«*Ελάχιστη δύναμη για…*» (του Νίκου Ανέστη)

Μία ακόμη λύση

Με δεδομένα μ και W, αναζητούμε το ελάχιστο της συνάρτησης

$$F(\theta) = \frac{\mu W}{\sigma\upsilon\nu\theta + \mu \cdot \eta\mu\theta}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Για να λάβει η F την ελάχιστή της τιμή, αρκεί ο παρονομαστής

$$g(\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta + \mu \cdot \eta\mu\theta$$

να λάβει τη μέγιστή του τιμή.

Ορίζουμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, \mu)$ και $\vec{\beta} = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ για τα μέτρα των οποίων ισχύει ότι

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{1 + \mu^2} \quad \text{και} \quad |\vec{\beta}| = \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta} = 1$$

Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο των δύο παραπάνω διανυσμάτων, προκύπτει ότι:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu\theta + \mu \cdot \eta\mu\theta \quad (1),$$

όπου φ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Σύμφωνα και με τα παραπάνω, από την (1) έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta + \mu \cdot \eta\mu\theta = g(\theta) = \sqrt{1 + \mu^2} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \quad (2)$$

Επειδή $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\varphi \leq 1$, θα είναι

$$g(\theta) \leq \sqrt{1 + \mu^2} \Longrightarrow g_{max} = \sqrt{1 + \mu^2}$$

όταν $\varphi = 0$, δηλαδή όταν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα. Αυτό σημαίνει ότι

$$F_{min} = \frac{\mu W}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad \text{όταν} \quad \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \varepsilon\varphi\theta = \frac{\mu}{1} = \mu$$

Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com