)= = Eμβαδόν = ==**30J**,

**W(24)**= **=30J .**

**Ερώτηση:**Τι θα κάνουμε στην περίπτωση όπου μια δύναμη είναι **αντίρροπη** της ταχύτητας ,επομένως έχει **αρνητικό έργο** και διαθέτουμε την γραφική παρά-σταση του **μέτρου** της δύναμης αυτής σε συνάρτηση με την θέση του σώματος:

**Απάντηση:**Θα υπολογίσουμε το **εμβαδό** όπως στην προηγούμενη άσκηση και θα γράψουμε ,

**W= - Eμβαδόν**



ΣΧΗΜΑ 18

**x = 0**

**x 1**

**x 2**

**υ**

**9.**Στο παρακάτω διάγραμμα (F−x) φαίνεται η μεταβολή του **μέτρου**μιας δύνα-μης  σε σχέση με τη **μετατόπιση** (θέση)του σώματος.Η δύναμη ασκείται στο σώμα που φαίνεται στο σχήμα 18.Έχει ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά από αυτή της ταχύτητας του σώματος.Πόσο είναι το **έργο** της για μετατόπιση από **x 1=0** **έως x 2 =20m** ;

**Λύση:**

Το έργο είναι ίσο με το **αντίθετο του εμβα-δού** του τραπεζίου, με ύψος το μήκος της μετατόπισης από 0m έως 20m.Το τραπέζιο αυτό έχει βάση μεγάλη (Β), μήκους 10Ν και βάση μικρή (β), μήκους 3Ν.

W = - Eμβαδόν = **-** = .

**W** **= - 130J .**

**Ερώτηση:**Τι θα κάνουμε στην περίπτωση όπου μια δύναμη έχει ίδια διεύθυνση με αυτή της ταχύτητας και αλλάζει φορά κατά την διάρκεια της κίνησης.

**Απάντηση:**Η αλλαγή της φοράς φαίνεται μόνο στο διάγραμματης **αλγεβρικής τιμής** της δύ-ναμηςκαι **όχι** του **μέτρου.** Σε αυτή την περίπτωσηυπάρχει **τμήμα** της γραφικής παράστα-σης **πάνω από τον άξονα της θέσης** και τμήμα **κάτω από τον άξονα (**Βλέπε διπλανό σχή-μα**).**Το συνολικό έργουπολογί-

**Ε1**

**Ε2**

ζεται με το **αλγεβρικό άθροι-σμα των επιμέρους εμβαδών.** Στον υπολογισμότων εμβαδών**, τα μήκη των πλευρών αντι-καθίστανται με το προσημό τους!!**

**10.H αλγεβρική τιμή** της δύναμης  , σταθερής διεύθυνσης η οποία ασκείται στο σώμα του σχήματος 19, μεταβάλλεται ως προς τη μετατόπιση σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα.

**Ι.** Το έργο της δύναμης από **x0=0** έως **x1=1m**

**ΙΙ.** Το έργο της δύναμης από **x1=1m** έως **x2=2m**

**ΙΙΙ.** Το έργο της δύναμης για μετατόπιση από **x0=0** έως **x2=2m**

**Λύση:**

**I.** W(01)= E1 == =2J,

**W(01)=** **=2J.**

**II.** W(12) = E2 =

**W(12)** **=-2J.**

**III.** W(02)= E1 + E2 = 2+(-2)=0 **J**

**W(02)** **=0J.**

**11.H αλγεβρική τιμή** της δύναμης  , κατακόρυφης διεύθυνσης η οποία ασκείται στο σώμα του σχήματος 20, μεταβάλλεται ως προς τη μετατόπιση σύμφωνα με τη σχέση **F**=14**-**2**y** (S.I.)

**(Γ)**

**(A)**



****

**y1=2m**

****

**y0= 0**

ΣΧΗΜΑ20

**y2=7m**

Nα υπολογίσετε το έργο της δύναμης αυτής για κατακόρυφη μετατόπιση

από **y1=2**έως **y2=7m**

**Λύση:**

**Μ**

**Λ**

**Κ**

y(m)

**7**

**2**

**10**

**0,0**

F(N)

ΣΧΗΜΑ21

Σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση

της αλγεβρικής τιμής της δύναμης σε συνάρτηση νε τη μετατόπιση

(σχήμα 21)

Το έργο της δύναμη είναι ίσο με το εμ-βαδό του τριγώνου ΚΛΜ.

W = Eμβ(ΚΛΜ) = =

**W**=

**12**Για το παρακάτω σχήμα δίνονται:**F1**=20+10**x (S.I.)**, **w = 30N** ,**μ=0,5**.Να υπολογίσετε τα έργα όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα για μετατόπιση από το σημείο Α με **xA=0 έως το σημείο Β στο οποίο απογειώνεται το σώμα .**Δίνονται:**ημθ=0,6,** **συνθ=0.8**







θ









ΔΧ

σχήμα 22

**Λύση:**

Αναλύουμε την δύναμη** σε δύο συνιστώσες μία οριζόντια και μία κατακόρυφη:

F1x= F1συνθ=(20+10**x** ).0,8=(16+8**x** )(Ν) (α)

F1y= F1ημθ =(20+10**x** ).0,6 = (12+6**x** )(Ν ) (β)

Βρίσκουμε την συναρτησιακή σχέση του μέτρου Ν της κάθετης δύναμης καθώς και του μέτρου της τριβής ολίσθησης, με τη θέση του σώματος.

Foλ,y = 0 , N + F1y - w = 0 , Ν + (12+6**x** )- 30 = 0, Ν = 30 - (12+6**x** ) **,**

Ν = 30 – 12- 6**x** ,  Ν = 18 - 6**x**  (γ)

Τ=μΝ =0,5.Ν=0,5.(18 - 6**x**) =9-3x (δ)

**Προσδιορισμός της θέσης απογείωσης του σώματος:**

Καθώς το σώμα κινείται προς τα δεξιά αυξάνεται το μέτρο της  και μειώνεται αυτό της .Κάποια στιγμή το μέτρο τη πρώτης εξισώνεται με το μέτρο του βάρους και της δεύτερης μηδενίζεται.Έτσι χάνεται η επαφή ανάμεσα στο έδαφος και στο σώμα.Βρίσκουμε τη θέση απογείωσης θέτοντας,

F1y =w , (12+6**x** )=30, **x =3m** (ε)

**Υπολογισμός έργων:**

**Μηδενικά έργα** λόγω καθετότητας ανάμεσα στις διευθύνσεις της δύναμης και της ταχύτητας.

**Ww = 0 J** , **WN = 0 J**, **WF1y=** **0J**

**Θετικό έργο** λόγω ίδιας κατεύθυνσης δύναμη και ταχύτητας

**16**

**Μ**

**Λ**

**Κ**

x(m)

**3**

**30**

**0,0**

F1x(N)

ΣΧΗΜΑ23

**Έργο της** 

WF1 = WF1x + WF1y  = WF1x + 0= WF1x

H  έχει μεταβλητό μέτρο ,

F1x =(16+8x ) 0m≤ x ≤3m και το έργο της θα υπολογιστεί ,μέσω του εμβαδού.

W = Eμβ(ΟΚΛΜ) = =

W =45 J (στ)

**Έργο της τριβής** 

**Λ**

**Κ**

x(m)

**3**

**9**

**0,0**

Τ(N)

ΣΧΗΜΑ24

H τριβή έχει μεταβλητό μέτρο ,

Τ = (9- 3x ) 0m≤ x ≤3m και το έργο της θα υπολογιστεί ,μέσω του εμβαδού.

W = - Eμβ(ΟΚΛ) = **-** = **-** =**-** 13,5 J

**W =-13,5 J**

**Θυμίζουμε** ότι το έργο της τριβής είναι **αρνητικό** καθώς αυτή έχει **κατεύθυνση αντίθετη** από την κατεύθυνση της ταχύτητας.

**Z. ΕΡΓΟ ΔΥΝΑΜΗΣ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ**

Όπως ήδη αναφέραμε ένα ελαστικά παραμορφωμένο ελατήριο ασκεί στο σώμα το οποίο είναι στερεωμένο στο άκρο του δύναμη της οποίας το μέτρο είναι ανά-λογο προς την παραμόρφωση την οποία έχει υποστεί (μερος Α΄σελίδα 7).

Θ.Φ.Μ

**k**

**l0**

**Fελ**

**υ0 = 0**

**W**

**dτελ**

**Fελ**

**dαρχ**

Αρχική θέση

Τελική θέση

σχήμα 25





Επομένως η δύ-ναμη που ασκεί το ελατήριο έχει μεταβλητό μέτρο και το έργο που παράγει υπολογίζεται μέσω του εμβαδού.Θα απόφύγουμε να εμπλακούμε στο σημείο αυτό με την γενική απόδειξη της σχέση στην οποία κατάλήγουμε όταν υπολογίζουμε το έργο γραφικά.Θα αναφέρουμε απλά ότι η σχέση αυτή είναι:

**Wελ = **  **(48)**

Όπου **dαρχ** και **dτελ** η αρχική και η τελική αντίστοιχα παραμόρφωση του ελατηρί-ου.Αυτές υπολογίζονται με βάση τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Να θυ-μίσουμε ότι η παραμόρφωση είναι δύο ειδών, **συσπείρωση** (μείωση του μηκους του ελατηρίου ) ή **επιμήκυνση** (αύξηση του ελατηρίου), και δεν έχει σημασία αυτό κατά των υπολογισμό του έργου.Επίσης κατά την εφαρμογή της σχέσης (48) ,δεν ενδιαφερόμαστε για τον αν η δύναμη του ελατηρίου είναι ομόρροπη ή αντίρροπη της ταχύτητας .Το πρόσημο του έργου προκύπτει μετά την αντικατά-σταση των αριθμητικών τιμών των μεγεθών και την εκτέλεση των πράξεων

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ VΙ**

**13** Για το παρακάτω σχήμα δίνονται **K=100N/m**, **d0=0,3m**, **d1=0,5m**, **d2=0,1m,**  **d3=0,25m.**To σώμα μάζας **m** ισορροπεί στη θέση ισορροπίας ,δηλαδή στη θέση όπου το βάρος του σώματος είναι α-ντίθετη δύναμη αυτής του ελατηρίου.Εκτρέπουμε το σώμα από την θέση ισορροπίας και το φέρ-νουμε στην θέση **(Α).**Στη θέση αυτή δίνουμε στο σώμα κατακόρυφη αρχική ταχύτητα με φορά προς τα πάνω.Αυτό περνάει από την θέση **(Β)** και στην συνέχεια από την θέση **(Γ).**

**Fελ**

**d3=0,25m**

Θ.Ι.

Θ.Φ.Μ.

(Γ)

**d 1=0,5m**

(Β)

m

(Α)

**do=0,3m**

**d 2=0,1m**

σχήμα 26

**Zητούνται:** το έργο της δύναμης του ελατηρίου,

**ι.** κατά την κίνηση του σώματος από την θέση μέγιστης συσπείρωσης **(Α)** στη θέση**(Β)**

**ιι.** κατά την κίνηση του σώματος από την θέση μέγιστης συσπείρωσης **(Α)** στη θέσηφυσικού μήκους του ελατηρίου

*περνά***ιιι**. κατά την κίνηση του σώματος από την θέση **(Β)** στη θέση **(Γ)**

**Λύση:**

**ι.Κίνηση από το Α στο Β**

Αρχική θέση ,Α

Αρχική παραμόρφωση d1=0,5m

Tελική θέση ,Β

Τελική παραμόρφωση d2=0,1m

**Έργο δύναμης ελατηρίου**

Wελ = ****  , Wελ =  ,

Wελ = ****,Wελ = ****

**Wελ(A ,B)= 24J**

**ιι.Κίνηση από το Α στη θέση φυσικού μήκους (Θ.Φ.Μ.)**

Αρχική θέση, Α

Αρχική παραμόρφωση d1=0,5m

Tελική θέση , Θ.Φ.Μ.

Τελική παραμόρφωση d=0m

**Έργο δύναμης ελατηρίου**

Wελ = ****  , Wελ =  ,

Wελ = ****,Wελ = ****

**Wελ(A , Θ.Φ.Μ) = 25J**

**ιιι.Κίνηση από το Β στη θέση φυσικού μήκους Γ.**

Αρχική θέση , Β

Αρχική παραμόρφωση d2=0,1m

Tελική θέση , Γ

Τελική παραμόρφωση d3=0,25m

**Έργο δύναμης ελατηρίου**

Wελ = ****  , Wελ =  ,

Wελ = ****,Wελ = ****

**Wελ(Β ,Γ) = -5,25J**

**14.**Το σώμα μάζας m αρχικά ηρεμεί στη θέση **Α** .Κάποια στιγμή δίνουμε οριζόντια αρχική ταχύτητα **u0** στο σώμα, οπότε αυτό αρχί-ζει να κινείται προς τ΄αριστερά.Στη Θ.φ.Μ το σώμα συναντά το ελατήριο και αρχίζει να το συσπειρώνει.Η ταχύ-τητα του σώματος μηδε-νίζεται στη θέση Β όπου η συσπείρωση του ελα-τηρίου είναι **d=1m.**Στη συνέχεια αλλάζει η φο-ρά κίνησης του σώματος και αυτό κινείται προς τα δεξιά.To ελατήριο έχει σταθερά **Κ=100Ν/m.**Zητείται το έργο της δύναμης του ελατηρίου,

Β

d=1m

L0

m

**Θ.Ι.**

**Θ.Φ.Μ.**

υ0

Α

σχήμα27

υ=0

**ι.**Για τη διαδρομή Α,Β

**ιι.** Για τη διαδρομή από Β, στη Θ.Φ.Μ κατά την επιστροφή του σώματος.

**ιιι.**Για την διαδρομή (Θ.Φ.Μ, Β  Θ.Φ.Μ )

**Λύση:**

**ι.Κίνηση από το Α στο Β**

Αρχική θέση ,Α

Αρχική παραμόρφωση dΑ=0m

Tελική θέση ,Β

Τελική παραμόρφωση dΒ=d=1m

**Έργο δύναμης ελατηρίου**

Wελ = ****  , Wελ =  ,

Wελ = ****, **Wελ(A ,B)= - 50J**

**ι.Κίνηση από Β στη Θ.Φ.Μ**

Αρχική θέση ,Β

Αρχική παραμόρφωση dΒ=1m

Tελική θέση ,ΘΦ.Μ.

Τελική παραμόρφωση d(Θ.Φ.Μ) =0 m

**Έργο δύναμης ελατηρίου**

Wελ = ****  , Wελ =  ,

Wελ = ****, **Wελ(Β ,Θ.Φ.Μ)= 50J**

**ι.Κίνηση από Θ.Φ.Μ ,στη θέση Β και επιστροφή στη Θ.Φ.Μ**

Αρχική θέση ,Θ.Φ.Μ

Αρχική παραμόρφωση dΘΦΜ=0m

Tελική θέση ,ΘΦ.Μ.

Τελική παραμόρφωση dΘ.Φ.Μ =0 m

**Έργο δύναμης ελατηρίου**

Wελ = ****  , **Wελ = 0J**

**Ζ . ΚΙΝΗΤΙΚΉ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΏΜΑΤΟΣ**

**Πως μπορούμε εύκολα να οδηγηθούμε στον ορισμό της κινητικής ενέρ-γειας;**

Ένα σώμα μάζας m κινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο και κάποια στιγμή έχει ταχύτητα μέτρου υαρχ.Τη χρονική αυτή στιγμή στο σώμα δρουν κάποιες δυνάμεις των οποίων η συνισταμένη είναι σταθερή ,συμβολίζεται με ,έχει μέτρο F και ίδια φορά με την ταχύτητα.Όταν το σώμα έχει μετατοπιστεί κατά Δ το μέτρο

****

****



Δ

****

ΣΧΗΜΑ 28

(+)

της ταχύτητας έχει γίνει υτελ.

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα γράφεται:

=m και αλγεβρικά F=mα **(49)**

Ισχύουν ακόμη

υτελ=υαρχ+α Δt **(50)** , Δx =υαρχ Δt + **(51)**

υτελ **-** υαρχ=α Δt ,  **(52)**

(51) ,(52) Δx =υαρχ (+

Δx =+

Δx =

Δx = , α = **(52α)**

(49), (52) F=mα , F=m ,

F Δx= m , **Wολ**= **(53)**

παρατηρούμε ότι το **συνολικό έργο των δυνάμεων** που έδρασαν στο σώμα κατά την μετατόπιση του κατά Δx ,**ισούται με την μεταβολή της μονόμετρης ποσότητας**

.

Ας θυμηθούμε τώρα ότι με το μέγεθος έργο , μετράμε την **προσπάθεια** που κατά-βάλαμε για να μεταβάλλουμε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος .Η σχέση (53) μας δείχνει ότι αυτή η προσπάθεια εξαρτάται και από τη μάζα του σώματος και **μετριέται έμμεσα** από τη μεταβολή της ποσότητας



**Ονομάζουμε την ποσότητα αυτή κινητική ενέργεια του σώματος και γρά-φουμε:**

Κ= **(54)**

Μονάδα κινητικής ενέργειας στο S.I. είναι το **1J (1 Joule)**

**Η κινητική ενέργεια ως μέγεθος μπορούμε ,πάντα απλοϊκά, να πούμε ότι εκφράζει την ικανότητα του σώματος ,λόγω της ταχύτητάς του να προ-καλέσει την κίνηση ή την παραμόρφωση ενός άλλου σώματος στο οποίο θα προσπέσει και το συνολικό έργο των δυνάμεων που δρουν σ΄ αυτό κα-τά μήκος μιας διαδρομής, μεταβάλλει αυτήν ακριβώς την ικανότητα**.

Ως φυσική συνέπεια ακολουθεί η διατύπωση του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας

**Η. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ**

Η σχέση (53) ,μετά την εισαγωγή της κινητικής ενέργειας γράφεται :

**Wολ = Κτελ-Καρχ** **(55)**

ή **Wολ =Δ Κ**

Η σχέση αυτή αποτελεί την μαθηματική έκφραση ενός πολύ σημαντικού θεωρή-ματος της φυσικής το οποίο αναφέρεται ως **θεώρημα μεταβολής της κινητι-κής** **ενέργειας**

**Διατύπωση :Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος κατά την κίνησή του από τη θέση Α στη θέση Β, είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων που έδρασαν στο σώμα στη θεωρούμενη διαδρομή.**

**ΣW = ΔΚ = Κτελ - Καρχ (56)**

Το θεώρημα αυτό αποτελεί μια διαφορετική έκφραση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα με την εισαγωγή των μεγεθών **«έργο»** και **«κινητική ενέργεια».**

Μπορούμε πιο αναλυτικά να γράψουμε

 **(56α)**

**Παρατήρηση 1**:

Στη σχέση (56α) **W1,W2,W3,.........Wν** είναι τα έργα των δυνάμεων οι οποίες δρούν στο σώμα, στη διαδρομή στην οποία εφαρμόζουμε το θεώρημα και η ο-ποία διαδρομή περιγράφεται στην εκφώνηση. Παραπάνω αναφερθήκαμε στα έργα των συνήθων δυνάμεων, οι οποίες εμφανίζονται στα προβλήματα.

**Παρατήρηση2**:Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας ως εξής:

**α.Επιλέγουμε** την διαδρομή στην οποία θα το εφαρμόσουμε.Η επιλογή της διαδρο-μής γίνεται με βάση το **ζητούμενο μέγεθος**, αλλά και τα **δεδομένα** του προβλήμα-τος.Επιλέγουμε δηλαδή διαδρομή που περιέχει το ζητούμενο μέγεθος και το δυνα-τόν μεγέθη των οποίων τις τιμές γνωρίζουμε. Αν στη μαθηματική έκφραση του θεω-ρήματος εμπεριέχονται μεγέθη, εκτός από το ζητούμενο, των οποίων τις τιμές δεν γνωρίζουμε, είναι προφανές ότι θα δημιουργήσουμε μαθηματικό σύστημα και με άλλες σχέσεις που ισχύουν το οποίο και θα επιλύσουμε.

**β.Σχεδιάζουμε** το σώμα στην αρχική και τελική θέση αυτής της διαδρομής και σημει-ώνουμε τις ταχύτητες **υαχρχ** και **υτελ** τις οποίες έχει αυτό στις παραπάνω θέσεις.

**γ.Σχεδιάζουμε** το σώμα σε μία η περισσότερες ενδιάμεσες θέσεις και **σχεδιάζουμε** επίσης τα διανύσματα των δυνάμεων οι οποίες ασκούνται στο σώμα, σ’αυτές τις ενδιάμεσες θέσεις.

**δ**.**Προσέχουμε** ιδιαίτερα μήπως κάποια ή κάποιες από τις παραπάνω δυνάμεις, **δεν** **δρουν** κατά μήκος όλης της διαδρομής ,αλλά σε κάποιο τμήμα αυτής, οπότε υπολο-γίζουμε το έργο τους κατά μήκος **μόνο** του τμήματος αυτού.

**ε. Προσέχουμε** μήπωςκάποια ή κάποιες από τις παραπάνω δυνάμεις είναι μεταβλη-τή οπότε πρέπει να υπολογίσουμε το έργο της είτε μέσω του εμβαδού στο διάγραμ-μα δύναμης – θέσης, είτε μέσω κάποιας ιδιαίτερης σχέσης που ισχύει για το έργο αυτής της δύναμης (θα δούμε σχετικό παράδειγμα αργότερα)

**στ.Γράφουμε** την έκφραση καθενός από τα επιμέρους έργα τα οποία περιέχονταιστην σχέση (56α), ή υπολογίζουμε τα επιμέρους έργα εφόσον έχουμε τις αριθμη-τικέςτιμές των μεγεθών που περιέχονται στην έκφραση του έργου.

**ζ.Αντικαθιστούμε** τα έργα των οποίων τις εκφράσεις γράψαμε παραπάνω ή τις αριθμητικές τους τιμές υπολογίσαμε παραπάνω, στην σχέση (56α), καθένα με το πρόσημό του

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ VIΙ**

**15.***Σώμα μάζας* ***m=5Kg*** *κινείται πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο έχοντας σταθερή ταχύτητα* ***,*** *μέτρου* **υ0=10m/*s****. Τη χρονική στιγμή* ***t0=0*** *ασκούνται στο σώμα σταθερές οριζόντιες δυνάμεις  και , μέτρων* ***F1=40N*** *και F2 αντίστοιχα (F2< F1). Η δύναμη  έχει ίδια φορά με την ταχύτητα του σώματος και η δύναμη  αντίθετη φορά από την ταχύτητα του σώματος .Διαπιστώνεται ότι όταν το σώμα ,μετά την άσκηση των δύο δυνάμεων, έχει διανύσει διάστημα* ***S=56m****,το μέτρο της ταχύτητάς του είναι* ***υ=18 m/s******a.****Να υπολογίσετε το μέτρο τη δύναμης .* **β.**Αν τη στιγμή κατά την οποία το σώμα έχει μετατοπιστεί κατά **56m**, καταργηθεί η δύναμη ** να βρεθεί το μέτρο **S΄** της πρόσθετης μετατόπισης του σώματος μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του.

**Λύση:**



**(Γ)**



**(Α)**

**(Γ)**



****



**S=56m**







**S ΄**

**(Δ)**

ΣΧΗΜΑ 29

**α.**Για τον υπολογισμό του μέτρου της δύναμης** μπορούμε να εργασθούμε με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και τις εξισώσεις που δίνουν την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας και του διαστήματος ,όπως ακριβώς το κάναμε στο Α΄μέρος .Εδώ θα εργασθούμε με το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε) καθώς δεν εμπλέκεται ο χρόνος ούτε ως δεδομένο ούτε ως ζητούμενο.

**Επιλέγουμε την διαδρομή ΑΓ**

Wολ = Κτελ - Καρχ = ΚΓ - ΚΑ =

 **(57)**

Ww= m g S συν900 = mg.0 = 0J,  **W=0J**

WN =NS συν 900 = N .56.0=0 J **WN = 0 J**

WF1=F1 S συν 00 =40.56.1= 2240 J **WF1=2240 J**

WF2=F2 S συν 1800 = F2 .56.(-1)= **-** F2 .56 **WF2=- F2 .56**

**(57),** 2240 **-** F2 .56 = = 

2240 **-**  560 = F2 .56 ,

1680 = F2 .56,

F2 ==30N**, F2=30N (58)**

**β.**Για τον υπολογισμό του ζητούμενου διαστήματος μπορούμε να εργασθούμε με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και τις εξισώσεις τις ευθύγραμμης ομαλά επιβρα-δυνόμενης κίνησης.Εδώ θα εργασθούμε με το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε) καθώς ούτε εδώ εμπλέκεται ο χρόνος ως δεδομένο ή ως ζη-τούμενο.

**Εφαρμόζουμε το (Θ.Μ.Κ.Ε)** **στην διαδρομή ΓΔ**

Wολ = Κτελ - Καρχ = ΚΔ - ΚΓ =

 **(59)**

Ww= m g S΄ συν900 = mg.0 = 0J,  **W=0J**

WN =NS΄ συν 900 = N .S΄.0=0 J **WN = 0 J**

WF2=F2 S΄ συν 1800 = 30 .S΄.(-1)= **-** 30S΄ **WF2** **= - 30S΄**

**(59), -** 30S΄ = = 

S΄ =  =27m, **S΄ =27m (60)**

**16.** *Σώμα μάζας* ***m=10Kg*** *ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο* ***(Π****) και στη θέση (Α),το οποίο ακολουθείται από δεύτερο οριζόντιο επίπεδο* ***(Π΄)*** *με το οποίο το σώμα παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης* ***μ.****Τη χρονική στιγμή t0=0* ***,****ασκείται στο σώμα σταθερή δύναμη ,μέτρου* ***F1=100N****.Η δύναμη  έχει διεύθυνση που σχηματίζει γωνία* ***θ*** *με την οριζόντια διεύθυνση ,όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνονται* ***g=10m/s2****,* ***ημθ=0,6*** *και* ***συν θ=0,8*** *Να υπολογίσετε:*

***a.****Την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή κατά την οποία αυτό έχει μετατοπιστεί από την αρχική του θέση* ***(Α),*** *κατά* ***6,25m*** *οπότε βρίσκεται στη θέση* ***(Β).***

***β.****Τη στιγμή κατά την οποία το σώμα βρίσκεται στη θέση* ***(Β),****εισέρχεται στο μη λείο επίπεδο* ***(Π΄).****Το σώμα διανύει διάστημα* ***25 m*** *κατά μήκος του κεκλιμένου και φτάνει στη θέση* ***(Γ)*** *όπου η ταχύτητά του έχει μέτρο* ***20 m/s****.Ποια η τιμή του συντελεστή τριβής ολίσθησης* ***μ.***

*γ.Στη θέση* ***(Γ) καταργείται η δύναμη*** **.Πόσο διάστημα θα διανύσει το σώμα μέχρι η ταχύτητά του να αποκτήσει μέτρο **6m/s.**







**(B)**















θ







 =0

Δx

**(A)**

**(B)**



**(Γ)**

Δx΄

**(Γ)**





**(Δ)**

Δx**΄΄**

ΣΧΗΜΑ 30

**Λύση:**

**α.Εφαρμόζουμε το (Θ.Μ.Κ.Ε)** **στην διαδρομή AB**

Wολ = Κτελ - Καρχ = ΚB - ΚA =

 **(61)**

**Ww =**w Δx συν900 **= 0 J**

**WN=**N Δx συν900 **= 0 J**

**WF1=**F1 Δx συνθ=100. 6,25. 0,8 = **500J**

**(60)**  , 100= **, = 10m/s (62)**

**β.Εφαρμόζουμε το (Θ.Μ.Κ.Ε)** **στην διαδρομή ΒΓ**

Wολ = Κτελ - Καρχ = ΚΓ - ΚΒ =

 **(63)**

**Ww =**w Δx΄ συν900 **= 0 J**

**WN=**N Δx΄ συν900 **= 0 J**

**WF1=**F1 Δx΄ συνθ=100. 25. 0,8 = **2000** **J**

**WT=**T Δx΄ συν180=μ Ν Δx (-1)

**ΣFy=0,** N+ F1y –w=0, N = w –F1y

F1y = F1 ημθ = 100.0,6=60Ν **WT=**μ Ν Δx΄ (-1) = **-** μ.40.25=- 1000μ

N = 100 –60=40Ν, N =40Ν

**(62)** 

 **,**  , **μ=0,5 (64)**

**γ.Εφαρμόζουμε το (Θ.Μ.Κ.Ε)** **στην διαδρομή ΓΔ**

Wολ = Κτελ - Καρχ = ΚΔ - ΚΓ =

 **(65)**

**Ww =**w Δx΄ συν900 **= 0 J**

**WN1=**N1 Δx΄ συν900 **= 0 J**

**WT΄=**T΄ Δx΄΄ συν180=μ Ν Δx (-1)

**ΣFy=0,** N1–w=0, N1= w =100Ν

**WT΄=**μ Ν1 Δx΄ (-1) = **-** 0,5.100.Δx΄΄=**- 50 Δx΄΄ (66)**

**(64)**  , 

, **Δx΄΄=37,5m (67)**

***17.****Από σημείο Α το οποίο απέχει απόσταση* ***h= 1,8m*** *από ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο έδαφος, εκτοξεύουμε ς κατακόρυφα προς τα κάτω σώμα μάζας* ***m=2Kg****. Η ταχύτητα εκτόξευσης έχει μέτρο 8m/s Δίνεται ακόμη* ***g=10m/s2***

*Ζητούνται*

***α.****το μέτρο της ταχύτητας του σώματος, ελάχιστα πριν αυτό συναντήσει το ελεύθερο άκρο του ελατηρί-ου.*

***β.****η σταθερά k του ελατηρίου αν η μέγιστη συσπείρωσή του μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του σώματος είναι* ***0,2 m***

***γ.****Tην ταχύτητα του σώματος, όταν ανεβαίνοντας ,περνά από τη θέση όπου το ελατήριο είναι συσπε-ιρωμένο κατά* ***0,1 m.******δ****.Αν θεωρήσουμε ότι κατά την επαφή σώματος – άκρου ελατηρίου το σώμα προσκολλάται στο εάκρο του ελατηρίου, χωρίς μείωση του μέτρου της ταχύτητας του, να βρεθεί η θέση όπου το σώμα θα ηρεμήσει στιγμιαία ανεβαίνοντας;*

**Λύση:**

(**Α)**

Θ.Φ.Μ.

(Δ)







**(Γ)**

**(Β)**

(Α)

****

****

**d3=0,1m**

(E)

**d 3**

(Β)

(Α)

**do**

**d 2=0,2m**

σχήμα 31



m

h

****

(z)



**α.Εφαρμόζουμε το (Θ.Μ.Κ.Ε)** **στην διαδρομή AB**



(Α)

(**Α)**

Θ.Φ.Μ.

**(Β)**

****

**do**

σχήμα 31α

m

h

****

Wολ = Κτελ - Καρχ = ΚΒ - ΚΑ =







36+64=υΒ2 , **υΒ=10m/s (68)**

**β.Εφαρμόζουμε το (Θ.Μ.Κ.Ε)στην διαδρομή BΔ**

Θ.Φ.Μ.

(Δ)







**(Γ)**

****

**(Β)**

**lo**

**d 1=0,2m**

σχήμα 31β

m

 **(69)**

**Wελ** = ****  , Wελ =  ,

**Wελ = -0.02k (70)**

**Ww =** mgd1 =2.10.0,2=4J

**Ww =4J**

**(68),** 

 ,  **k=** **(71)**

Θ.Φ.Μ.

(Δ)



**d2=0,1m**

(E)

**d 1=0,2m**

σχήμα 31γ



**γ.Εφαρμόζουμε το (Θ.Μ.Κ.Ε)στην διαδρομή ΔΕ**



**Wελ** = ****  , WFελ =  ,

WFελ = 

WFελ = 

**WFελ = 78J**

**Ww = -** mg (d1-d2 )=- 2.10. (- 0,2- 0,1 )=- 2J

**Ww =- 2J**

**(68),** **, υΕ= (72)**

**γ.Εφαρμόζουμε το (Θ.Μ.Κ.Ε)στην διαδρομή ΔΖ**

Θ.Φ.Μ.

(Δ)



**d 3**

**d 2=0,2m**

σχήμα 31δ

(z)



  **(73)**

**Wελ** = ****  ,

WFελ =  ,

WFελ = 

**WFελ =** 

**Ww = -** mg (d1+d3 )=

=**-** 2.10. ( 0,2+ d3)=**-** 4 **-**20 d3

**Ww =- 4 -20 d3**

**(70),** 

Δ=22 -4.260.(-10)=4+10400=10404=1022 , ****

**d3= , d3=0,1923m (74),**

***18.****Σώμα μάζας* ***m=4Kg*** *αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα στο σημείο Α κεκλιμένου επιπέδου, το οποίο απέχει από τη βάση του κεκλιμένου απόσταση* ***d=10m****. H γωνία κλίσης του κεκλιμένου είναι ίση με* ***30ο*** *(*  ***ημ 30ο =0,5, συν300=**** ).Δίνεται* ***g=10m/s2****.Μεταξύ σώματος και κεκλιμένου επιπέδου υπάρχει τριβή με συντελεστή τριβής ολίσθησης* ***μ=****.*

***α****.Ν α υπολογίσετε**το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή κατά την οποία φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.*

***β****.στη συνέχεια το σώμα κινείται κατά μήκος του οριζόντιου επιπέδου με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης* ***μ΄=0,5*** *και ηρεμεί στιγμιαία αφού διανύσει διάστημα συνολικά ίσο με* ***S=3m****.Κατά την κίνησή του το σώμα έρχεται σε επαφή με το ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου το οποίο και συσπειρώνει κατά* ***S΄.***Αν η σταθερά του ελατηρίου έχει τιμή k=320N/m, να βρεθεί η τιμή του ***S΄.***

****

**(Γ)**

****=0

**(A)**



**(Θ.Φ.Μ.)**

ΣΧΗΜΑ 32

**Λύση:**

**α.Εφαρμόζουμε το (Θ.Μ.Κ.Ε)** **στην διαδρομή AΓ**

ΣΧΗΜΑ 33

****

**(Γ)**



**=0**

**(A)**

θ





θ







**(72)**

**Τριβή**

wx= mgσυνθ=4.10. 0,5=20Ν

**wx=20Ν**

wy = mgημθ=4.10. **=20**Ν

**wy=20**Ν**

Foλ,y = 0 , N - wy = 0 , N- 20**= 0 ,

**N =20 Ν**

Τολ =μΝ =** 20** =10Ν **Τολ =10Ν**

**Έργο της** 

**WΤ**=Τ.d συν1800 = 10.10.(-1)=**-**100Ν, **WΤ=-100Ν (75)**

**Έργο της** 

**WΝ**=Ν.d συν900 = 0, **WΝ=0 (74)**

**Έργο της** 

**α΄ τρόπος απευθείας μέσω της σχέσης ορισμού του έργου**

**Ww**=w.d **συν(900 -θ)**=mgd **ημθ**=-4.10.10.0,5. =- 200 J , **Ww=200** **J (76)**

**β΄ τρόπος μέσω των έργων των συνιστωσών wx, wy**

**Ww**= Wwx + Wwy =Wwx  =wx  Δx συν00 =20. 10.1 =200 J , **Ww=200** **J (77)**

**Wwy=0** καθώς η 

**(72), (73), (74), (75),** ,   **(78)**

**β.Εφαρμόζουμε το (Θ.Μ.Κ.Ε)** **στην διαδρομή AΔ**

****

**S΄**

**(Δ)**









**l0**



****

**(Γ)**



****=0



**(Θ.Φ.Μ.)**

**S=1m**

ΣΧΗΜΑ 34

 ,



Τ1=μ΄Ν1, ΣFy=0, N1=w, N1=mg=4.10=40N, Τ1=0,5,40=20Ν, **Τ1=20Ν**



**Σχόλιο:**Πολλοί μαθητές εφαρμόζουν δύο φορές το Θ.Μ.Κ.Ε. ,μία στη διαδρομή από το σημείο Γ μέχρι τη Θ.Φ.Μ. και μία δεύτερη από τη Θ.Φ.Μ. μέχρι τη θέση Δ.Αυτό δεν συστήνεται ,αρκεί να είμαστε προσεκτικοί στο υπολογισμό του έργο κάθε δύνα-μης λαμβάνοντας υπόψη το σωστό μήκος στο οποίο έδρασε η κάθε δύναμη.Εδώ η τριβή έδρασε στη διαδρομή ΓΔ μήκους 3m και η δύναμη του ελατηρίου στη διαδρο-μή από τη Θ.Φ.Μ.έως το σημείο Δ.Η αρχική παραμόρφωση είναι μηδέν και η τελική S΄.

,

 , **S΄=0,5m (79)**



θ



****



θ







ΣΧΗΜΑ 35

***19.*** *Ένα σώμα έχει μάζα* ***m=10Kg*** *και κινείται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου υπό την επίδραση της δύνα-μης ,του βάρους και της τριβής.Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο κεκλιμένο και το σώμα είναι ίσος με* ***μ=3/4.***

*Kάποια στιγμή* ***t0=0*** *,το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου* ***8m/****s και αφού διανύσει διάστημα* ***S=20m*** *κινούμενο προς τα πάνω το μέτρο της ταχύτητάς του γίνεται* ***12m/s.*** *Δίνονται* ***g=10m/s2****,* ***ημθ=0,6 ,συνθ=0,8***

***α****.Νa υπολογιστούν τα έργα του βάρους και της τριβής ολίσθησης για τη διαδρομή μήκους S*

***β.****Το μέτρο της δύναμης *

*γ.Αν τη στιγμή κατά την οποία η ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο* ***12m/s,****αποσυρθεί η δύναμη *,πόσο επιπλέον διάστημα θα διανύσει το σώμα μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του.

**γ.Εφαρμόζουμε το (Θ.Μ.Κ.Ε)** **στην διαδρομή AB**

****

**(Α)**



θ



****



θ







**(Β)**

**S**

ΣΧΗΜΑ 36

 **(80)**

**Έργο Τριβής**

wy= mgσυνθ=10.10. 0,8=80Ν **wy=80Ν**

wx = mgημθ=10.10.0,6=60Ν  **wx =60Ν**

Foλ,y = 0 , N - wy = 0 , N- 80= 0 , **N =80 Ν**

Τ =μΝ =**80 =60Ν **Τ =60Ν**

**WΤ**=Τ.Δx συν1800 = 60.20.(-1)=**-**1200Ν, **WΤ=-1200Ν**

**Έργο Δύναμης**  

**WF1** =F1.Δx συν00 =F1.20.1 ,  **WF1 =20 F1**

**Έργο της** 

**WΝ**=Ν.Δx συν900 = 0, **WΝ=0**

**Έργο της** 

**μέσω των έργων των συνιστωσών wx, wy**

Ww= Wwx + Wwy =Wwx  =wx  Δx συν1800 =60. 20.(-1). =- 1200 J , **Ww=-1200** **J**

Wwy=0 καθώς η 

**(78),** ,



**γ.Εφαρμόζουμε το (Θ.Μ.Κ.Ε)** **στην διαδρομή BΓ**



θ

****





****=0

θ





**(Β)**

**S΄**

**(Γ)**

**(82)**



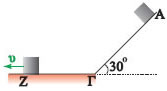






ΣΧΗΜΑ 37

***20.*** *Ένα σώμα αφήνεται να κινηθεί κατά μήκος του λείου κεκλιμένου επιπέδου. To σώμα μετά από τη διαδρομή ΑΓ εισέρχεται στο οριζόντιο επίπεδο με το οποίο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης* ***μ = 0,2.*** *Av είναι* ***AΓ = ΓZ = 6m****, να βρείτε την ταχύτητα με την οποία φτάνει το σώμα στο σημείο Ζ.*

*Δίνεται* ***g = 10m/s2****. *

**Λύση:**

θ

****

****



**(Ζ)**

****

**(Γ)**

****=0

**(A)**



****







θ

ΣΧΗΜΑ38

**Κεκλιμένο επίπεδο**

wx = mgημθ=m.10.0,5=5m  **wx =5m**

**Οριζόντιο επίπεδο**

Foλ,y = 0 , N1 – w= 0 , N1= mg , **N1=10m**

T=μΝ1, T=0,2.10m, **T=2m**

**γ.Εφαρμόζουμε το (Θ.Μ.Κ.Ε)** **στην διαδρομή AΓΖ**

**Προσέξτε τη εφαρμογή αυτή του θεωρήματος!!!**

 **(84)**



**(83),** 

, **,**  

**21**.Σώμα **Σ1** μάζας **m1=1Kg** ηρεμεί στο σημείο **Α** του οριζόντιου επιπέδου.Τη χρονική στιγμή **t0=0** στο σώμα ασκείται σταθερή δύναμη , μέτρου **F=10N**, η διεύθυνση της οποίας σχηματίζει γωνία **θ,** με **ημθ=0,6** και **συνθ=0,8**.Στο Σ1 ασκείται επίσηςδύναμη τριβής καθώς εμφανίζει με το δάπεδο συντε-λεστή τριβής ολίσθησης **μ= 0.5.**Έτσι το σώμα Σ1 επιταχύνεται για χρονικό διάστημα Δt στη διάρκεια του οποίου διανύει διάστημα **12m**.Στο τέλος αυτής της διαδρομής βρίσκεται στο σημείο**(Β)** όπου συγκρούεται κεντρικά με δεύτερο σώμα **Σ2** μάζας **m2=3Kg.** Η δύναμηπαύει να ασκείταιτη στιγμή της κρούσης.Το σώμα **Σ2** κινείται δεμένο στο άκρο αβαρούς νήματος μήκους **l=0,9m,** το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε οροφή και τη στιγμή της κρούσης έχει ταχύτητα **,** οριζόντιας διεύθυνσης, καθώς το νήμα τη στιγμή αυτή είναι κατακόρυφο.Η αρχική θέση **(Γ)** του **Σ2** βρίσκεται σε ύψος **h= 0,8m** πάνω από το οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα. Στη θέση αυτή το σώμα **Σ2**αφέθηκε χωρίς αρχική ταχύτητα και το νήμα ήταν τεντωμένο. Δίνεται **g=10m/s2.** **Ζητούνται: α**.οι ταχύτητες των δύο σωμάτων ελάχιστα πριν την κρούση.

**β**.οι ταχύτητες των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση, αν είναι γνωστό ότι μετά την κρούση :

1.το σώμα **Σ2** κινείται με ταχύτητα αντίθετης φοράς από αυτήν που είχε ελάχιστα πριν την κρούση και διαγράφοντας τόξο ακτίνας μήκους **l**,ηρεμεί στιγμιαία σε θεση **Ζ**.Στη θέση αυτή το νήμα σχηματίζει γωνία **600** με τη κατακόρυφο η οποία διέρχεται από το σημείο της οροφής στο οποίο είναι προσδεμένο το νήμα.

**2.**το σώμαΣ1,κινείται με αντίθετη φορά από αυτή που είχε πριν την κρούση και ακινητοποιείται αφού διανύσει διάστημα **8,1m**

**Σημείωση :Ακολουθούν ερωτήματα που δεν καλύπτονται από την ύλη της Α΄λυκείου**

**Λύση:**

***Υπολογισμός της ταχύτητας υ1του σώματος Σ1 ελάχιστα πριν την κρούση:***

Το σώμα **Σ1** κινείται με την επίδραση των σταθερών δυνάμεων:

* **Βάρος**  με μέτρο **w=mg (α)**
* **Kάθετη αντίδραση,** 
* **Δύναμη ** με μέτρο **F=10N**

Aυτή αναλύεται σε δύο συνιστώσες:

**Fx= Fσυνθ = 10.0,8 = 8Ν (β)**

και **Fy= Fημθ = 10.0,6 = 6Ν (γ)**

* **Τριβή** με μέτρο **Τ=μΝ** **(δ)**

U=0

**υ = 0**

**Σ1**

**Σ2**

**m2**

**υ = 0**

**υ΄1΄**

**m1**

**Σ1**

**t0 = 0**

**υ0 = 0**

**(Ρ)**

**Σ2**

**(Β)**

**W2**

**Τ΄σ**

**(Β)**

**W2**

**W1**

**Τ΄**

**N΄**

**W1**

(+)

**υ = 0**

**Τ**

**θ**

**F**

**Fx**

**N**

**υ2΄**

**600**

**Κ**

**υ1**

**υ2**

**(Γ)**

**(Α)**

**l**

**S**

**h**

**Κ**

**h΄**

**(Λ)**

**(Δ)**

**(Ε)**

**Fy**

**ημθ=0,6**

**συνθ=0,8**

σχήμα39

**(Ζ)**

**Τσ**

**S΄**

**υ**

Κατά την διεύθυνση του κατακόρυφου άξονα το σώμα δεν μετατοπίζεται οπότε ισχύει:

**ΣFy=0 ή N+Fy - w=0**

ή  **Ν=w- Fy ή Ν=mg-Fy**

ή  **Ν=1.10-6 =4Ν**

και η δύναμη της τριβή είναι:

**Τ=μΝ=0,5.4=2Ν (ε)**

**γ.Εφαρμόζουμε το (Θ.Μ.Κ.Ε)** **στην διαδρομή AΒ**

Wολ = ΔΚ=ΚΒ-ΚΑ

WT + Ww +WF + WN = **(ζ)**

-TS+ 0 +FSσυνθ + 0 =

-2.12+10.12.0,8 =

144=, **=12m/s**

Το σώμα **Σ2** κινείται κατά μήκος του τόξου **ΓΒ** και μας δίνεται για την κίνησή του το ύψος **h** από το οριζόντιο επίπεδο, του σημείου Γ από το οποίο αρχίζει η κίνησή του.

**Θα εφαρμόσουμε λοιπόν το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα Σ2 και την διαδρομή ΓΒ**

Wολ = ΔΚ=ΚΒ-ΚΓ

WTσ + Ww= **(η)**

**αλλά υΓ= 0**

**και WTσ=0**

καθώς η τάση Τσ την οποία ασκεί το νήμα στο σώμα, είναι διαρκώς κάθετη στη ταχύτητα του σώματος

**και ακόμη Ww=mgh**

διότι το σώμα κατεβαίνει χαμηλότερα.

Έτσι η σχέση (η) γίνεται:

0 + mgh=

απ’ όπου προκύπτει ότι:



**υ2=4m/s** **(θ)**

***Υπολογισμός της ταχύτητας υ΄2 του σώματος Σ2 αμέσως μετά την κρούση*.**

Μετά την κρούση το σώμα Σ2 κινείται κατά μήκος του τόξου ΒΖ και ηρεμεί στιγ-μιαία στη θέση (Ζ).Μας δίνεται για την κίνηση αυτή η γωνία κατά την οποία στρέφεται το νήμα.

**Θα εφαρμόσουμε πάλι το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα Σ2 αλλά για τη διαδρομή τώρα ΒΖ.**

Wολ = ΔΚ=ΚΖ-ΚΒ

WTσ + Ww= **(ι)**

αλλά **υΖ= 0**

και  **WTσ=0**

όπως το δικαιολογήσαμε πριν

και ακόμη **Ww= - mgh΄**

διότι το σώμα τώρα ανεβαίνει ψηλότερα.

Έτσι η σχέση (ι) γίνεται:

0 – mgh΄=

απ’ όπου προκύπτει ότι:

 **(ια)**

**Θα αποδείξουμε τώρα μια πολύ χρήσιμη σχέση.**

**Προσέχουνε στο σχήμα το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΖΡ.Έχουμε λοιπόν:**

**συν600= (ιβ)**

**όπου l το μήκος του νήματος ,οπότε: , **

** και h΄=0,45m (ιγ)**

**Από (ια) και (ιγ) έχουμε:**

, **υ΄2=3m/s**

***Υπολογισμός της ταχύτητας υ΄1 του σώματος Σ1 αμέσως μετά την κρούση*.**

**Εφαρμόσουμε πάλι το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα Σ2 αλλά για τη διαδρομή τώρα ΒΕ.**

Wολ = ΔΚ=ΚΒ-ΚΑ , WT΄ + Ww + WN =

-T΄S΄+ 0 + 0 =  ,

Τ΄=μΝ΄ , ΣFy=0, Ν΄ =w=10N, Τ΄=μΝ΄ =5N

5.8,1=  (Mέτρο)

**22.**Σφαιρικό σώμα **Σ1** μάζας **m1=1Kg** αφήνεται να ολισθήσει χωρίς ταχύτητα αρχική από ση-μείο **Λ** κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου ακτίνας **R.** Το σημείο **Λ** βρίσκεται σε ύψος **h=1m** πάνω από το οριζόντιο επίπεδο το οποίο διέρχεται από τη βάση του τεταρτοκύκλιου.Όταν το σώμα φτάνει στη βάση του τεταρτοκύκλιου έχουν έχει παραχθεί λόγω τριβών θερμότητα **5,5j**.Στη βάση του τεταρτοκύκλιου το σώμα **Σ1** έχει οριζόντια ταχύτητα μέτρου **υ1** και συγκρούεται κεντρικά πλαστικά οπότε προκύπτει ένα ενιαίο σώμα με δεύτερο ακίνητο σφαιρικό σώμα  **Σ2**ίσηςμάζας (**m2=m1).** Το ενιαίο σώμα **αμέσως μετά την**  κρούση έχει ταχύτητα μέτρου ίσου με το 50% του μέτρου της ταχύτητας του σώματος Σ1 ελάχιατα πριν την κρούση και ολισθαί-νει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης **μ=0,5.** Όταν φτάσει στο σημείο **Ν** η ταχύτητά του έχει μέτρο **=1m/s.**Στο σημείο αυτό συναντά το ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς **k,** το οποίο συσπειρώνει μέγιστα κατά **dmax**και όταν επανέρχεται στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου ηρεμεί οριστικά. Δίνεται ακόμη **g= 10 m/s2 .Ζητούνται:**

**α**.Η ταχύτητα **υ1** του σώματος **Σ1** στη βάση του τεταρτοκύκλιου και ελάχιστα πριν συνα-ντήσει το σώμα **Σ2 β.**To διάστημα που διανύει το ενιαίο σώμα στο οριζόντιο επίπεδο μέχρι να συναντήσει το ελατήριο **γ.**Η μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου **δ..**Η σταθερά **k** του ελατηρίου

4

υ2=0

Σ1

Σ1

h

υ=0

Λ

Σ2

Θ.Ι.

Κ

ΣΧΗΜΑ 40

**α.**Κατά την κίνηση του Σ1 στο τεταρτοκύκλιο η τριβή που ασκείται στο σώμα εί-ναι μεταβλητή τόσο στην κατεύθυνση όσο και στο μέτρο.Έτσι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο της μέσω της ποσότητας **–ΤS**.Έχουμε όμως την δυνατό-τητα να υπολογίσουμε έμμεσα το έργο της τριβής καθώς γνωρίζουμε την θερμό-τητα που παράγεται κατά την κίνηση στο τεταρτοκύκλιο και η θερμότητα αυτή είναι ίση κατ΄ απόλυτη τιμή με το παραγόμενο από την τριβή αρνητικό έργο.

Έχουμε λοιπόν:

**WT =-5,5J (85)**

Εφαρμόζουμε τώρα το Θ.Μ.Κ.Ε. στη διαδρομή ΛΚ

Κ

υ2=0

Σ1

Σ1

h

υ=0

Λ

Σ2

ΣΧΗΜΑ 41

Wολ = ΔΚ=ΚΚ-ΚΛ

WT + Ww + WN =

-5,5+ m1gh + 0 =  ,

-5,5+ 1.10.1 + 0 =  , 4,5 =  , **=3m/s (86)**

**β.**Το ενιαίο σώμα αμέσως μετά την κρούση έχει ταχύτητα V= ,**V=1,5m/s**

και αφού διανύσει διάστημα S φτάνει στη θέση φυσικού μη-κους του ελατηρίου με ταχύτητα μέτρου **V΄=1m/s. (87)**

V΄

**Τολ**

V

(m1+ m2)

Θ.Φ.Μ.

Κ

**Νολ**

**Wολ**

**S**

ΣΧΗΜΑ 42

**Υπολογίζουμε το διάστημα**

**S που διανύει το ενιαίο σώμα**

**εφαρμόζωντας το Θ.Μ.Κ.Ε.**

**στη διαδρομή ΚΛ.**

Nολ

υ

Nολ

Τολ

υ

wολ

Fελ

Τολ

V΄

d

Δ , υ=0

Θ.φ.Μ

Fελ

d

Θ.φ.Μ

υ=0

ΣΧΗΜΑ 43

Wολ = ΔΚ=ΚΘ.Φ.Μ-ΚΚ

WTολ + Wwολ + WNολ =

-ΤολS+ Ο + 0 = **(87)**

Τολ=μΝολ , ΣFy=0, Νολ=wολ=mολ.g ,

Τoλ=μ mολ.g =0,5.2.10=10N

**Τoλ=10N (88)**

-10.S =   **,** -10.S =  **, ,**

**S=0,125m (89)**

**γ.**Tο ενιαίο σώμα έχοντας ταχύτητα V΄,έρχεται σε επαφή με το ελατήριο το συσπειρώνει κατά d ηρεμεί στιγμιαία και στη συνέχεια κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση και όταν φτάνει στη θέση φυσικού μήκους ακινητοποι-είται.Εφαρμόζουμε το θεώρημα μετα-βολής της κινητικής ενέργειας στη κλειστή διαδρομή [θέση ισορροπίας –θέση Δ- θέση ισορροπίας].

Wολ = ΔΚ = Κτελ – Καρχ

WT + WFελ +Wwολ+ WΝολ =



WT + WFελ +Wwολ+ WΝολ = 0– 

**-**Τολ d **–**Τολ d+(= 

**Για το ελατήριο:**

**dαρχ=dτελ=0 ,έτσι έχουμε**

**-** 10 d-**-** 10 d = -

**-**10.2 d =-   **-** 20 d =   **d=0,05m** **(90)**

**δ.Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας στη διαδρομή θέση ισορροπίας –θέση Δ**

Wwολ= WΝολ = 0 ,άρα

WTολ + WFελ = 0– **-** Τολ d+( 0 -)= –

-Τολ d+= 

**-** 10.0,05+ = **-** 0.5+1= 

k=k=  **k** **(91)**

**23.**Για το παρακάτω σχήμα δίνονται:**F1**=20-10**x (S.I.)**, **w = 30N** ,**μ=0,5**.To σώμα στη θέση Α έχει ταχύτητα μέτρου **υ0=1m/s.**Να προσδιορίσετε την θέση **xμ** στην οποία θα μηδενιστεί η ταχύτητα του σώματος. Δίνonται **g=10m/s2, ημθ=0,6, συν θ=0,8**







θ









ΔΧ

σχήμα 44

**(A)**

**(B)**

**Λύση:**

Αναλύουμε την δύναμη** σε δύο συνιστώσες μία οριζόντια και μία κατακόρυφη:

F1x= F1συνθ=(20-10**x** ).0,8=(16 - 8**x** )(Ν) **(91)**

F1y= F1ημθ =(20-10**x** ).0,6 = (12- 6**x** )(Ν ) **(92)**

Βρίσκουμε την συναρτησιακή σχέση του μέτρου Ν της κάθετης δύναμης καθώς και του μέτρου της τριβής ολίσθησης, με τη θέση του σώματος.

Foλ,y = 0 , N + F1y - w = 0 , Ν + (12- 6**x** )- 30 = 0, Ν = 30 - (12-6**x** ) **,**

Ν = 30 – 12+ 6**x** ,  Ν = 18 + 6**x**  **(93)**

Τ=μΝ =0,5.Ν=0,5.(18 + 6**x**) =9+3x **(94)**

Έστω ότι η ταχύτητα του σώματος μηδενίζεται στη θέση xμ

**Υπολογισμός έργων:**

**Μηδενικά έργα** λόγω καθετότητας ανάμεσα στις διευθύνσεις της δύναμης και της ταχύτητας.

**Ww = 0 J** , **WN = 0 J**, **WF1y=** **0J**

**Θετικό έργο** λόγω ίδιας κατεύθυνσης δύναμη και ταχύτητας

**Έργο της** 

WF1 = WF1x + WF1y  = WF1x + 0= WF1x

H  έχει μεταβλητό μέτρο ,

**16**

**Μ**

**Λ**

**Κ**

x(m)

**xμ**

**16 - 8xμ**

**0,0**

F1x(N)

ΣΧΗΜΑ45

F1x =(16-8x ) 0m≤ x ≤xμ  και το έργο της θα υπολογιστεί ,μέσω του εμβαδού.

W F1x = Eμβ(ΟΚΛΜ) = =

=

W F1x = **(95)**

**Έργο της τριβής** 

**Λ**

**Κ**

x(m)

**3**

**9**

**0,0**

Τ(N)

ΣΧΗΜΑ46

**9+3xμ**

H τριβή έχει μεταβλητό μέτρο ,

Τ = (9+ 3x ) 0m≤ x ≤xμ  και το έργο της θα υπολογιστεί ,μέσω του εμβαδού.

W = - Eμβ(ΟΚΛ) = **-** =

 **(96)**

**Θυμίζουμε** ότι το έργο της τριβής είναι **αρνητικό** καθώς αυτή έχει **κατεύθυν-ση αντίθετη** από την κατεύθυνση της ταχύτητας.

**Εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα και τη διαδρομή ΑΒ,**

Wολ = ΔΚ=ΚΒ-ΚΑ

WT + WF1+Ww + WN =

+0+0=

**,** ή



xμ= , **xμ=3m (97)**

**24.**Σώμα μάζας **m=2Κg** αφήνεται να πέσει στη Γη από σημείο Α το οποίο απέχει από αυτήν απόσταση H.Στο σώμα εκτός του σταθερού βάρους ασκείται επιπλέ-ον κατακόρυφη δύναμη ****με φορά προς ταπάνω,το μέτρο της οποίας μεταβάλ-λεται σε συνάρτηση με την απόσταση y του σώματος από το σημείο Α σύμφωνα με την σχέση **F1=10+2y (S.I.).**To μέτρο της **F1** σταθεροποιείται στην τιμή που α-ποκτά στη θέση όπου μηδενίζεται η επιτάχυνση του σώματος.Δίνεται **g=10m/s2**

Nα υπολογίσετε το μέτρο της σταθερής ταχύτητας που αποκτά το σώμα.

**Λύση:**H επιτάχυνση του σώματος έχει αλγεβρική τιμή:

**(Α)**

**(Γ)**



****

**y1=5m**

****

ΣΧΗΜΑ47

**y0=0m**



**α=0m/s2**

α= w-F= 20- (10+2y)=10-2y (S.I.)

Mηδενίζεται στη θέση y1=5m

πράγματι: α=0, 10-2y1=0

**y1= 5m. (98)**

Όταν μηδενιστεί η επιτάχυνση σταθε-ροποιείται το μέτρο της στη τιμή του μέτρου του βάρους ,η επιτάχυνση παραμένει διαρκώς μηδενική, οπότε η ταχύτητα του σώματος σταθεροποιεί-ται.Υπολογίζουμε το μέτρο της σταθε-ρής ταχύτητας εφαρμόζοντας

το Θ.Μ.Κ.Ε. στη διαδρομή ΑΓ.

Wολ = ΔΚ=ΚΓ-ΚΑ

WF1 +Ww =

Ww=mgy1=2.10.5=100J, **Ww=100J**

**20**

y(m)

**5**

**10**

**0,0**

F1(N)

ΣΧΗΜΑ 48

WF1=**-**Eμβαδό.= **-** =

=J

**Παρατήρηση:Το έργο της δύναμης**

 **είναι αρνητικό καθώς αυτή έχει διαρκώς φορά αμτ΄πιθετη από την ταχύτητα.**

-75+100 = , 25 = , **= 5m/s** **(99)**

**ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**

**1.**Για το παρακάτω σχήμα δίνονται F1=40N: F2=10N, w = 20N,g=10m/s2 To έργο της δύναμη F1 για στη διάρκεια μετατόπισης Δx είναι ίσο με 200J και το έργο της τριβής στην ίδια μετατόπι-ση – 35J.









θ





ΔΧ

Να υπολογίσετε:

α. τον συντελεστή τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα και στο οριζόντιο δάπεδο

β.τα έργο της των δυνάμεων F2 ,w, N που ασκούνται στο σώμα στην διάρκεια της ίδιας μετατόπισης Δίνονται:ημθ=0,6, συνθ=0.8

**2.** *Τα σώματα Σ1 και Σ2 του σχήματος ,δέχονται τις δυνάμεις τριβής με μέτρα Τολ,1 , Τολ,2 και κινούνται με σταθερή επιτάχυν-ση 1m/s2.Τα σώματα έχουν μά-ζες m1= m2 =2Kg .Ο συντελε-στής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα Σ1 και στο οριζόντιο δάπεδο έχει τιμή μ=0,5, ενώ ανά-μεσα στο σώμα Σ2 και στο δάπε-δο έχει τιμή μ΄=0,2ακόμη g=10m/s2. Μετρήθηκε το μέτρο της τάσης του νήματος και βρέθηκε ίσο με 10Ν.Να βρεθούν τα έργα όλων των δυνάμεων που δρουν στο σώμα για μετaτόπιση του σώματος κατά Δx=5m*



**T2**

**Σ2**

Τ**ολ,2**

Τ**ολ,1**

**Σ1**

w2

N1

**υ**

**N2**

w1

**T1**

***3.*** *Ένα σώμα έχει μάζα m=10Kg και κινείται κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου υπό την επίδραση της δύναμης ,του βάρους και της τριβής.Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο κεκλιμένο και το σώμα είναι ίσος με μ=. Δίνονται g=10m/s2, ημθ=0,5 , συνθ=Το σώμα κινείται προς τα πάνω με επιβράδυνση , μέτρου α=1m/s2Να υπολογίσετε τα έργα όλων των δυνάμεων για μετατόπιση κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου κατά 4m.*



θ



****



θ







**4.**Για το παρακάτω σχήμα δίνονται m=10Kg , g = 10 m/s2.Tη χρονική στιγμή t0= 0 δίνουμε αρχική ταχύτητα υ0 στο σώμα και αυτό σταματά αφού διανύσει τόξο μήκους S=5m. Να βρεθεί o συντελε-στής τριβής ολίσθησης, αν το παραγόμενο έργο από την τριβή στην παραπάνω διαδρομή είναι ίσο με - 50 J



**Κάτοψη**



**Κ**

**S**

Αρχική θέση

Τελική θέση

**R**

**5**.Στο παρακάτω σχήμα τα δύο σώματα μαζών m1,m2 αφήνονται να κινηθούν,το Σ1 από το σημείο Α στη Γ και το Σ2 από το σημείο Β στη Γ Τα σώματα μετά από λίγο συναντώνται στο σημείο Γ (Θ.Φ.Μ).Δίνονται m1=4Kg και m2=6Kg.Ακόμη g=10 m/s2.Να υπολογίσετε τα έργα των βαρών των δύο σωμάτων

.

**(Γ)**

(Γ)

Θ.Φ.Μ.

Θ.Ι.

do=0,3mM33

y 2=0,2m

m1

(Β)

m2

m2

(Α)

**W2**

**W1**

Σ1

Σ2

h=0,6m

**6.***Σώμα πραγματοποιεί οριζόντια βολή με αρχική ταχύτητα* ***80m/s,*** *από σημείο Ο το οποίο βρίσκεται σε ύψος* ***160m*** *πάνω από την επιφάνεια της Γης. Δίνεται ακόμη το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας* ***g=10m/s2****.*

***α****.ποιο το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος και ελάχιστα πριν κτυπήσει σ’ αυτό.*

***β.****αν το σώμα εκτοξευτεί κατακόρυφα προς τα πάνω με την ίδια αρχική ταχύτητα ποιο το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή κατά την οποία αυτό φτάνει στο έδαφος και ελάχιστα πριν κτυπήσει σ’ αυτό.*

***γ.*** *στη δεύτερη περίπτωση αυτή του ερωτήματος β, σε πόση κατακόρυφη απόσταση από το σημείο εκτόξευσης η ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο ίσο με αυτό της αρχικής ταχύτητας εκτόξευσης.*

***6.1*** *Σώμα πραγματοποιεί πλάγια προς τα πάνω βολή υπό γωνία φ=600 με αρχική ταχύτητα μέτρου* ***80m/s,*** *από σημείο Ο το οποίο βρίσκεται σε ύψος 180m**πάνω από την επιφάνεια της Γης. Δίνεται ακόμη το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας g=10m/s2.*

***α****.πόσο ψηλότερα από το σημείο εκτόξευσης βρίσκεται το σώμα τη στιγμή κατά τη οποία το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου* ***40m/s***

***β****.ποιο το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή που φτάνει στο οριζόντιο επίπεδο στο οποίο βρίσκεται και το σημείο Ο.*

***γ.*** *ποιο το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή κατά την οποία αυτό φτάνει στο έδαφος και ελάχιστα πριν κτυπήσει σ’ αυτό.*

**6.2.**Το ψηλότερο σημείο μιας στέγης κτηρίου απέχει από το έδαφος κατακόρυφη απόσταση **45m.**H στέγη έχει μια πλευρά που αντισοιχεί σε κεκλιμένο επίπεδο μήκοςμ **10m** που σχημα-τίζει γωνία **600** με το οριζόντιο επίπεδο.Αφήνουμε ένα σώμμα μάζας mνα κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα από το ψηλότερο σημείπο της στέγης. Δίνεται **g=10m/s2.**

α.Αν η στέγη είναι λεία ποιο το μέτρο της ταχύτητας με την οποία το σώμα φτάνει στο έδαφος.

β.Αν η στέγη δεν είναι λεία αλλά παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης με το σώμα ίσο με **0,2** ποιο το μέτρο της ταχύτητας με την οποία το σώμα φτάνει στο έδαφος

**6.3.**Σώμα μάζας **m1=1Κg** μπορεί να κινείται πάνω σε κατακόρυφη σιδηροτροχιά σχήματος περι-φέρειας κύκλου ακτίνας ακτίνας **R.**Το σώμα εκτοξεύεται από σημείο Α της περιφέρειας που βρίσκεται στην οριζόντια διάμετρο και αριστερά, με ταχύτητακατακόρυφης διεύθυνσης, η ο-ποία έχει φορά προς τα κάτω Όταν φθάνει στο αντιδιαμετρικό σημείο του **Α**, το σημείο **Γ** της τροχιάς έχει ταχύτητα μέτρου **10 m/s** δίνεται ακόμη ***g=10m/s2****.*

**α.**Ποιο το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στη θέση Α.

**β.**Ποιο το μήκος της ακτίνας της σιδηροτροχιάς ,αν στη κατώτερη θέση **Δ** της τροχιάς έχει ταχύτητα μέτρου **12 m/s.**

**γ.** Ποιο το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στη θέση **Ε** όπου η επίκεντρη γωνία ΑΟΕ είναι ίση με 1500.

**δ.**Ποιο το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στη ψηλότερη θέση Ζ της τροχιάς .

**6.4.**Σώμα μάζας **m1=4Κg** μπορεί να κινείται πάνω σε κατακόρυφη σιδηροτροχιά σχήματος περιφέρειας κύκλου ακτίνας ακτίνας **R=1.8m.**Το σώμα εκτοξεύεται από σημείο Α της περιφέρειας που βρίσκεται στην οριζόντια διάμετρο και αριστερά, με ταχύτητακατακόρυφης διεύθυνσης, η οποία έχει φορά προς τα κάτω και μέτρο **10m/s.**  Δίνεται ακόμη ***g=10m/s2****.*

**α.**Ποιο το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στη ψηλότερη θέση της τροχιάς

**γ.** Ποιο το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στη θέση **Σ** όπου η επίκεντρη γωνία ΑΟΕ είναι ίση με 2100.(Μη κυρτή)

**6.5.**Ένα ξύλινο σώμαμάζας **Μ** είναι δεμένο στο άκρο αβαρούς νήματος μήκους **l=1.25m** και ισορροπεί με το νήμα σε κατακόρυφη θέση (το άλλο άκρο του νήματος είναι δεμένο σε καρφί ,έτσι ώστε το σώμα να μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο.).Βλήμα μάζας **m=200g** κινούμενο με ταχύτητα μέτρου υ0 σφηνώνεται στο κέντρο μάζας του σώματος .Να υπολογίσετε:

**α.**Την ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το συσσωμάτωμα ώστε μετά την πλαστική κρούση το νήμα να γίνει οριζόντιο.

**β.**Το μέτρο της ταχύτητας τη στιγμή κατά την οποία το νήμα έχει στραφεί κατά γωνία θ για την οποία ισχύει:**ημθ=0,6**,**συνθ=0,8**

**7.**Ένα ξύλινο σώμαμάζας **Μ** είναι δεμένο στο άκρο αβαρούς νήματος μήκους **l=0,8m** και ισορροπεί με το νήμα σε κατακόρυφη θέση (το άλλο άκρο του νή-ματος είναι δεμένο σε καρφί ,έτσι ώστε το σώμα να μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο). Βλήμα μάζας **m** κινούμενο με οριζόντια ταχύτητα σφηνώνεται στο κέντρο μάζας του ξύλινου σώματος Αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα έχει ταχύτητα μέτρου V, διαγράφει κυκλική τροχιά και όταν το νήμα γίνεται πάλι κατακόρυφο έχει ταχύτη-τα μέτρου **8m/s** Δίνεται **g=10m/s2** Nα βρείτε : **α.**Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος όταν το νήμα γίνεται οριζόντιο.

O

m

V

l

M

**β.**Το μέτρο της ταχύτητας V αμέσως μετά τη κρούση

**γ.**Την ταχύτητα του σώματος τη στιγμή κατά την οποία το νήμα έχει στραφεί κατά 1200.

** 8.**Στο διπλανό διάγραμμα **F−x** φαίνεται η μεταβολή της αλγεβρικής τιμής της δύ-ναμης F σε σχέση με τη μετατο-πιση. Η δύναμη ασκείται σε σώμα μάζας m το οποίο κινεί-ται κατά μήκος του άξονα x΄x,Πόσο είναι το έργο της για μετατόπιση από:

**6Ο**

**α.** **0≤x≤6m** και

**β.** **3m≤x≤6m**.

**3 6**

**9.**Στο παρακάτω διάγραμμα (F−x) φαίνεται η μεταβολή του **μέτρου**μιας δύνα-μης  σε σχέση με τη **μετατόπιση** (θέση)του σώματος.Η δύναμη ασκείται στο σώ-μα που φαίνεται στο σχήμα .Έχει ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά από αυτή της ταχύτητας του σώματος.Πόσο είναι το **έργο** της για με-τατόπιση από **x 1=0** **έως x 2 =3m** ;

**20**

**5**

**3**

**10.H αλγεβρική τιμή** της δύναμης  , σταθερής διεύθυνσης η οποία ασκείται στο σώμα του σχήμα-τος μεταβάλλεται ως προς τη μετατόπιση σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα.

**3**

**Ι.** Το έργο της δύναμης από **x0=0** έως **x1=3m**

**3 6**

**ΙΙ.** Το έργο της δύναμης από **x1=3m** έως **x2=6m**

**ΙΙΙ.** Το έργο της δύναμης για μετατόπιση από **x0=0** έως **x2=6m**

**-3**

**11.H αλγεβρική τιμή** της δύναμης  , κατακό-ρυφης διεύθυνσης η οποία ασκείται στο σώμα του διπλανού σχήματος μεταβάλλεται ως προς τη με-τατόπιση σύμφωνα ,με τη σχέση **F**=10**+**4**y** (S.I.)

**(Γ)**

**(A)**



****

**y1=2m**

****

**y0= 0**

**y2=7m**

Nα υπολογίσετε το έργο της δύναμης αυτής για κατακόρυφη μετατόπιση

από **y1=1**έως **y2=5m**

**12**Για το παρακάτω σχήμα δίνονται:**F1**=20-10**x (S.I.)**, **w = 30N** ,**μ=0,5**.Να υπολογίσετε τα έργα όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα για μετατόπιση από το σημείο Α με **xA=0 έως το σημείο Β στο οποίο μηδενίζεται στιγμιαία η επιτάχυνση .**Δίνονται:**ημθ=0,6,** **συνθ=0.8**







θ









ΔΧ

**13** Για το παρακάτω σχήμα δίνονται **K=100N/m**, **d0=0,3m**, **d1=0,5m**, **d2=0,1m,**  **d3=0,25m.**To σώμα μάζας **m** ισορροπεί στη θέση ισορροπίας ,δηλαδή στη θέση όπου το βάρος του σώματος είναι α-ντίθετη δύναμη αυτής του ελατηρίου.Εκτρέπουμε το σώμα από την θέση ισορροπίας και το φέρ-νουμε στην θέση **(Α).**Στη θέση αυτή δίνουμε στο σώμα κατακόρυφη αρχική ταχύτητα με φορά προς τα κάτω.Αυτό περνάει από την θέση **(Β)** και στην συνέχεια από την θέση **(Γ).**

υ

**Fελ**

**d3=0,25m**

Θ.Ι.

Θ.Φ.Μ.

(Γ)

(Β)

m

(Α)

**do=0,3m**

**Zητούνται:** το έργο της δύναμης του ελατηρίου,

**ι.** κατά την κίνηση του σώματος από την θέση μέγιστης συσπείρωσης **(Α)** στη θέση**(Β) ,( Θ.Φ.Μ)**

**ιι.** κατά την κίνηση του σώματος από την θέση μέγιστης συσπείρωσης **(Α)** στη θέση **(Γ).**

**ιιι**. κατά την κίνηση του σώματος από την θέση **(Β)** στη θέση **(Γ)**

**14.**Το σώμα μάζας m αρχικά ηρεμεί στη θέση **Α** .Κάποια στιγμή δίνουμε οριζόντια αρχική ταχύτητα **u0** στο σώμα, οπότε αυτό αρχί-ζει να κινείται προς τ΄αριστερά.Στη Θ.φ.Μ το σώμα συναντά το ελατήριο και αρχίζει να το συσπειρώνει.Η ταχύ-τητα του σώματος μηδε-νίζεται στη θέση Β όπου η συσπείρωση του ελα-τηρίου είναι **d=1m.**Στη συνέχεια αλλάζει η φο-ρά κίνησης του σώματος και αυτό κινείται προς τα δεξιά.To ελατήριο έχει σταθερά **Κ=100Ν/m.**Zητείται το έργο της δύναμης του ελατηρίου,

**ι.**Για τη διαδρομή Α,Β

**ιι.** Για τη διαδρομή από Β, στη Θ.Φ.Μ κατά την επιστροφή του σώματος.

**ιιι.**Για την διαδρομή (Θ.Φ.Μ, Β  Θ.Φ.Μ )

Β

d=1m

L0

m

**Θ.Ι.**

**Θ.Φ.Μ.**

υ0

Α

υ=0

,

**15.***Σώμα μάζας* ***m10Kg*** *ηρεμεί πάνω στο οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης* ***μ .*** *Τη χρονική στιγμή* ***t0=0*** *ασκούνται στο σώμα σταθερές οριζόντιες δυνάμεις  και , μέτρων* ***F1=100N*** *και* ***F2 =60Ν*** *αντίστοιχα (F2< F1). Η δύναμη  έχει ίδια φορά με την ταχύτητα του σώματος και η δύναμη  αντίθετη φορά από την ταχύτητα του σώματος.Όταν το σώμα ,διανύσει διάστημα* ***S=5m****,αποσύρεται η δύναμη F2  Το σώμα διανύει επιπλέον διάστημα* ***6m*** *οπότε μηδενίζεται η ταχύτητά του.*



**(Γ)**



**(Α)**

**(Γ)**



****



**S=56m**







**S ΄**

**(Δ)**

*Να υπολογίσετε το συντελεστή τριβής ολίσθησης* ***μ.***

**16.** *Σώμα μάζας* ***m=10Kg*** *ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο* ***(Π****) και στη θέση (Α),το οποίο ακολου-θείται από δεύτερο οριζόντιο επίπεδο* ***(Π΄)*** *με το οποίο το σώμα παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης* ***μ=0,5.****Τη χρονική στιγμή t0=0* ***,****ασκείται στο σώμα σταθερή δύναμη ,μέτρου* ***F1=100N****.Η δύναμη  έχει διεύθυνση που σχηματίζει γωνία* ***θ*** *με την οριζόντια διεύθυνση ,όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνονται* ***g=10m/s2****,* ***ημθ=0,6*** *και* ***συν θ=0,8*** *Να υπολογίσετε:*

=0





**(B)**















θ







 =0

Δx

**(A)**

**(B)**



**(Γ)**

Δx΄

**(Γ)**





**(Δ)**

Δx**΄΄**

***a.****Την μετατόπιση του σώματος όταν η ταχύτητά του έχει μέτρο* ***υ1 =10m/s*** *οπότε βρίσκεται στη θέση* ***(Β).***

***β.****Τη στιγμή κατά την οποία το σώμα βρίσκεται στη θέση* ***(Β),****εισέρχεται στο μη λείο επίπεδο* ***(Π΄).****Το σώμα διανύει διάστημα* ***S*** *οπότε φτάνει στο σημείο* ***(Γ)*** *όπου η ταχύτητά του έχει μέτρο* ***20 m/s****.Ποια η τιμή του διαστήματος* ***S.***

*γ.Στη θέση* ***(Γ) υποτετραπλασιάζεται το μέτρο της δύναμης*** **.Πόσο διάστημα θα διανύσει το σώμα μέχρι η ταχύτητά του να μηδενιστεί**.**

***17.****Από σημείο Α το οποίο απέχει απόσταση* ***h*** *από ελεύθερο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο έδαφος, εκτοξεύουμε ς κατακόρυφα προς τα κάτω σώμα μάζας* ***m=2Kg****. Η ταχύτητα εκτόξευσης έχει μέτρο* ***4 m/s*** *Δίνεται ακόμη* ***g=10m/s2***

(**Α)**

Θ.Φ.Μ.

(Δ)







**(Γ)**

**(Β)**

(Α)

****

****

(E)

**d Z**

(Β)

(Α)

**do**

**d Max**



m

h

****

(z)



*Ζητούνται*

***α.****το μήκος* ***h*** *αν η ταχύτητα του σώματος ελάχιστα πριν ακουμπήσει το ελατήριο έχει μέτρο* ***5m/s***

***β.****Aν η σταθερά* ***k*** *του ελατηρίου έχει τιμή* ***5400Ν/m*** *να βρεθεί η μέγιστη συσπείρωσή του .*

***γ.****Tην ταχύτητα του σώματος, όταν ανεβαίνοντας ,περνά από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.*

***δ****.Αν θεωρήσουμε ότι κατά την επαφή σώματος – άκρου ελατηρίου το σώμα προσκολλάται στο εάκρο του ελατηρίου, χωρίς μείωση του μέτρου της ταχύτητας του, να βρεθεί η θέση όπου το σώμα θα ηρεμήσει στιγμιαία ανεβαίνοντας;*

***18.****Σώμα μάζας* ***m=4Kg*** *αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα στο σημείο Α κεκλιμένου επιπέδου, το οποίο απέχει από τη βάση του κεκλιμένου απόσταση* ***d****. H γωνία κλίσης του κεκλιμένου είναι ίση με* ***30ο*** *(*  ***ημ 30ο =0,5, συν300=**** ).Δίνεται* ***g=10m/s2****.Μεταξύ σώματος και κεκλιμένου επιπέδου υπάρχει τριβή με συντελεστή τριβής ολίσθησης* ***μ=****.*

****

**(Γ)**

****=0

**(A)**



**(Θ.Φ.Μ.)**

***α****.Ν α υπολογίσετε**το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή κατά την οποία φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου aν η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου είναι* ***0,1 m*** *και το ελατήριο έχει σταθερά*

***k=200N/m***

***β****. To μήκος* ***d*** *του κεκλιμένου .επιπέδου.*

***19.*** *Ένα σώμα έχει μάζα* ***m=10Kg*** *και κι-νείται προς τα* ***κάτω*** *κατά μήκος του κε-κλιμένου επιπέδου υπό την επίδραση της δύναμης ,του βάρους και της τριβής.Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο κεκλιμένο και το σώμα είναι ίσος με* ***μ=1/4.***



θ



****



θ







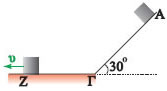
ΣΧΗΜΑ 33

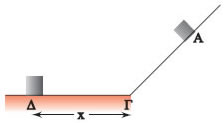
*Kάποια στιγμή* ***t0=0*** *,το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου* ***8m/****s και αφού διανύσει διάστημα* ***S=20m*** *το μέτρο της ταχύτητάς του γίνεται* ***12m/s.*** *Δίνονται* ***g=10m/s2****,* ***ημθ=0,6 ,συνθ=0,8***

***α****.Νa υπολογιστούν τα έργα του βάρους και της τριβής ολίσθησης για τη διαδρομή μήκους* ***S***

***β.****Το μέτρο της δύναμης *

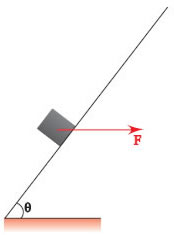
***20.*** *Ένα σώμα αφήνεται να κινηθεί κατά μήκος του λείου κεκλιμένου επιπέδου. To σώμα μετά από τη δια-δρομή ΑΓ εισέρχεται στο οριζόντιο επίπεδο με το οποίο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης* ***μ = 0,2.*** *Av η τα-χύτητα στο Ζ έχει μέτρο* ***υΖ =8m/s να υπολογίσετε το μήκος*** ***AΓ = ΓZ*** *.Δίνεται* ***g=10m/s2***

******

***21.*** *To σώμα μάζας m = 2kg αφήνεται στο σημείο A του λείου κεκλιμένου επιπέδου και μετά από διαδρομή x = 5m, σταματάει στο σημείο Δ του οριζόντιου επιπέδου με το οποίο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ = 0,6.*

Α*. Με πόση ταχύτητα φτάνει το σώμα στο σημείο Γ; Δίνεται g = 10m/s2.*

***22.****Ένα μικρό κιβώτιο με μάζα m = 5kg συγκρατείται ακίνητο πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο με το οποίο έχει*

* συντελεστή τριβής ολίσθησης μ = 0,4 όπως φαίνεται στην εικόνα.*

*Av αυξήσουμε την τιμή της δύναμης, ώστε να γίνει F = 100N το σώμα ολισθαίνει προς τα επάνω. Πόση ταχύτητα θα έχει μετά από μετατόπιση x = 5m;*

*Δίνεται ότι g = 10m/s2, ημθ = 0,6 συνθ = 0,8 και ότι μστmax = μολ.*

**23.**Για το παρακάτω σχήμα δίνονται:**F1**=10+10**x (S.I.)**, **w = 30N** ,**μ=0,5**.To σώμα στη θέση Α έχει ταχύτητα μέτρου **υ0=4m/s.**Να προσδιορίσετε την ταχύτητα του σώματος στη θέση **xαπ** στην οποία θα μηδενιστεί το μέτρο της τριβής ολίσθησης Δίνoνται **g=10m/s2, ημθ=0,6, συν θ=0,8**







θ









ΔΧ

**(A)**

**(B)**

**24.**Σώμα μάζας **m=2Κg** αφήνεται να πέσει στη Γη από σημείο Α το οποίο απέχει από αυτήν απόσταση H.Στο σώμα εκτός του σταθερού βάρους ασκείται επιπλέον κατα-κόρυφη δύναμη ****με φορά προς τα πάνω

**(Α)**

**(Γ)**



****

**y1=5m**

****

**y0=0m**



**α=0m/s2**

το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται σε συ-νάρτηση με την απόσταση **y** του σώματος από το σημείο Α σύμφωνα με την σχέση **F1=10-2y (S.I.)**.Δίνεται **g=10m/s2**

Nα υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας που αποκτά το σώμα τη στιγμή κατά την οποία :

**ι.**μηδενίζεται το μέτρο της δύναμης ****

**ιι.**Το σώμα έχει μετατοπιστεί κατά y=3m