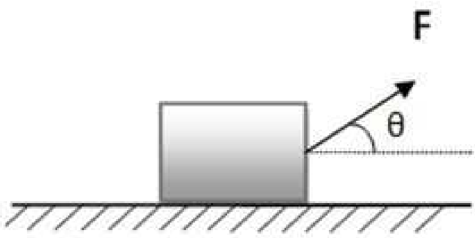
Ελάχιστη δύναμη για ….

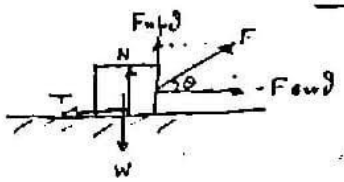
Σώμα βάρους W, μπορεί να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με συντελεστή τριβής ολίσθησης μ. Να βρεθεί η ελάχιστη δύναμη, που απαιτείται για να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα .

Δίνονται W και μ.



Λύση 1

Λύση



$$\Sigma F=0 \begin{cases} (x): & F\sigma\upsilon\nu\theta = T \\ (y): & F\eta\mu\theta + N = W \end{cases} \Rightarrow F\sigma\upsilon\nu\theta = \mu(W - F\eta\mu\theta)$$

$$T = \mu \cdot N = \mu\,(W - F\eta\mu\theta)$$

$$F\sigma\upsilon\nu\theta = \mu W - \mu F\eta\mu\theta$$

$$F(\sigma\upsilon\nu\theta + \mu\,\eta\mu\theta) = \mu W$$

$$\boxed{F = \frac{\mu W}{\sigma\upsilon\nu\theta + \mu\cdot\eta\mu\theta}}$$

F_{min} όταν $\sigma\upsilon\nu\theta + \mu\,\eta\mu\theta \rightarrow max$

$\boxed{\text{θέτω } \mu = \varepsilon\varphi\phi}$ Το κολπάκι!

άρα $\sigma\upsilon\nu\theta + \varepsilon\varphi\phi\cdot\eta\mu\theta$

$$\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\cdot\eta\mu\theta$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi + \eta\mu\phi\cdot\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

το συνφ είναι σταθερό

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(\theta-\phi)}{\sigma\upsilon\nu\phi} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\phi}$$

άρα το κλάσμα γίνεται max όταν $\sigma\upsilon\nu(\theta-\varphi) = 1$

$\theta - \varphi = 0$

$\theta = \varphi$

$$\mu = \varepsilon\varphi\varphi = \varepsilon\varphi\theta$$

$$\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 \Rightarrow \frac{\eta\mu^2\varphi}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi} + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$$

$$\varepsilon\varphi^2\varphi + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$$

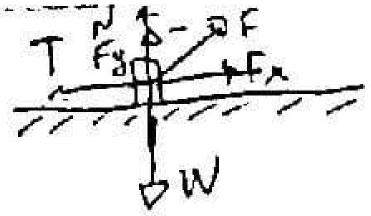
$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \sqrt{\mu^2+1}$$

$$\boxed{F_{min} = \frac{\mu w}{\sqrt{\mu^2+1}}}$$

Νίκος Ανέστης

Μια δεύτερη λύση από την Αγγελική Αναστοπούλου

Λύση 2:



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = W - F_y$$

$$F_x = T \Rightarrow F_x = \mu N \Rightarrow F_x = \mu (W - F_y) \Rightarrow$$

$$F_x^2 = \mu^2 W^2 + \mu^2 F_y^2 - 2\mu^2 W F_y$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F^2 = \mu^2 W^2 + \mu^2 F_y^2 - 2\mu^2 W F_y$$

$$+ F_y^2 \Rightarrow (\mu^2+1) F_y^2 - 2\mu^2 W F_y + \mu^2 W^2 - F^2 = 0$$

$$\Delta = 4\mu^4 W^2 - 4(\mu^2+1)(\mu^2 W^2 - F^2) \geq 0$$

$$\Delta = 4F^2(\mu^2+1) - 4\mu^2 W^2 \geq 0$$

$$4F^2(\mu^2+1) \geq 4\mu^2 W^2$$

$$F^2 \geq \frac{\mu^2 W^2}{\mu^2+1} \qquad F \geq \frac{\mu W}{\sqrt{\mu^2+1}}$$

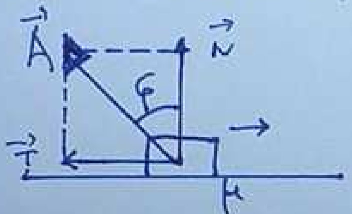
$$F_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = \frac{\mu \cdot W}{\sqrt{\mu^2+1}}$$

Λύση 3:

από τον Νίκο Μπούφουνο

Μια λύση με περισσότερο φυσικό υπόβαθρο και λιγότερες μαθηματικές (τριγωνομετρικές ή αλγεβρικές) απαιτήσεις.

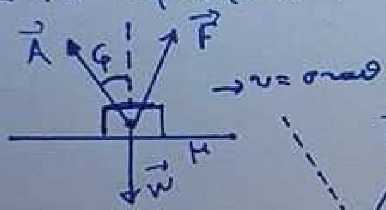
Σε ολίσθηση, ως γνωστόν, ισχύει $T = \mu . N \Rightarrow$



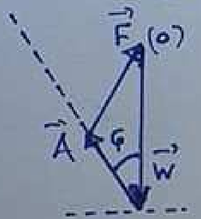
$$\mu = \frac{T}{N} = \varepsilon\varphi\varphi \quad (\alpha)$$

Η ολική αντίδραση του δαπέδου, επομένως, σχηματίζει με την κάθετο στις επιφάνειες επαφής γωνία φ με $\varepsilon\varphi\varphi = \mu$ (γωνία τριβής).

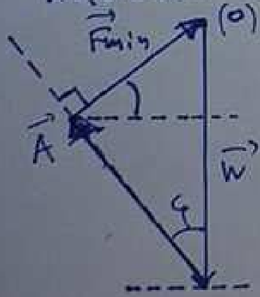
Στο θέμα μας: Για $\upsilon = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \Sigma\vec{F} = 0$



Άρα το πολύγωνο των δυνάμεων θα είναι κλειστό.



Η απαιτούμενη δύναμη $\vec{F}$ θα έχει ελάχιστο μέτρο αν ο φορέας της είναι κάθετος στον φορέα της $\vec{A}$:



Άρα $F_{min} = w . \eta\mu\varphi$ (1) (από το "δυναμοτρίγωνο")

Το ημφ μέσω της εφφ εκφράζεται απλά:

$$\varepsilon\varphi^2\varphi = \frac{\eta\mu^2\varphi}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi} = \frac{\eta\mu^2\varphi}{1-\eta\mu^2\varphi} \Rightarrow \eta\mu\varphi = \frac{\varepsilon\varphi\varphi}{\sqrt{\varepsilon\varphi^2\varphi+1}}$$

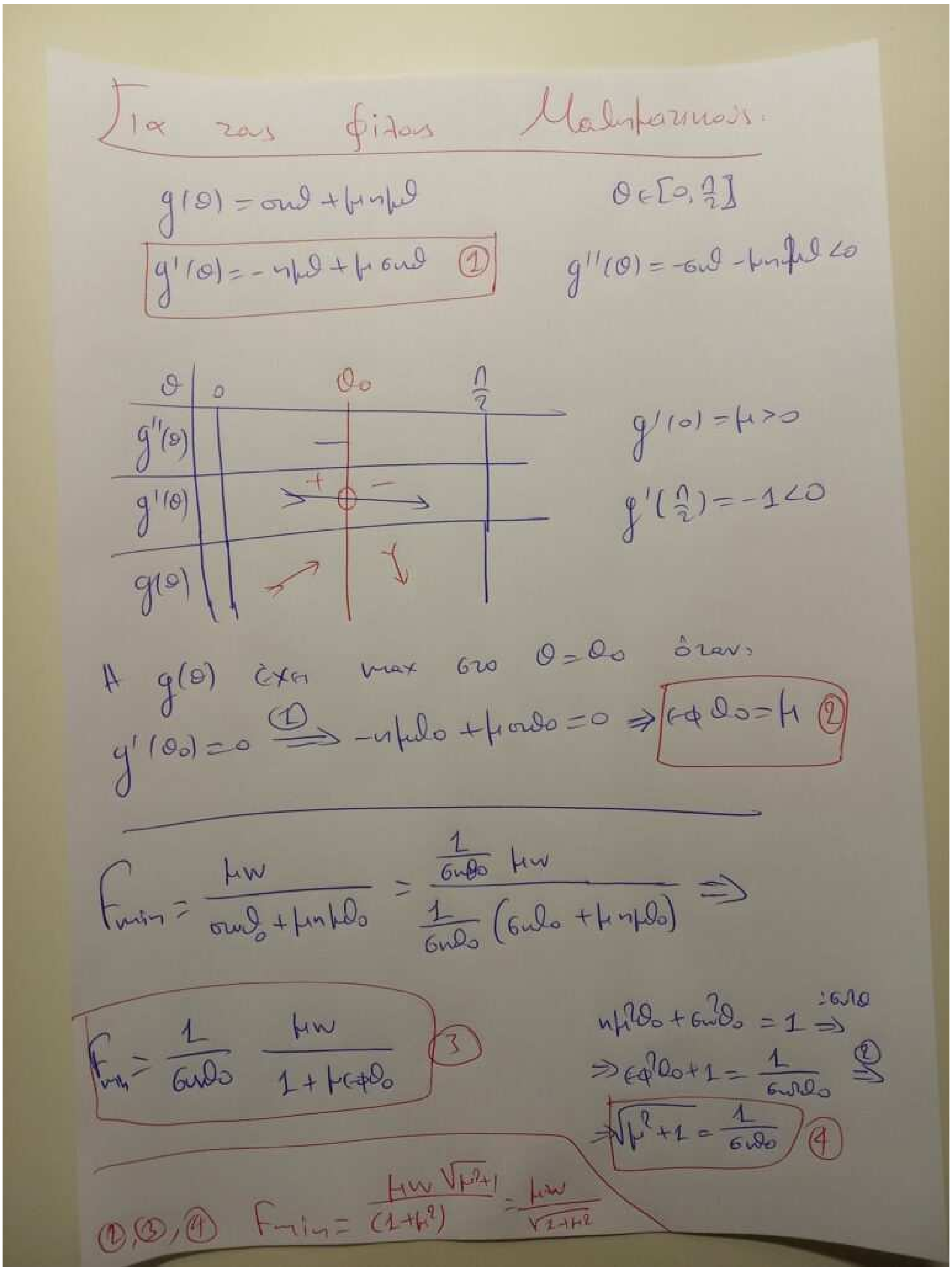
δηλαδή $\eta\mu\varphi = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}$ (λόγω (α))

Η (1) λοιπόν δίνει: $F_{min} = w\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}$

Σημείωση: Η κλίση της Fmin είναι επίσης φ με $\varepsilon\varphi\varphi = \mu$.

Λύση 4:

από Δημοσθένη Πασσαλίδη



Για τους φίλους Μαθηματικούς.

$g(\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta + \mu\,\eta\mu\theta \qquad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\boxed{g'(\theta) = -\eta\mu\theta + \mu\,\sigma\upsilon\nu\theta \quad (1)} \qquad g''(\theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta - \mu\,\eta\mu\theta < 0$

θ	0		θ_0		$\frac{\pi}{2}$
$g''(\theta)$			$-$		
$g'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$g(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$g'(0) = \mu > 0$

$g'(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$

Η $g(\theta)$ έχει max στο $\theta = \theta_0$ όταν

$g'(\theta_0) = 0 \xrightarrow{(1)} -\eta\mu\theta_0 + \mu\,\sigma\upsilon\nu\theta_0 = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon\varphi\theta_0 = \mu \quad (2)}$

$$F_{min} = \frac{\mu w}{\sigma\upsilon\nu\theta_0 + \mu\,\eta\mu\theta_0} = \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta_0}\,\mu w}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta_0}(\sigma\upsilon\nu\theta_0 + \mu\,\eta\mu\theta_0)} \Rightarrow$$

$$\boxed{F_{min} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta_0}\,\frac{\mu w}{1 + \mu\,\varepsilon\varphi\theta_0}} \quad (3)$$

$\eta\mu^2\theta_0 + \sigma\upsilon\nu^2\theta_0 = 1 \xRightarrow{:\sigma\upsilon\nu^2\theta}$

$\Rightarrow \varepsilon\varphi^2\theta_0 + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta_0} \xRightarrow{(2)}$

$\Rightarrow \boxed{\sqrt{\mu^2+1} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta_0}} \quad (4)$

$$(2),(3),(4) \quad F_{min} = \frac{\mu w\sqrt{\mu^2+1}}{(1+\mu^2)} = \frac{\mu w}{\sqrt{1+\mu^2}}$$