Πρίντζιος Λάμπρος

Εύρεση των εξισώσεων θέσης φορτισμένου σωματιδίου εντός σταθερού, χρονοανεξάρτητου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου:

Έστω φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου q, που βρίσκεται μέσα σε σταθερό χρονοανεξάρτητο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $\vec{E}=\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$ και $\vec{B}=\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$, όπου E_x, E_y, E_z και B_x, B_y, B_z διακριτές και σταθερές συνιστώσες. Η κίνηση του σωματιδίου περιγράφεται από τη σχέση:

$$m\vec{\alpha}=q\cdot\left(\vec{E}+\vec{U}\times\vec{B}\right), \quad \text{όπου: } \vec{\alpha}=\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}, \quad \vec{U}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{matrix}$$

συντεταγμένες του σωματιδίου στον χώρο

ή

$$E_x+y'B_z-z'B_y=\frac{m}{q}x''$$

$$E_y+z'B_x-x'B_z=\frac{m}{q}y''$$

$$E_z+x'B_y-y'B_x=\frac{m}{q}z''$$

με αρχικές συνθήκες:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix} U_{x_0} \\ U_{y_0} \\ U_{z_0} \end{bmatrix}$$

Αν $\vec{B}=\vec{0}$, δηλαδή στον χώρο υπάρχει μόνο το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, τότε η θέση του σωματιδίου βρίσκεται πολύ εύκολα ότι είναι:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{U}_0 t+\frac{1}{2}\cdot\frac{q\vec{E}}{m}t^2, \text{ με } \vec{r}(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}, \vec{r}_0=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{bmatrix}, \vec{U}_0=\begin{bmatrix}U_{x_0}\\U_{y_0}\\U_{z_0}\end{bmatrix}$$

Για $\vec{B}\neq\vec{0}$ η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων είναι πιο δύσκολη. Στις επόμενες σελίδες παρουσιάζονται δύο τρόποι αντιμετώπισης του προβλήματος. Ο πρώτος με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace και κυρίως αλγεβρικών μεθόδων. Ο δεύτερος με τη χρήση τεχνικών της γραμμικής άλγεβρας για την επίλυση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Ο δεύτερος τρόπος περιέχει λιγότερες πράξεις και κατά τη γνώμη μου παράγει πιο ευκολοδιάβαστη μορφή της λύσης σε σχέση με τον πρώτο. Προφανώς και οι δύο μορφές της λύσης που παράγονται με τον πρώτο και τον δεύτερο τρόπο είναι πανομοιότυπες.

α' τρόπος:

$$\left.\begin{aligned} E_x + y' B_z - z' B_y &= \frac{m}{q} x'' \\ E_y + z' B_x - x' B_z &= \frac{m}{q} y'' \\ E_z + x' B_y - y' B_x &= \frac{m}{q} z'' \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\mathcal{L}} \left(\begin{array}{c}\text{μετασχηματισμός} \\ \text{Laplace}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{aligned} \frac{E_x}{s} + (sY(s) - y(0))B_z - (sZ(s) - z(0))B_y &= \frac{m}{q}\left(s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right) \\ \frac{E_y}{s} + (sZ(s) - z(0))B_x - (sX(s) - x(0))B_z &= \frac{m}{q}\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) \\ \frac{E_z}{s} + (sX(s) - x(0))B_y - (sY(s) - y(0))B_x &= \frac{m}{q}\left(s^2Z(s) - sz(0) - z'(0)\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{m}{q}s^2 & B_z s & -B_y s \\ -B_z s & -\frac{m}{q}s^2 & B_x s \\ B_y s & -B_x s & -\frac{m}{q}s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \\ Z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{m}{q}(sx_0 + U_{x_0}) + B_z y_0 - B_y z_0 - \frac{E_x}{s} \\ -\frac{m}{q}(sy_0 + U_{y_0}) + B_x z_0 - B_z x_0 - \frac{E_y}{s} \\ -\frac{m}{q}(sz_0 + U_{z_0}) + B_y x_0 - B_x y_0 - \frac{E_z}{s} \end{bmatrix}$$

είναι της μορφής $A \cdot \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \\ Z(s) \end{bmatrix} = B$,

όπου:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} \frac{m^2}{q^2}s^4 + B_x^2 s^2 & \frac{m}{q}B_z s^3 + B_x B_y s^2 & B_x B_z s^2 - \frac{m}{q}B_y s^3 \\ -\frac{m}{q}B_z s^3 + B_x B_y s^2 & \frac{m^2}{q^2}s^4 + B_y^2 s^2 & \frac{m}{q}B_x s^3 + B_y B_z s^2 \\ B_x B_z s^2 + \frac{m}{q}B_y s^3 & B_y B_z s^2 - \frac{m}{q}B_x s^3 & \frac{m^2}{q^2}s^4 + B_z^2 s^2 \end{bmatrix}$$

και $\det(A) = -\frac{m^3}{q^3}s^6 - \frac{m}{q}s^4 \cdot (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)$

Δηλαδή:

$$A^{-1} = -\frac{\frac{q}{m}\cdot\frac{1}{s^2}}{\frac{m^2}{q^2}s^2 + B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}\cdot\begin{bmatrix} \frac{m^2}{q^2}s^2 + B_x^2 & B_xB_y + \frac{m}{q}B_z s & B_xB_z - \frac{m}{q}B_y s \\ B_xB_y - \frac{m}{q}B_z s & \frac{m^2}{q^2}s^2 + B_y^2 & B_yB_z + \frac{m}{q}B_x s \\ B_xB_z + \frac{m}{q}B_y s & B_yB_z - \frac{m}{q}B_x s & \frac{m^2}{q^2}s^2 + B_z^2 \end{bmatrix}$$

Και: $\begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \\ Z(s) \end{bmatrix} = A^{-1}\cdot B$, άρα:

$$X(s) = -\frac{\frac{q}{m}\cdot\frac{1}{s^2}}{\frac{m^2}{q^2}s^2 + B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}\cdot\Bigg\{\left(\frac{m^2}{q^2}s^2 + B_x^2\right)\cdot\left[-\frac{m}{q}(sx_0 + U_{x_0}) + B_z y_0 - B_y z_0 - \frac{E_x}{s}\right] +$$

$$+\left(B_xB_y + \frac{m}{q}B_z s\right)\cdot\left[-\frac{m}{q}(sy_0 + U_{y_0}) + B_x z_0 - B_z x_0 - \frac{E_y}{s}\right] +$$

$$+\left(B_xB_z - \frac{m}{q}B_y s\right)\cdot\left[-\frac{m}{q}(sz_0 + U_{z_0}) + B_y x_0 - B_x y_0 - \frac{E_z}{s}\right]\Bigg\} =$$

$$= -\frac{\frac{q}{m}\cdot\frac{1}{s^2}}{\frac{m^2}{q^2}s^2 + B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}\cdot\Bigg[\left(\frac{m^2}{q^2}s^2 + B_x^2\right)\cdot\left(-\frac{m}{q}x_0 s - \frac{m}{q}U_{x_0} - \frac{E_x}{s}\right) +$$

$$+\left(B_xB_y + \frac{m}{q}B_z s\right)\cdot\left(-\frac{m}{q}y_0 s - \frac{m}{q}U_{y_0} - \frac{E_y}{s}\right) +$$

$$+\left(B_xB_z - \frac{m}{q}B_y s\right)\cdot\left(-\frac{m}{q}z_0 s - \frac{m}{q}U_{z_0} - \frac{E_z}{s}\right) +$$

$$+\frac{m^2}{q^2}(B_z y_0 - B_y z_0)\cdot s^2 +$$

$$+\frac{m}{q}\left(B_xB_z z_0 - B_z^2 x_0 - B_y^2 x_0 + B_xB_y y_0\right)\cdot s\Bigg]$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{\frac{q^3}{m^3}\cdot\frac{1}{s^2}}{s^2+\frac{q^2}{m^2}\cdot\left(B_x^2+B_y^2+B_z^2\right)}\cdot\left[\frac{m^3}{q^3}x_0 s^3+\frac{m^2}{q^2}\left(\frac{m}{q}U_{x_0}+\cancel{B_z y_0}-\cancel{B_y z_0}\right)\cdot s^2+\right.$$

$$+\frac{m}{q}\cdot\left(B_x^2 x_0+\frac{m}{q}E_x+\cancel{B_x B_y y_0}+\cancel{B_x B_z z_0}+\frac{m}{q}B_z U_{y_0}-\frac{m}{q}B_y U_{z_0}\right)s+$$

$$+\frac{m}{q}\left(B_x^2 U_{x_0}+B_x B_y U_{y_0}+B_x B_z U_{z_0}+E_y B_z-E_z B_y\right)+$$

$$+\left(E_x B_x^2+E_y B_x B_y+E_z B_x B_z\right)\cdot\frac{1}{s}+$$

$$\left.+\frac{m^2}{q^2}\left(\cancel{B_y z_0}-\cancel{B_z y_0}\right)s^2+\frac{m}{q}\left(B_z^2 x_0+B_y^2 x_0-\cancel{B_x B_z z_0}-\cancel{B_x B_y y_0}\right)\cdot s\right]\rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow X(s) = \frac{s^{-2}}{s^2+\frac{q^2}{m^2}\left(B_x^2+B_y^2+B_z^2\right)}\cdot\left\{x_0 s^3+U_{x_0}s^2+\right.$$

$$+\frac{q^2}{m^2}\cdot\left[x_0\left(B_x^2+B_y^2+B_z^2\right)+\frac{m}{q}\left(E_x+B_z U_{y_0}-B_y U_{z_0}\right)\right]s+$$

$$+\frac{q^2}{m^2}\cdot\left(B_x^2 U_{x_0}+B_x B_y U_{y_0}+B_x B_z U_{z_0}+E_y B_z-E_z B_y\right)+$$

$$\left.+\frac{q^3}{m^3}\cdot\left(E_x B_x^2+E_y B_x B_y+E_z B_x B_z\right)s^{-1}\right\}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της έκφρασης της θέσης x στο πεδίο της συχνότητας $X(s)$ θα μας δώσει τη χρονική συνάρτηση $x(t)$ της θέσης. Δηλαδή: $X(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t)$. Χρειαζόμαστε τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace των ρητών κλασμάτων

$$\frac{s^{n-2}}{s^2+d^2}, \quad n=-1,0,1,2,3$$ τους οποίους υπολογίζουμε

παρακάτω:

i) $n=3$: $$\frac{s}{s^2+d^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \cos(dt)$$

ii) $n=2$: $$\frac{1}{s^2+d^2} = \frac{1}{d}\cdot\frac{d}{s^2+d^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{\sin(dt)}{d}$$

iii) $n=1$: $$\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+d^2} = \frac{1}{d^2}\cdot\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+d^2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{d^2}\cdot\left[1-\cos(dt)\right]$$

iv) $n=0$: $$\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s^2+d^2} = \frac{1}{d^2}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+d^2}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{d^2}\cdot\left[t-\frac{\sin(dt)}{d}\right]$$

v) $n=-1$: $$\frac{1}{s^3}\cdot\frac{1}{s^2+d^2} = \frac{1}{d^2 s^3}+\frac{1}{d^4}\cdot\left(\frac{s}{s^2+d^2}-\frac{1}{s}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2d^2}t^2 + \frac{1}{d^4}\left[\cos(dt)-1\right] = \frac{1}{2d^2}t^2 - \frac{1}{d^4}\left[1-\cos(dt)\right]$$

Για το $X(s)$ έχουμε: $d = \frac{q}{m}\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}$, άρα:

$$x(t) = x_0\cdot\cos(dt) + U_{x_0}\cdot\frac{\sin(dt)}{d} +$$

$$+\frac{q^2}{m^2}\left[x_0\left(B_x^2+B_y^2+B_z^2\right)+\frac{m}{q}\left(E_x+B_zU_{y_0}-B_yU_{z_0}\right)\right]\cdot\frac{1}{d^2}\left[1-\cos(dt)\right]+$$

$$+\frac{q^2}{m^2}\cdot\left(B_x^2U_{x_0}+B_xB_yU_{y_0}+B_xB_zU_{z_0}+E_yB_z-E_zB_y\right)\cdot\frac{1}{d^2}\left[t-\frac{\sin(dt)}{d}\right]+$$

$$+\frac{q^3}{m^3}\cdot\left(E_xB_x^2+E_yB_xB_y+E_zB_xB_z\right)\cdot\left[\frac{1}{2d^2}t^2-\frac{1}{d^4}\left[1-\cos(dt)\right]\right] \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow x(t) = \frac{q}{2m}\cdot\frac{E_xB_x^2+\left(E_yB_y+E_zB_z\right)\cdot B_x}{B_x^2+B_y^2+B_z^2}\cdot t^2 +$$

$$+\frac{B_x^2U_{x_0}+B_x\cdot\left(B_yU_{y_0}+B_zU_{z_0}\right)+E_yB_z-E_zB_y}{B_x^2+B_y^2+B_z^2}\cdot t + x_0 +$$

$$+\frac{m}{q}\cdot\frac{\left(B_y^2+B_z^2\right)U_{x_0}-B_x\left(B_yU_{y_0}+B_zU_{z_0}\right)+E_zB_y-E_yB_z}{\left(B_x^2+B_y^2+B_z^2\right)^{3/2}}\cdot\sin(dt)+$$

$$+\frac{m}{q}\cdot\frac{\left(B_zU_{y_0}-B_yU_{z_0}\right)\left(B_x^2+B_y^2+B_z^2\right)+E_x\left(B_y^2+B_z^2\right)-\left(E_yB_y+E_zB_z\right)\cdot B_x}{\left(B_x^2+B_y^2+B_z^2\right)^2}\left[1-\cos(dt)\right],$$

με $d = \frac{q}{m}\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}$

Παρομοίως έχουμε για τις εκφράσεις $Y(s)$ και $Z(s)$ τα παρακάτω:

$$Y(s) = -\frac{\frac{q^3}{m^3}\cdot s^{-2}}{s^2+\frac{q^2}{m^2}\left(B_x^2+B_y^2+B_z^2\right)}\cdot\Bigg\{\left(B_xB_y-\frac{m}{q}B_zs\right)\cdot\left[-\frac{m}{q}\left(sx_0+U_{x_0}\right)+B_zy_0-B_yz_0-\frac{E_x}{s}\right]+$$

$$+\left(\frac{m^2}{q^2}s^2+B_y^2\right)\cdot\left[-\frac{m}{q}\left(sy_0+U_{y_0}\right)+B_xz_0-B_zx_0-\frac{E_y}{s}\right]+$$

$$+\left(B_yB_z+\frac{m}{q}B_xs\right)\cdot\left[-\frac{m}{q}\left(sz_0+U_{z_0}\right)+B_yx_0-B_xy_0-\frac{E_z}{s}\right]\Bigg\} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow Y(s) = \frac{s^{-2}}{s^2+\frac{q^2}{m^2}\cdot\left(B_x^2+B_y^2+B_z^2\right)}\cdot\Bigg\{y_0s^3+U_{y_0}s^2+$$

$$+\frac{q^2}{m^2}\cdot\left[y_0\left(B_x^2+B_y^2+B_z^2\right)+\frac{m}{q}\left(E_y+B_xU_{z_0}-B_zU_{x_0}\right)\right]s+$$

$$+\frac{q^2}{m^2}\cdot\left(B_y^2U_{y_0}+B_xB_yU_{x_0}+B_yB_zU_{z_0}+E_zB_x-E_xB_z\right)+$$

$$+\frac{q^3}{m^3}\cdot\left(E_yB_y^2+E_xB_xB_y+E_zB_yB_z\right)s^{-1}\Bigg\}$$

Kai

$$Z(s) = -\frac{\frac{q^3}{m^3} s^{-2}}{s^2 + \frac{q^2}{m^2}(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)} \cdot \Bigg\{ \left(B_x B_z + \frac{m}{q} B_y s\right) \cdot \left[-\frac{m}{q}(s x_0 + U_{x_0}) + B_z y_0 - B_y z_0 - \frac{E_x}{s}\right] +$$

$$+ \left(B_y B_z - \frac{m}{q} B_x s\right) \cdot \left[-\frac{m}{q}(s y_0 + U_{y_0}) + B_x z_0 - B_z x_0 - \frac{E_y}{s}\right] +$$

$$+ \left(\frac{m^2}{q^2} s^2 + B_z^2\right) \cdot \left[-\frac{m}{q}(s z_0 + U_{z_0}) + B_y x_0 - B_x y_0 - \frac{E_z}{s}\right] \Bigg\} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow Z(s) = \frac{s^{-2}}{s^2 + \frac{q^2}{m^2}(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)} \cdot \Bigg\{ z_0 s^3 + U_{z_0} s^2 +$$

$$+ \frac{q^2}{m^2} \cdot \left[z_0 (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) + \frac{m}{q}\left(E_z + B_y U_{x_0} - B_x U_{y_0}\right)\right] s +$$

$$+ \frac{q^2}{m^2} \cdot \left(B_z^2 U_{z_0} + B_x B_z U_{x_0} + B_y B_z U_{y_0} + E_x B_y - E_y B_x\right) +$$

$$+ \frac{q^3}{m^3} \cdot \left(E_z B_z^2 + E_x B_x B_z + E_y B_y B_z\right) s^{-1}$$

Και οι χρονικές συναρτήσεις $y(t)$ και $z(t)$ των θέσεων y και z αντίστοιχα σημειώνονται παρακάτω (όπως και πριν $\alpha = \frac{q}{m}\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}$):

$$y(t) = \frac{q}{2m} \cdot \frac{E_y B_y^2 + (E_x B_x + E_z B_z)\cdot B_y}{B_x^2+B_y^2+B_z^2} \cdot t^2 +$$

$$+ \frac{B_y^2 U_{y_0} + B_y \cdot (B_x U_{x_0} + B_z U_{z_0}) + E_z B_x - E_x B_z}{B_x^2+B_y^2+B_z^2} \cdot t + y_0 +$$

$$+ \frac{m}{q} \cdot \frac{(B_x^2+B_z^2) U_{y_0} - B_y (B_x U_{x_0} + B_z U_{z_0}) + E_x B_z - E_z B_x}{(B_x^2+B_y^2+B_z^2)^{3/2}} \cdot \sin(\alpha t) +$$

$$+ \frac{m}{q} \cdot \frac{(B_x U_{z_0} - B_z U_{x_0}) \cdot (B_x^2+B_y^2+B_z^2) + E_y (B_x^2+B_z^2) - (E_x B_x + E_z B_z)\cdot B_y}{(B_x^2+B_y^2+B_z^2)^2} \cdot \left[1 - \cos(\alpha t)\right]$$

$$z(t) = \frac{q}{2m} \cdot \frac{E_z B_z^2 + (E_x B_x + E_y B_y)\cdot B_z}{B_x^2+B_y^2+B_z^2} \cdot t^2 +$$

$$+ \frac{B_z^2 U_{z_0} + B_z (B_x U_{x_0} + B_y U_{y_0}) + E_x B_y - E_y B_x}{B_x^2+B_y^2+B_z^2} \cdot t + z_0 +$$

$$+ \frac{m}{q} \cdot \frac{(B_x^2+B_y^2) U_{z_0} - B_z (B_x U_{x_0} + B_y U_{y_0}) + E_y B_x - E_x B_y}{(B_x^2+B_y^2+B_z^2)^{3/2}} \cdot \sin(\alpha t) +$$

$$+ \frac{m}{q} \cdot \frac{(B_y U_{x_0} - B_x U_{y_0}) \cdot (B_x^2+B_y^2+B_z^2) + E_z (B_x^2+B_y^2) - (E_x B_x + E_y B_y)\cdot B_z}{(B_x^2+B_y^2+B_z^2)^2} \cdot \left[1 - \cos(\alpha t)\right]$$

Β' τρόπος:

$$E_x + y'B_z - z'B_y = \frac{m}{q}x''$$

$$E_y + z'B_x - x'B_z = \frac{m}{q}y''$$

$$E_z + x'B_y - y'B_x = \frac{m}{q}z''$$

με αρχικές συνθήκες:

$x(0) = x_0$ $\quad$ $x'(0) = U_{x_0}$

$y(0) = y_0$ $\quad$ και $\quad$ $y'(0) = U_{y_0}$

$z(0) = z_0$ $\quad$ $z'(0) = U_{z_0}$

Με ολοκλήρωση των παραπάνω εξισώσεων έχουμε:

$$\frac{m}{q}x' = yB_z - zB_y + E_x t + c_x$$

$$\frac{m}{q}y' = zB_x - xB_z + E_y t + c_y$$

$$\frac{m}{q}z' = xB_y - yB_x + E_z t + c_z$$

από τις οποίες προκύπτει το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων $1^{ης}$ τάξης (μη ομογενές):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}' = \frac{q}{m} \cdot \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \frac{q}{m} \cdot \begin{bmatrix} E_x t + c_x \\ E_y t + c_y \\ E_z t + c_z \end{bmatrix}$$

όπου για $t=0$ οι σταθερές $c_x, c_y, c_z \in \mathbb{R}$ είναι:

$$c_x = \frac{m}{q}U_{x_0} + B_y z_0 - B_z y_0$$

$$c_y = \frac{m}{q}U_{y_0} + B_z x_0 - B_x z_0$$

$$c_z = \frac{m}{q}U_{z_0} + B_x y_0 - B_y x_0$$

Το παραπάνω σύστημα είναι της γενικής μορφής:

$$X'(t) = A\cdot X(t) + B(t)$$, όπου A είναι πίνακας σταθερών

Η λύση του συστήματος βρίσκεται ως εξής:

$$X'(t) = A\cdot X(t) + B(t) \Rightarrow X'(t) - A\cdot X(t) = B(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-At}X'(t) - e^{-At}A\cdot X(t) = e^{-At}\cdot B(t) \rightarrow e^{-At}X'(t) + (e^{-At})'X(t) = e^{-At}B(t).$$

$$\rightarrow \left[e^{-At}\cdot X(t)\right]' = e^{-At}B(t) \rightarrow e^{-At}\cdot X(t) = \int e^{-At}B(t)\,dt + C \rightarrow$$

$$\rightarrow X(t) = e^{At}\cdot C + e^{At}\int e^{-At}\cdot B(t)\,dt \quad , \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

όπου e^{At} είναι ο εκθετικός πίνακας του A, ο e^{-At} είναι ο αντίστροφος του προηγουμένου και C είναι διάνυσμα σταθερών που ανήκουν στο $\mathbb{R}$.

Για να βρούμε τον e^{At} πρέπει να διαγωνοποιήσουμε τον A, δηλαδή να βρούμε αντιστρέψιμο πίνακα S τέτοιον ώστε:

$A = S\cdot\Lambda\cdot S^{-1}$, όπου Λ είναι ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών του A και S είναι ο πίνακας των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων του

Τότε:
$$e^{At} = S \cdot \Lambda_e(t) \cdot S^{-1}$$

όπου αν $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$, τότε: $\Lambda_e(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}$

Γράφοντας τον εκθετικό πίνακα με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να απλοποιήσουμε την έκφραση του $X(t)$:

$$X(t) = S \cdot \Lambda_e(t) S^{-1} C + S\Lambda_e(t) S^{-1} \int \left[S\Lambda_e(t) S^{-1} \right]^{-1} \cdot B(t)\, dt$$

Αλλά ο S και ο S^{-1} είναι πίνακες σταθερών, άρα το διάνυσμα $S^{-1} \cdot C$ είναι ένα διάνυσμα σταθερών και μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με C (το διάνυσμα C θα καθοριστεί προφανώς από τις αρχικές συνθήκες). Ακόμα, είναι:

$$\left[S\Lambda_e(t) S^{-1} \right]^{-1} = \left[S^{-1} \right]^{-1} \cdot \left[S\Lambda_e(t) \right]^{-1} = S \cdot \left[S\Lambda_e(t) \right]^{-1}$$ και

ο πίνακας S μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα, άρα η έκφραση γίνεται:

$$X(t) = \left[S\Lambda_e(t) \right] \cdot C + \left[S\Lambda_e(t) \right] S^{-1} \cdot S \int \left[S\Lambda_e(t) \right]^{-1} \cdot B(t)\, dt \rightarrow$$

$$\rightarrow X(t) = \left[S \cdot \Lambda_e(t) \right] \cdot C + \left[S\Lambda_e(t) \right] \cdot I \cdot \int \left[S\Lambda_e(t) \right]^{-1} \cdot B(t)\, dt \rightarrow$$

$$\rightsquigarrow X(t) = \left[S\cdot\Lambda_e(t)\right]\cdot C + \left[S\cdot\Lambda_e(t)\right]\cdot\int \left[S\Lambda_e(t)\right]^{-1} B(t)\,dt$$

Θέτουμε για ευκολία $\Phi(t) = S\cdot\Lambda_e(t)$, άρα:

$$X(t) = \Phi(t)\cdot C + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\cdot B(t)\,dt \quad , \text{ όπου } X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

<u>Ιδιοτιμές του A:</u>

Θέτουμε: $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{q}{m}\cdot\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$, άρα ο πίνακας A

γίνεται:
$$A = \frac{q}{m}\cdot\begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

Για τις ιδιοτιμές λ του A:

$$\det\left[\lambda I_3 - A\right] = 0 \rightsquigarrow \begin{vmatrix} \lambda & -c & b \\ c & \lambda & -a \\ -b & a & \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \lambda\cdot(\lambda^2 + a^2) + c(c\lambda - ab) + b(ac + b\lambda) = 0 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \lambda^3 + a^2\lambda + c^2\lambda - \cancel{abc} + \cancel{abc} + b^2\lambda = 0 \rightarrow$$

$$\rightsquigarrow \lambda\left[\lambda^2 - (a^2+b^2+c^2)\right] = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = j\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\lambda_3 = -j\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Θέτοντας $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ είναι: $\lambda_1=0$
$\lambda_2=jd$
$\lambda_3=-jd$

με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\xi_1=\begin{bmatrix}\xi_{11}\\ \xi_{12}\\ \xi_{13}\end{bmatrix}$, $\xi_2=\begin{bmatrix}\xi_{21}\\ \xi_{22}\\ \xi_{23}\end{bmatrix}$, $\xi_3=\begin{bmatrix}\xi_{31}\\ \xi_{32}\\ \xi_{33}\end{bmatrix}$.

- <u>Για το ξ_1:</u>

$$[\lambda_1 I_3 - A]\xi_1 = 0 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\xi_{11}\\ \xi_{12}\\ \xi_{13}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Το σύστημα διαθέτει έναν βαθμό ελευθερίας και θέτοντας $\xi_{13}=\kappa$ έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} -c\xi_{12}+b\xi_{13}=0 \\ c\xi_{11}-a\xi_{13}=0 \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow \left.\begin{aligned} \xi_{11}&=\frac{a}{c}\kappa \\ \xi_{12}&=\frac{b}{c}\kappa \\ \xi_{13}&=\kappa \end{aligned}\right\} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix}\xi_{11}\\ \xi_{12}\\ \xi_{13}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{a}{c}\\ \frac{b}{c}\\ 1\end{bmatrix}\cdot\kappa$$

Για $\kappa=c$: $\xi_1=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ ένα ιδιοδιάνυσμα από το $span(\xi_1)$

$$\left[\lambda_2 I_3 - A\right]\cdot \xi_2 = 0 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} jd & -c & b \\ c & jd & -a \\ -b & a & jd \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_{21} \\ \xi_{22} \\ \xi_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα διαθέτει έναν βαθμό ελευθερίας και θέτοντας

$\xi_{23} = \kappa$ έχουμε:

$$jd\xi_{21} - c\xi_{22} + b\kappa = 0 \quad (1)$$

$$c\xi_{21} + jd\xi_{22} - a\kappa = 0 \quad (2)$$

$$-b\xi_{21} + a\xi_{22} + jd\kappa = 0 \quad (3)$$

$$(2) \rightsquigarrow \xi_{22} = \frac{a\kappa - c\xi_{21}}{jd} \quad (4)$$

$$(1) \overset{(4)}{\rightsquigarrow} -d^2\xi_{21} - ac\kappa + c^2\xi_{21} + jbd\kappa = 0 \rightsquigarrow \xi_{21} = \frac{-ac + jbd}{d^2 - c^2}\kappa \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \xi_{21} = \frac{-ac + jbd}{a^2 + b^2 + c^2 - c^2}\kappa \rightsquigarrow \xi_{21} = \frac{-ac + jbd}{a^2 + b^2}\kappa \quad (5)$$

$$(4) \overset{(5)}{\rightsquigarrow} \xi_{22} = \frac{a\kappa + \frac{ac^2 - jbcd}{a^2 + b^2}\kappa}{jd} = \frac{a(a^2 + b^2 + c^2) - jbcd}{jd(a^2 + b^2)}\kappa \Rightarrow$$

$$\rightsquigarrow \xi_{22} = \frac{ad^2 - jbcd}{jd(a^2 + b^2)}\kappa \rightsquigarrow \xi_{22} = \frac{-bc - jad}{a^2 + b^2}\kappa$$

Επομένως:
$$\begin{bmatrix} \xi_{21} \\ \xi_{22} \\ \xi_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-ac+jbd}{a^2+b^2} \\ \frac{-bc-jad}{a^2+b^2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \kappa$$

Για $\kappa = a^2+b^2$: $\xi_2 = \begin{bmatrix} -ac \\ -bc \\ a^2+b^2 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} bd \\ -ad \\ 0 \end{bmatrix}$ ένα ιδιοδιάνυσμα από το $span(\xi_2)$

Το ξ_3 είναι συζυγές του ξ_2, άρα:

$\xi_3 = \begin{bmatrix} -ac \\ -bc \\ a^2+b^2 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} bd \\ -ad \\ 0 \end{bmatrix}$ αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = -jd$ (λ_3 συζυγής του λ_2)

Τώρα θα μπορούσαμε να πούμε ότι:

$$\Phi(t) = S \cdot \Lambda_e(t) = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{jdt} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-jdt} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\rightsquigarrow \Phi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1 & e^{jdt}\xi_2 & e^{-jdt}\xi_3 \end{bmatrix}$$

Όμως ο συγκεκριμένος πίνακας περιέχει και τον φανταστικό αριθμό j, που είναι πρόβλημα, γιατί επιθυμούμε πραγματικές λύσεις.

Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό ας ξαναδούμε το σύστημα που θέλουμε να λύσουμε:

$X'(t) = A \cdot X(t) + B(t)$ μη ομογενές σύστημα

Το αντίστοιχο ομογενές του παραπάνω συστήματος είναι το:

$X'(t) = A \cdot X(t)$

Για το μη ομογενές η λύση του είναι:

$X(t) = \Phi(t) \cdot C + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) B(t)\, dt$, άρα για το ομογενές $(B(t)=0)$ η λύση είναι: $X(t) = \Phi(t) \cdot C$

Δηλαδή ισχύει: $\Phi'(t) \cdot C = A \Phi(t) \cdot C$ για κάθε διάνυσμα C

άρα είναι: $\Phi'(t) = A \cdot \Phi(t)$

και για $\Phi(t) = [\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \quad \varphi_3(t)]$ έχουμε:

$\varphi_1'(t) = A \varphi_1(t)$, $\varphi_2'(t) = A \varphi_2(t)$, $\varphi_3'(t) = A \varphi_3(t)$,

όπου $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς συστήματος $X'(t) = A \cdot X(t)$

Τα διανύσματα ξ_1, $e^{jdt}\xi_2$ και $e^{-jdt}\xi_3$ αποτελούν γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς συστήματος, αλλά είναι μιγαδικές. Ας εξετάσουμε μόνο τη μιγαδική λύση

$$e^{jdt}\cdot\xi_2 = Re\left[e^{jdt}\cdot\xi_2\right] + j\,Im\left[e^{jdt}\xi_2\right] = v_1(t) + jv_2(t)$$

Ισχύει: $\left(e^{jdt}\cdot\xi_2\right)' = A\cdot\left(e^{jdt}\cdot\xi_2\right) \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \left\{v_1(t) + j\,v_2(t)\right\}' = A\cdot\left[v_1(t) + j\,v_2(t)\right] \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{l} v_1'(t) = A\cdot v_1(t) \\ v_2'(t) = A\cdot v_2(t) \end{array}$$

δηλαδή τα διανύσματα $v_1(t), v_2(t)$ είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$e^{jdt}\cdot\xi_2 = \left[\cos(dt) + j\sin(dt)\right]\cdot\left(\begin{bmatrix} -ac \\ -bc \\ a^2+b^2 \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} bd \\ -ad \\ 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} -ac\cos(dt) - bd\sin(dt) \\ -bc\cos(dt) + ad\sin(dt) \\ (a^2+b^2)\cos(dt) \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} bd\cos(dt) - ac\sin(dt) \\ -ad\cos(dt) - bc\sin(dt) \\ (a^2+b^2)\sin(dt) \end{bmatrix}$$

Άρα: $v_1(t) = \begin{bmatrix} -ac\cos(dt) - bd\sin(dt) \\ -bc\cos(dt) + ad\sin(dt) \\ (a^2+b^2)\cos(dt) \end{bmatrix}$, $v_2(t) = \begin{bmatrix} bd\cos(dt) - ac\sin(dt) \\ -ad\cos(dt) - bc\sin(dt) \\ (a^2+b^2)\sin(dt) \end{bmatrix}$

που είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα

Τελικά: $\Phi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1 & v_1(t) & v_2(t) \end{bmatrix} \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \Phi(t) = \begin{bmatrix} a & -ac\cos(dt) - bd\sin(dt) & bd\cos(dt) - ac\sin(dt) \\ b & -bc\cos(dt) + ad\sin(dt) & -ad\cos(dt) - bc\sin(dt) \\ c & (a^2+b^2)\cos(dt) & (a^2+b^2)\sin(dt) \end{bmatrix}$$

$$\text{με } \Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{d^2} & \dfrac{b}{d^2} & \dfrac{c}{d^2} \\ -\dfrac{ac\cos(dt)+bd\sin(dt)}{(a^2+b^2)d^2} & -\dfrac{bc\cos(dt)-ad\sin(dt)}{(a^2+b^2)d^2} & \dfrac{\cos(dt)}{d^2} \\ \dfrac{bd\cos(dt)-ac\sin(dt)}{(a^2+b^2)d^2} & -\dfrac{ad\cos(dt)+bc\sin(dt)}{(a^2+b^2)d^2} & \dfrac{\sin(dt)}{d^2} \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος $\Phi^{-1}(t)$ πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της μερικής λύσης $\Phi(t) \cdot \int \Phi^{-1}(t) \cdot B(t)\, dt$, αλλά οι πράξεις είναι πολύ κουραστικές, γι' αυτό θα ακολουθήσουμε διαφορετική τακτική. Επιστρέφουμε στο αρχικό σύστημα:

$$X'(t) = A \cdot X(t) + B(t), \text{ με } B(t) = \frac{q}{m} \cdot \begin{bmatrix} E_x t + c_x \\ E_y t + c_y \\ E_z t + c_z \end{bmatrix} \text{ και } B''(t) = 0$$

Παραγωγίζοντας λοιπόν δύο φορές καταλήγουμε στο πολύ βολικό: $X^{(3)}(t) = A \cdot X''(t) \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{bmatrix}' = A \cdot \begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{bmatrix}$ με λύση:

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) \cdot C = \Phi(t) \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x''(t) &= c_1 a + (c_3 bd - c_2 ac)\cos(dt) - (c_2 bd + c_3 ac)\sin(dt) \\ y''(t) &= c_1 b - (c_2 bc + c_3 ad)\cos(dt) + (c_2 ad - c_3 bc)\sin(dt) \\ z''(t) &= c_1 c + c_2(a^2+b^2)\cos(dt) + c_3(a^2+b^2)\sin(dt) \end{aligned}$$

Και ολοκληρώνοντας τις παραπάνω σχέσεις δυο φορές λαμβάνουμε πολύ εύκολα τις λύσεις $x(t), y(t), z(t)$.

- <u>Για το $x(t)$:</u>

$$x'(t) = \int x''(t)\,dt = c_1 a t + \frac{1}{d}(c_2 bd + c_3 ac)\cos(dt) + \frac{1}{d}(c_3 bd - c_2 ac)\sin(dt) + \\ + c_{x1}$$

Για $t=0$: $x'(0) = \frac{1}{d}(c_2 bd + c_3 ac) + c_{x1} \rightsquigarrow c_{x1} = U_{x_0} - \frac{1}{d}(c_2 bd + c_3 ac)$

Άρα: $$x'(t) = c_1 a t + \frac{1}{d}(c_2 bd + c_3 ac)\cdot[\cos(dt) - 1] + \frac{1}{d}(c_3 bd - c_2 ac)\sin(dt) + \\ + U_{x_0}$$

$$x(t) = \int x'(t)\,dt = \frac{c_1 a}{2} t^2 + U_{x_0} t + \frac{1}{d}(c_2 bd + c_3 ac)\cdot\left[\frac{\sin(dt)}{d} - t\right] +$$

$$+ \frac{1}{d^2}\left(c_2 ac - c_3 bd\right)\cos(dt) + c_{x2}$$

$$\leadsto \quad x(t) = \frac{c_1 a}{2} t^2 + \left[U_{x_0} - \frac{1}{d}\left(c_3 ac + c_2 bd\right)\right] t +$$

$$+ \frac{1}{d^2}\left(c_3 ac + c_2 bd\right)\sin(dt) + \frac{1}{d^2}\left(c_2 ac - c_3 bd\right)\cos(dt) + c_{x2}$$

Για $t=0$: $x(0) = \frac{1}{d^2}\left(c_2 ac - c_3 bd\right) + c_{x2} \leadsto c_{x2} = x_0 - \frac{1}{d^2}\left(c_2 ac - c_3 bd\right)$

Επομένως: $$x(t) = \frac{c_1 a}{2} t^2 + \left[U_{x_0} - \frac{1}{d}\left(c_3 ac + c_2 bd\right)\right]\cdot t + x_0 +$$

$$+ \frac{1}{d^2}\left(c_3 ac + c_2 bd\right)\cdot\sin(dt) + \frac{1}{d^2}\left(c_3 bd - c_2 ac\right)\cdot\left[1 - \cos(dt)\right]$$

Παρομοίως:

- Για το y(t): $$y(t) = \frac{c_1 b}{2} t^2 + \left[U_{y_0} + \frac{1}{d}\left(c_2 ad - c_3 bc\right)\right]\cdot t + y_0 +$$

$$+ \frac{1}{d^2}\left(c_3 bc - c_2 ad\right)\cdot\sin(dt) - \frac{1}{d^2}\left(c_2 bc + c_3 ad\right)\cdot\left[1 - \cos(dt)\right]$$

- Για το z(t): $$z(t) = \frac{c_1 c}{2} t^2 + \left[U_{z_0} + \frac{1}{d} c_3 (a^2 + b^2)\right]\cdot t + z_0 -$$

$$- \frac{1}{d^2} c_3 (a^2 + b^2)\sin(dt) + \frac{1}{d^2} c_2 (a^2 + b^2)\cdot\left[1 - \cos(dt)\right]$$

Οι σταθερές c_1, c_2, c_3 μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{bmatrix} = \Phi(t)\cdot\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{για } t=0$$

Έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \frac{q}{m}E_x + y'\frac{q}{m}B_z - z'\frac{q}{m}B_y \\ \frac{q}{m}E_y + z'\frac{q}{m}B_x - x'\frac{q}{m}B_z \\ \frac{q}{m}E_z + x'\frac{q}{m}B_y - y'\frac{q}{m}B_x \end{bmatrix} = \Phi(t)\cdot\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{t=0}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} a & -ac & bd \\ b & -bc & -ad \\ c & a^2+b^2 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q}{m}E_x + cU_{y_0} - bU_{z_0} \\ \frac{q}{m}E_y + aU_{z_0} - cU_{x_0} \\ \frac{q}{m}E_z + bU_{x_0} - aU_{y_0} \end{bmatrix}$$

Αν προχωρήσουμε στη λύση του παραπάνω συστήματος έχουμε:

$$c_1 = \frac{E_xB_x + E_yB_y + E_zB_z}{B_x^2+B_y^2+B_z^2}$$

$$c_2 = \frac{m}{q}\cdot\frac{(B_yU_{x_0} - B_xU_{y_0})(B_x^2+B_y^2+B_z^2) + E_z(B_x^2+B_y^2) - (E_xB_x + E_yB_y)B_z}{(B_x^2+B_y^2)(B_x^2+B_y^2+B_z^2)}$$

$$c_3 = \frac{m}{q}\cdot\frac{(B_xU_{x_0} + B_yU_{y_0})B_z - (B_x^2+B_y^2)U_{z_0} + E_xB_y - E_yB_x}{(B_x^2+B_y^2)\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}$$

Γράφουμε ολοκληρωμένα την τελική λύση:

$$x(t)=\frac{c_1 a}{2}\cdot t^2+\left[U_{x_0}-\frac{1}{d}\left(c_3 ac+c_2 bd\right)\right]\cdot t + x_0 +$$

$$+\frac{1}{d^2}\left(c_3 ac+c_2 bd\right)\cdot \sin(dt)+\frac{1}{d^2}\left(c_3 bd-c_2 ac\right)\cdot\left[1-\cos(dt)\right]$$

$$y(t)=\frac{c_1 b}{2}\cdot t^2+\left[U_{y_0}+\frac{1}{d}\left(c_2 ad-c_3 bc\right)\right]\cdot t + y_0 +$$

$$+\frac{1}{d^2}\left(c_3 bc-c_2 ad\right)\cdot \sin(dt)-\frac{1}{d^2}\left(c_2 bc+c_3 ad\right)\cdot\left[1-\cos(dt)\right]$$

$$z(t)=\frac{c_1 c}{2}\cdot t^2+\left[U_{z_0}+\frac{1}{d}c_3\left(a^2+b^2\right)\right]\cdot t + z_0 -$$

$$-\frac{1}{d^2}c_3\left(a^2+b^2\right)\cdot \sin(dt)+\frac{1}{d^2}c_2\left(a^2+b^2\right)\cdot\left[1-\cos(dt)\right]$$

όπου: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix} U_{x_0} \\ U_{y_0} \\ U_{z_0} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\frac{q}{m}\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$, $d=\frac{q}{m}\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}$

και: $\begin{bmatrix} a & -ac & bd \\ b & -bc & -ad \\ c & a^2+b^2 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{q}{m}E_x+cU_{y_0}-bU_{z_0} \\ \frac{q}{m}E_y+aU_{z_0}-cU_{x_0} \\ \frac{q}{m}E_z+bU_{x_0}-aU_{y_0} \end{bmatrix}$