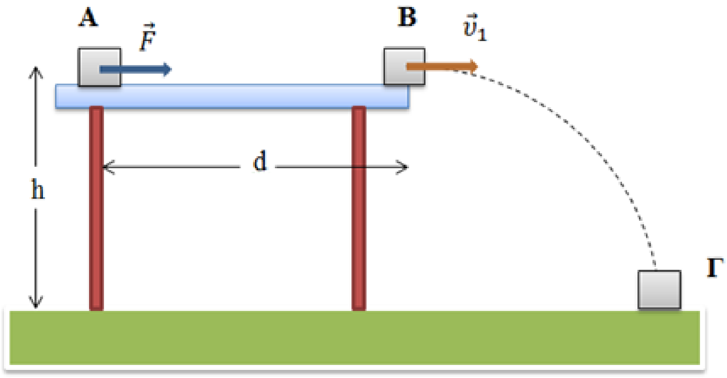
Μετά την επιτάχυνση…η οριζόντια βολή



Πάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι ύψους $h = 0{,}8m$ από το έδαφος και στο σημείο A, ηρεμεί ένα σώμα μάζας $m = 1kg$. Το σώμα με την επιφάνεια του τραπεζιού, εμφανίζει συντελεστή οριακής τριβής (ο οποίος ισούται με το συντελεστή τριβής ολίσθησης) $\mu = 0{,}25$. Ασκώντας στο σώμα μία σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 4{,}5N$ το επιταχύνουμε και αφού διανύσει απόσταση $d = 1m$, φτάνει στην άκρη του τραπεζιού (σημείο B) με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, οπότε παύει και η άσκηση της δύναμης $\vec{F}$.

Στη συνέχεια, το σώμα εκτελεί οριζόντια βολή και φτάνει στο έδαφος στο σημείο Γ, όπως στο σχήμα.

Α. Να αποδείξετε ότι υπό τις παραπάνω συνθήκες, όντως το σώμα θα μετακινηθεί από το σημείο A και να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$ του σώματος στο σημείο Β.

Β. Να υπολογίσετε το χρόνο που απαιτείται, ώστε το σώμα να μεταβεί από το σημείο A στο σημείο Γ και την απόσταση μεταξύ των σημείων B και Γ.

Γ. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στο σημείο Γ και το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητάς του, τη στιγμή που αυτό βρίσκεται σε ύψος $\frac{h}{2}$ από το έδαφος.

Δ. Κατά τη μετάβαση του σώματος από το σημείο B στο Γ, να υπολογίσετε τη μεταβολή της μηχανικής του ενέργειας, τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας και τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος.

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10m/s^2$, ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Λύση

Α. Όσο το σώμα είναι πάνω στο τραπέζι, στον κατακόρυφο άξονα ισορροπεί. Άρα, το μέτρο της κάθετης αντίδρασης που δέχεται από το τραπέζι, θα πρέπει να είναι ίσο με το μέτρο του βάρους του. Δηλαδή,

$$N = W = mg = 1 \cdot 10N = 10N$$

Γνωρίζουμε ότι η οριακή τριβή είναι η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής. Έτσι, για να αποδείξουμε ότι όντως το σώμα θα μετακινηθεί από το σημείο Α (καθώς είναι αρχικά ακίνητο), αρκεί να δείξουμε ότι το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της οριακής τριβής.

Με βάση τα δεδομένα, το μέτρο της οριακής τριβής ισούται με:

$$T_{ορ} = \mu N = 0{,}25 \cdot 10N = 2{,}5N$$

Επομένως, επειδή $F = 4{,}5N > 2{,}5N = T_{ορ} = T_{ολ}$, συμπεραίνουμε ότι όντως το σώμα μετακινείται από το σημείο Α και εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα.

Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος πάνω στο τραπέζι, θα ισούται με:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow a = \frac{F - T_{ολ}}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{4{,}5 - 2{,}5}{1} m/s^2 = 2m/s^2.$$

Έτσι, ο χρόνος που απαιτείται ώστε το σώμα να μεταβεί από το σημείο Α στο Β καλύπτοντας απόσταση d, ισούται με:

$$d = \frac{1}{2} a \Delta t_{AB}^2 \Rightarrow \Delta t_{AB} = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{2}} s \Rightarrow \Delta t_{AB} = 1s.$$

Άρα, το μέτρο της ταχύτητας που θα έχει το σώμα στη θέση Β θα είναι:

$$\upsilon_1 = a \cdot \Delta t_{AB} = 2 \cdot 1m/s \Rightarrow \upsilon_1 = 2m/s.$$

(Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στη θέση Β θα μπορούσε να υπολογισθεί και ενεργειακά, απλώς παρακάτω μας χρειάζεται το χρονικό διάστημα.)

Β. Εγκαταλείποντας το τραπέζι, το σώμα θα εκτελέσει οριζόντια βολή από ύψος $h = 0{,}8m$ και με αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = \upsilon_1 = 2\,m/s$. Άρα, το χρονικό διάστημα κίνησης του σώματος από το Β στο Γ, θα ισούται με:

$$\Delta t_{B\Gamma} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}8}{10}} s = \sqrt{16 \cdot 10^{-2}} s \Rightarrow t_{B\Gamma} = 0{,}4\,s$$

Και το βεληνεκές της βολής (οριζόντια απόσταση των σημείων Β και Γ) θα ισούται με:

$$S = \upsilon_0 \cdot \Delta t_{B\Gamma} = 2 \cdot 0{,}4m = 0{,}8\,m$$

Επομένως, το ζητούμενο χρονικό διάστημα κίνησης του σώματος από το σημείο Α στο Γ, θα είναι:

$$\Delta t_{A\Gamma} = \Delta t_{AB} + \Delta t_{B\Gamma} = 1s + 0{,}4s = 1{,}4\,s$$

Ενώ η ζητούμενη απόσταση των σημείων Β και Γ θα προκύψει με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος ως:

$$(B\Gamma) = \sqrt{h^2 + S^2} = \sqrt{(0{,}8)^2 + (0{,}8)^2}m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (B\Gamma) = 0{,}8\sqrt{2}m$$

Γ. Το μέτρο της ταχύτητας που θα έχει το σώμα στο σημείο Γ του εδάφους, θα ισούται με:

$$\upsilon_\Gamma = \sqrt{\upsilon_0^2 + (g \cdot \Delta t_{B\Gamma})^2} = \sqrt{4 + 16}m/s = \sqrt{20}m/s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_\Gamma = 2\sqrt{5}\,m/s.$$

Γνωρίζουμε ότι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός σώματος, ισούται κάθε χρονική στιγμή με τη στιγμιαία του επιτάχυνση. Επομένως, η ζητούμενη τιμή του μέτρου του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας του σώματος θα ισούται τότε με το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας. Δηλαδή

$$\frac{d\upsilon}{dt} = g = 10\,m/s^2.$$

Δ. Κατά τη μετάβασή του από το σημείο Β στο Γ, το σώμα δέχεται μόνον τη δύναμη του βάρους, η οποία είναι συντηρητική. Άρα, η Μηχανική Ενέργεια του σώματος διατηρείται. Επομένως,

$$\Delta E_{M\eta\chi} = E_{M\eta\chi,\Gamma} - E_{M\eta\chi,B} = 0$$

$$\Delta K = K_\Gamma - K_B = \frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 20J - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4J \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta K = 10 - 2 = 8J$$

Η μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, είναι ανεξάρτητη της επιλογής του επιπέδου μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας. Ας το ορίσουμε στο έδαφος για να εκτελέσουμε τις πράξεις μας. Είναι:

$$\Delta U = U_\Gamma - U_B = 0 - mgh = -1 \cdot 10 \cdot 0{,}8J = -8J$$

Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι

$$\Delta U = -\Delta K$$

κάτι που το περιμέναμε λόγω της Α.Δ.Μ.Ε.

Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com