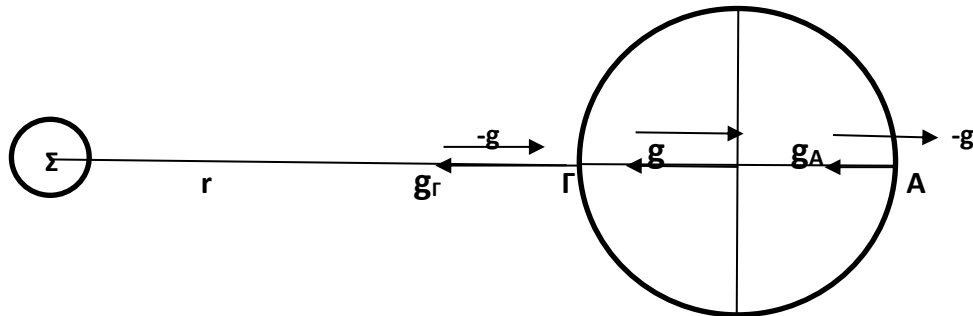


Μέτρο παλιρροικών δυνάμεων στην ευθεία των κέντρων γης - σελήνης(αστρονομική παλίρροια)



Έστω το σύστημα Γη – Σελήνη ,  $r$  η απόσταση των κέντρων τους ,  $M$  η μάζα της Σελήνης  $R$  η ακτίνα της γης και  $A, \Gamma$  τα δύο αντιδιαμετρικά σημεία της επιφάνειας της Γης στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα των δύο σωμάτων. Η ανά μονάδα μάζας δύναμη με την οποία η Σελήνη έλκει της γη αν θεωρήσουμε όλη τη μάζα συγκεντρωμένη στο κέντρο είναι  $g = GM/r^2$  .

Το βαρυτικό πεδίο της σελήνης όμως είναι ανομοιογενές , έτσι η ανά μονάδα μάζας της Σελήνης σε στοιχειώδη μάζα στο  $\Gamma$  είναι  $g_{\Gamma} = GM/(r-R)^2 > g$  , η ανά μονάδα μάζας της Σελήνης στο  $A$  είναι  $g_A = GM/(r+R)^2 < g$ .

Επομένως η διαφορά της δύναμης ανά μονάδα μάζας στο σημείο  $A$  από τη δύναμη ανά μονάδας μάζας στο κέντρο έχει αντίθετη φορά από τη διαφορά της δύναμης ανά μονάδα μάζας στο  $\Gamma$  με αυτήν στο κέντρο **ΣΑΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΤΗΣ ΑΝΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑΣ ΤΟΥ ΒΑΡΥΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΤΗΣ ΣΕΛΗΝΗΣ.**

ΑΥΤΗ Η ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΙΝΑΙ Η ΠΑΛΙΡΡΟΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ(ανά μονάδα μάζας).

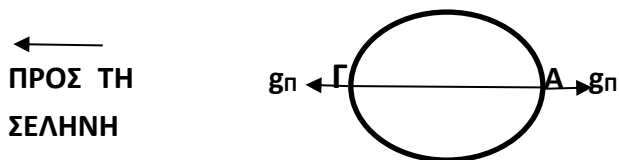
$$\text{ΠΑΛΙΡΡΟΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΣΤΟ } \Gamma: \quad \mathbf{g}_{\Pi(\Gamma)} = \mathbf{g}_{\Gamma} - \mathbf{g} > \mathbf{0}$$

$$\text{ΠΑΛΙΡΡΟΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ ΣΤΟ } A: \quad \mathbf{g}_{\Pi(A)} = \mathbf{g}_A - \mathbf{g} < \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\Pi(\Gamma)} = \mathbf{g}_{\Gamma} - \mathbf{g} &\Rightarrow \mathbf{g}_{\Pi} = \frac{GM}{(r-R)^2} - \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{r^2(1-\frac{R}{r})^2} - \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{r^2} \left( \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-2} - 1 \right) \\ &= \frac{GM}{r^2} \left( 1 + 2\frac{R}{r} - 1 \right) \Rightarrow \quad \mathbf{g}_{\Pi(\Gamma)} = \frac{2GMR}{r^3} \quad \text{ομοίως} \quad \mathbf{g}_{\Pi(A)} = \mathbf{g}_A - \mathbf{g} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\mathbf{g}_{\Pi(A)} = -\frac{2GMR}{r^3}$$

Χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα:  $(1 - R/r)^{-2} = 1 - 2(-R/r)$  για  $R \ll r$  (θα μπορούσαμε με πολύ περισσότερες πράξεις όμως και εύλογες προσεγγίσεις να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα ή να μην προχωρήσουμε σε προσεγγίσεις).



Οι παλιρροϊκές δυνάμεις που προέκυψαν με την παραπάνω διαδικασία είναι αποτέλεσμα της ανομοιογένειας του βαρυτικού πεδίου της σελήνης. Αν η γη ήταν σε ομογενές βαρυτικό πεδίο  $g_A = g_\Gamma = g$  και  $g_\pi = 0$ .

**Εύρεση της  $g_\pi$  με παράγωγο:** Στο κέντρο της γης:  $g = GM/r^2$ . Από το κέντρο προς την περιφέρεια:  $dg = (dg/dr)dr = d/dr(GM/r^2)dr = (-2GM/r^3)dr$

Από το κέντρο μέχρι το  $\Gamma$   $dr = -R$  και  $dg = g_{\pi(\Gamma)} = (-2GM/r^3)(-R) \Rightarrow g_{\pi(\Gamma)} = \frac{2GMR}{r^3}$

Από το κέντρο μέχρι το  $A$   $dr = R$  και  $dg = g_{\pi(A)} = -\frac{2GMR}{r^3}$

### **OPIO Roche**

Στερεό σώμα μάζας  $m$  και ακτίνας  $R$  του οποίου την συνεκτικότητα εξασφαλίζουν μόνο οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις των στοιχειωδών μαζών του (**ιδιοβαρύτητα**), βρίσκεται μέσα στο βαρυτικό πεδίο μεγαλύτερου σώματος μάζας  $M$  και σε απόσταση  $r$  από αυτό. Υπάρχει μια ελάχιστη απόσταση  $r_{\min}$  γνωστή ως **όριο Roche** μέχρι την οποία μπορεί να πλησιάσει το  $m$  κοντά στο  $M$  ώστε να μην το διαλύσουν οι παλιρροϊκές δυνάμεις. Δηλαδή στο όριο Roche οι παλιρροϊκές δυνάμεις γίνονται οριακά ίσες με τις βαρυτικές δυνάμεις συνοχής των στοιχειωδών μαζών του  $m$ . Έτσι, ανά μονάδα μάζας παλιρροϊκή δύναμη = ανά μονάδα μάζας ιδιοβαρύτητα  $\Rightarrow 2GMR/r^3 = Gm/R^2 \Rightarrow$

$$r_{\min} = R(2M/m)^{1/3}, \text{ όριο Roche.}$$

Ας βρούμε το όριο Roche για έναν άνθρωπο ύψους 2 m άρα  $R = 1$  m και μάζας  $m = 100$  kg που πλησιάζει κατακόρυφα στη μαύρη τρύπα στο κέντρο του γαλαξία μας μάζας  $M = 4.000.000$  μάζες ήλιου  $= 4 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{30} = 8 \cdot 10^{36}$  kg

$$r_{\min} = 550.000.000 \text{ km}$$

Η ακτίνα Schwarzschild  $R_s$  από τη μοναδικότητα μέχρι τον ορίζοντα γεγονότων μη περιστρεφόμενης μαύρης τρύπας προκύπτει αν θέσουμε την ταχύτητα διαφυγής από τον ορίζοντα γεγονότων με την ταχύτητα του φωτός

$1/2mc^2 = GMm/R_s \Rightarrow R_s = 2GM/c^2$  (το ίδιο προκύπτει και από τη λύση της εξίσωσης πεδίου της ΓΘΣ). Έχω λοιπόν  **$R_s = 12.000.000 \text{ km}$** . Δηλαδή μπορώ να πλησιάσω 538.000.000 km μακριά από τον ορίζοντα γεγονότων.

Εγώ όμως είμαι τολμηρός και πλησιάζω στο χείλος μπας και δω τι έχει μέσα η τρύπα. Στα πόδια και στο κεφάλι νοιώθω τις αντίθετες παλιρροϊκές δυνάμεις

$$g = 2GM/R^3 = 2.6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 8 \cdot 10^{36} / (12 \cdot 10^6)^3 = 7,4 \cdot 10^6 \text{ N/kg} \text{ ή}$$

740.000 «τζι»<sub>γης</sub> με τραβούν σα λάστιχο από τα πόδια και το κεφάλι

Αυτό θα έχει το μοιραίο αποτέλεσμα να μετατραπώ σε ... μακαρόνι, μία κατάσταση γνωστή ως spagettification.

Κάτι άσχετο

Αν για να φτάσω στον ορίζοντα γεγονότων κάνω ελεύθερη πτώση από 10 cm η ταχύτητα με την οποία θα φτάσω εμπιστευόμενος πάλι τον Νεύτωνα

Κάνω χοντροκοπιά και θεωρώ ομογενές το πεδίο στα 10 cm έτσι

$$g = GM/R_s^2 = 3,7 \cdot 10^{23} \text{ N/kg} \text{ και } v = \sqrt{2gh} = 27 \cdot 10^{10} \text{ m/s} \text{ ή } 10^{12} \text{ km/h} \text{ ή}$$

... μόλις **1 τρισεκατομμύριο km/h**