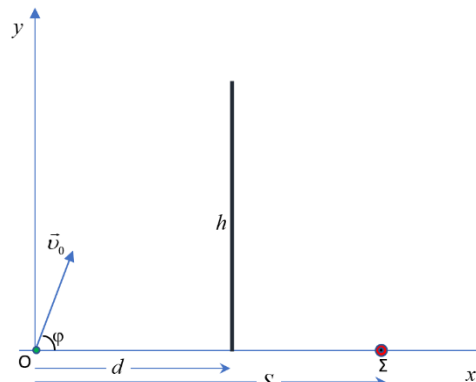


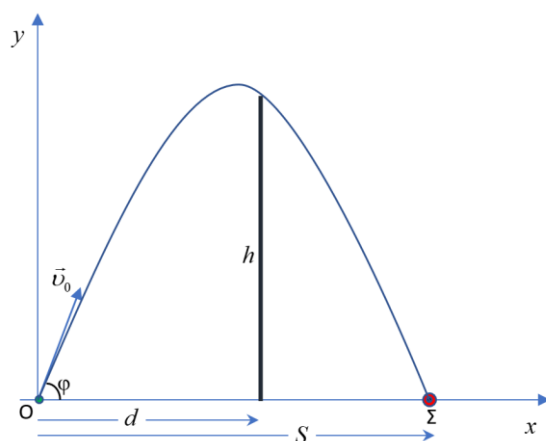
Πώς θα πετύχουμε το στόχο;

Εκτοξεύουμε μικρό σώμα, με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ που σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο έδαφος, με σκοπό να πετύχουμε στόχο Σ σε απόσταση S από το σημείο βολής. Σε οριζόντια απόσταση $d < S$ από το σημείο βολής υπάρχει κατακόρυφο εμπόδιο ύψους h .

Ποια η ελάχιστη τιμή του μέτρου v_0 της ταχύτητας εκτόξευσης και ποια η αντίστοιχη γωνία βολής φ για να πετύχουμε το στόχο;



Λύση



Μελετώντας την κίνηση ως επαλληλία μιας οριζόντιας και μιας κατακόρυφης κίνησης, κατά τα γνωστά, καταλήγουμε στην εξίσωση της τροχιάς:

$$y(x) = x \cdot \varepsilon \varphi \varphi - \frac{g}{2v_0^2 \sigma \nu \nu^2 \varphi} x^2 \quad (1)$$

➤ Για να πετύχουμε το στόχο πρέπει, $y(S) = 0$ ή,

$$\varepsilon \varphi \varphi - \frac{g}{2v_0^2 \sigma \nu \nu^2 \varphi} S = 0$$

και αντικαθιστώντας,

$$\sigma \nu \nu^2 \varphi = \frac{1}{1 + \varepsilon \varphi^2 \varphi} \quad (2)$$

προκύπτει τελικά,

$$v_0^2 = \frac{gS}{2} \left(\frac{1 + \varepsilon \varphi^2 \varphi}{\varepsilon \varphi \varphi} \right) \quad (3)$$

➤ Για να περάσει το βλήμα από το εμπόδιο πρέπει, $y(d) \geq h$, δηλαδή,

$$d \cdot \varepsilon \varphi \varphi - \frac{g}{2v_0^2 \sigma \nu \nu^2 \varphi} d^2 \geq h$$

και λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις (2) και (3),

$$\varepsilon \varphi \varphi \geq \frac{hS}{d(S-d)}$$

Εισάγουμε για ευκολία την αδιάστατη παράμετρο, $\lambda = \frac{hS}{d(S-d)} > 0$ οπότε η τελευταία σχέση γίνεται,

$$\varepsilon\varphi\varphi \geq \lambda \quad (4)$$

Αναζητώντας την ελάχιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας προκύπτει από την εξίσωση (3) ότι πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε τον παράγοντα,

$$f(\varphi) = \frac{1 + \varepsilon\varphi^2\varphi}{\varepsilon\varphi\varphi} \text{ υπό τον περιορισμό (4).}$$

Όμως στο διάστημα $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ εύκολα βρίσκουμε ότι η συνάρτηση $f(\varphi)$ παρουσιάζει

ολικό ελάχιστο για $\varphi = \frac{\pi}{4}$, ίσο με $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$. Επομένως για $0 < \lambda < 1$ οι αποδεκτές τιμές

για τη γωνία φ λόγω της (4) είναι

$$\varphi \geq \text{τοξ}\varepsilon\varphi(\lambda) \text{ με } \varphi_{\min} = \text{τοξ}\varepsilon\varphi(\lambda) < \frac{\pi}{4}$$

Άρα η ελαχιστοποίηση του μέτρου της ταχύτητας επιτυγχάνεται για $\varphi = \frac{\pi}{4}$ και είναι,

$$v_0 = \sqrt{gS}$$

Στην περίπτωση αυτή η ύπαρξη του εμποδίου δεν επηρεάζει την απάντηση αφού η γωνία βολής είναι η γωνία μέγιστου βεληνεκούς (δηλαδή 45°) οπότε για δεδομένο βεληνεκές το μέτρο της αρχικής ταχύτητας είναι ελάχιστο.

Για $\lambda \geq 1$ η ελάχιστη τιμή της v_0 επιτυγχάνεται για $\varepsilon\varphi\varphi = \lambda$, που αντιστοιχεί στην ελάχιστη επιτρεπτή τιμή της φ και είναι,

$$v_0 = \sqrt{\frac{gS}{2} \left(\frac{1 + \lambda^2}{\lambda} \right)}$$

Παρατήρηση: Είναι προφανές ότι η περίπτωση όπου $d > S$ και $\lambda < 0$ οδηγεί στην ίδια λύση με την περίπτωση όπου $0 < \lambda < 1$. Η λύση αυτή είναι η ενδεδειγμένη και στην περίπτωση όπου $d = S$, δηλαδή ο στόχος είναι στη βάση του εμποδίου.

Ανακεφαλαιώνοντας η γενική λύση είναι $\left(\sigma \nu \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon \varphi^2}}, \eta \mu \varphi = \frac{\varepsilon \varphi}{\sqrt{1 + \varepsilon \varphi^2}} \right)$:

$\lambda \geq 1$	$\varphi = \operatorname{arccos}(\lambda)$	$v_0 = \sqrt{\frac{gS}{2} \left(\frac{1 + \lambda^2}{\lambda} \right)}$	$v_{0x} = \sqrt{\frac{gS}{2\lambda}}, v_{0y} = \sqrt{\frac{gS\lambda}{2}}$
$\lambda < 1$	$\varphi = \frac{\pi}{4}$	$v_0 = \sqrt{gS}$	$v_{0x} = v_{0y} = \sqrt{\frac{gS}{2}}$
$d = S$			

Στο αρχείο του Interactive Physics που μπορείτε να [κατεβάσετε](#) μπορείτε να δοκιμάσετε τη λύση επιλέγοντας τη θέση του στόχου καθώς και το ύψος και τη θέση του εμποδίου.

Σπύρος Χόρτης