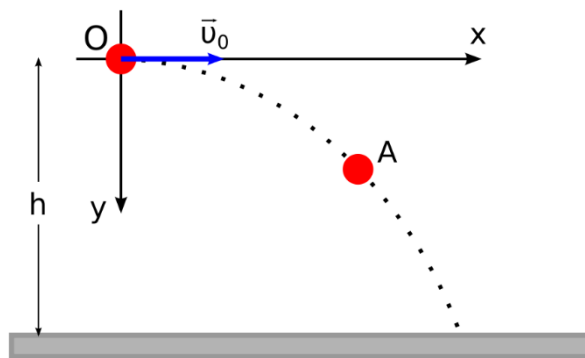

Εξίσωση τροχιάς στην οριζόντια βολή

Η τροχιά ενός κινούμενου σώματος, είναι το σύνολο των διαδοχικών θέσεων από τις οποίες διέρχεται κατά την κίνησή του. Επομένως, για να βρούμε την εξίσωση της τροχιάς σε μία επίπεδη κίνηση (όπως εδώ στην οριζόντια βολή) πρέπει να βρούμε μία εξίσωση της μορφής $y = y(x)$ (απαλλαγμένη από τον χρόνο t) ώστε να συνδυάσουμε τις συντεταγμένες των σημείων από τα οποία θα διέλθει το σώμα.

Η εξίσωση της τροχιάς, εξαρτάται άμεσα από το σύστημα αναφοράς που θα επιλέξουμε, καθώς αποτελεί έκφραση του τρόπου περιγραφής της κίνησης και όχι στοιχείο της ίδιας της κίνησης.

Έστω ένα σημειακό αντικείμενο, το οποίο βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα $\vec{v}_0$ τη χρονική στιγμή $t = 0$ από το σημείο $O(0,0)$ του συστήματος αξόνων του σχήματος, το οποίο βρίσκεται σε ύψος h πάνω από το έδαφος.



Στο σύστημα αυτό, θεωρούμε θετική φορά του άξονα $x'x$ προς τα δεξιά και του $y'y$ προς τα κάτω (κατά τη φορά κίνησης του σώματος).

Οι εξισώσεις που προσδιορίζουν κάθε χρονική στιγμή τη θέση ενός σώματος το οποίο εκτελεί οριζόντια βολή (με τις συμβάσεις και το σύστημα αναφοράς που επιλέξαμε εδώ) και μέχρι αυτό να φθάσει στο έδαφος, είναι:

$$x = v_0 t \quad (1) \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

Η σχέση (1) προσδιορίζει την τετμημένη της θέσης του σώματος, ενώ η (2) την αντίστοιχη τεταγμένη.

Λύνοντας τη σχέση (1) ως προς t , έχουμε ότι $t = \frac{x}{v_0}$ και αντικαθιστώντας στη σχέση (2), προκύπτει:

$$y = y(x) = \frac{g}{2v_0^2} x^2 \quad (3)$$

Η τελευταία σχέση ονομάζεται εξίσωση τροχιάς (για την οριζόντια βολή, σύμφωνα με τις παραπάνω συμβάσεις – σύστημα αναφοράς) και συνδέει κάθε χρονική στιγμή τις συντεταγμένες θέσης του σώματος στους δύο ημιάξονες Ox και Oy .

Στην παραπάνω εξίσωση (συνάρτηση), ισχύει ότι $0 \leq x \leq s$ (πεδίο ορισμού), όπου

$$s = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

είναι το βεληνεκές της βολής. Αντίστοιχα, ισχύει ότι $0 \leq y \leq h$ (σύνολο τιμών).

Η εξίσωση (3) είναι της γενικότερης μορφής $y = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$, δηλαδή είναι εξίσωση παραβολής. Αυτό σημαίνει πως η οριζόντια βολή είναι μία επίπεδη κίνηση που πραγματοποιείται σε παραβολική τροχιά.

► Θα επιβεβαιώσουμε τώρα ότι τόσο το σημείο εκτόξευσης $O(0,0)$, όσο και το τελικό σημείο $\Gamma(s,h)$ στο οποίο το σώμα συναντάει το έδαφος, είναι σημεία της τροχιάς του σώματος. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες των προηγούμενων πολύ χαρακτηριστικών σημείων της τροχιάς ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

Οι συντεταγμένες του σημείου O εύκολα μπορεί να δείξει κάποιος ότι ικανοποιούν την εξίσωση της τροχιάς, καθώς θέτοντας στην εξίσωση όπου x το 0 έχουμε ότι:

$$y(0) = \frac{g}{2v_0^2} \cdot 0^2 \Rightarrow y(0) = 0$$

Δηλαδή, οι συντεταγμένες του O ικανοποιούν την εξίσωση της τροχιάς.

Για το τελικό σημείο, θα πρέπει όταν θέσουμε στην εξίσωση της τροχιάς όπου x το βεληνεκές s , να προκύψει το y ίσο με το αρχικό ύψος εκτόξευσης h . Συγκεκριμένα, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{g}{2v_0^2} \cdot s^2 \Rightarrow y(s) = \frac{g}{2v_0^2} \cdot \left(v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y(s) = \frac{g}{2v_0^2} \cdot v_0^2 \frac{2h}{g} \Rightarrow y(s) = h \end{aligned}$$

Δηλαδή, παρατηρούμε ότι (όπως και θα έπρεπε) οι συντεταγμένες και του σημείου στο οποίο το σώμα συναντάει το έδαφος ικανοποιούν την εξίσωση της τροχιάς.

Με τις παραπάνω εφαρμογές, αναδεικνύεται η ουσία της εξίσωσης της τροχιάς. Είναι μία εξίσωση η οποία συνδέει τις συντεταγμένες των σημείων από τα οποία διέρχεται το σώμα κατά την κίνησή του. Όταν το σώμα βρίσκεται σε ένα σημείο A με τετμημένη x_A και τεταγμένη y_A , τότε ισχύει η σχέση

$$y_A = \frac{g}{2v_0^2} x_A^2$$

► Θα κάνουμε και έναν ακόμη έλεγχο της εξίσωσης της τροχιάς, αυτή τη φορά στη λογική της «διαστατικής ανάλυσης». Συγκεκριμένα, θα επιβεβαιώσουμε στο

Διεθνές Σύστημα Μονάδων S.I., ότι το δεξιό μέλος της τελικής μας σχέσης έχει μονάδα μέτρησης ίδια με την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης της τεταγμένης y , δηλαδή το $1m$.

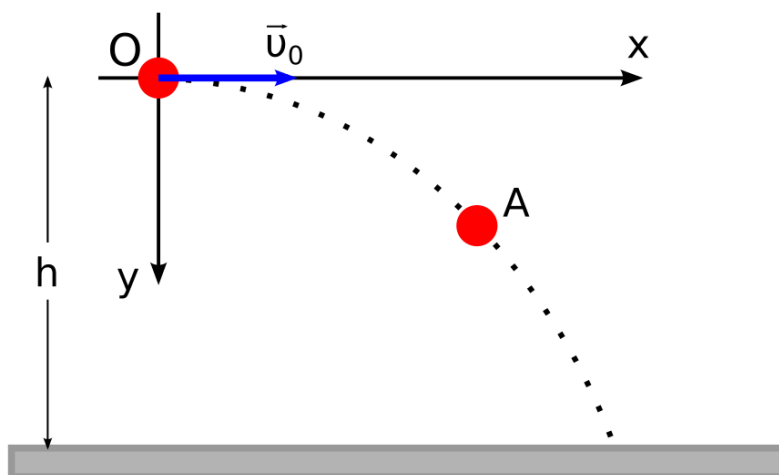
Έτσι, έχουμε:

$$\frac{g}{2v_0^2} x^2 \xrightarrow{S.I.} 1 \frac{m/s^2}{(m/s)^2} \cdot m^2 = 1 \frac{m^3/s^2}{m^2/s^2} = 1m$$

όπως και θα έπρεπε.

Άσκηση

Ένα σημειακό αντικείμενο, βάλλεται οριζόντια από σημείο O (το οποίο θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αξόνων) που βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος και με ταχύτητα μέτρου v_0 σε περιοχή όπου η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι άγνωστη. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η τροχιά του σώματος και το προσανατολισμένο σύστημα αξόνων που θεωρούμε για να περιγράψουμε την κίνηση.



Η εξίσωση της τροχιάς του με βάση τις παραπάνω συμβάσεις και μέχρι αυτό να φτάσει στο έδαφος, περιγράφεται από τη συνάρτηση με τύπο

$$y(x) = \frac{5}{16} x^2 \text{ (S.I.)}, \quad \text{για κάθε } 0 \leq x \leq 2m$$

η οποία συνδέει την τετμημένη x με την τεταγμένη y ενός σημείου $A(x, y)$ της τροχιάς του σώματος.

Το ύψος h από το οποίο βάλλεται αρχικά το σώμα, ισούται με:

α. $\frac{5}{4}m$ β. $\frac{5}{8}m$ γ. $\frac{5}{16}m$

- i) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.
- ii) Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Απάντηση

- i) Σωστή απάντηση είναι η **α**.
ii) Από τα δεδομένα, παρατηρούμε ότι η τετμημένη του σημείου στο οποίο το αντικείμενο συναντάει το έδαφος, ισούται με:

$$x_{\tau\epsilon\lambda} = x(t_{o\lambda}) = S = 2m,$$

όπου S το βεληνεκές της βολής.

Επομένως, το ζητούμενο ύψος από το οποίο βάλλεται αρχικά το σώμα, θα ισούται με:

$$h = y(x_{\tau\epsilon\lambda}) = y(2) = \frac{5}{16} \cdot 2^2 = \frac{5}{16} \cdot 4 \Rightarrow h = \frac{5}{4}m.$$

Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com