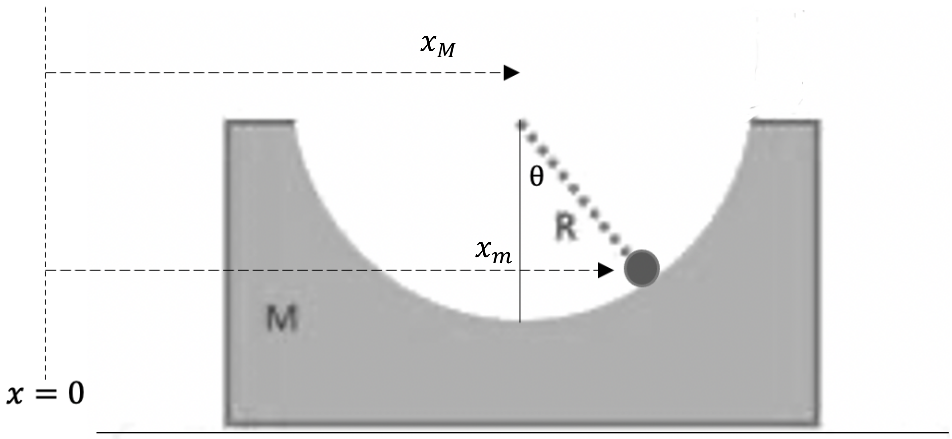
Ανάλυση της κίνησης σωματιδίου σε ελεύθερο καμπυλωμένο σώμα υπό την επίδραση βαρυτικού πεδίου

Τερλεμές Σπύρος
spyrosssterlemes@gmail.com
1-1-2022

Έστω ένα σώμα μάζας M, καμπυλωμένο με ακτίνα R όπως στο σχήμα, το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο (λείο) επίπεδο. Ένα αδιάστατο σώμα m ολισθαίνει πάνω στο καμπυλωμένο μέρος του σώματος M. Υποθέτουμε ότι οι αρχικές συνθήκες του σώματος m είναι $\theta = \theta_0$ και $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$, όπου θ η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα με την κατακόρυφο.



Η θέση των σωμάτων μπορεί να γραφτεί σύμφωνα με το σχήμα ως:

$$x_M = x_m - R\sin\theta \Longrightarrow \dot{x}_M = \dot{x}_m - R\cos\theta\dot{\theta}$$
$$y_m = R\cos\theta \Longrightarrow \dot{y}_m = -R\sin\theta\dot{\theta}$$

(1)

Γνωρίζουμε ότι η ορμή του συστήματος διατηρείται (εξάλλου είναι εύκολο να δούμε ότι ένας μετασχηματισμός της μορφής $x_M \to x_M + \varepsilon$ και $x_m \to x_m + \varepsilon$, δεν θα επηρεάσει την Lagrangian του συστήματος αφού ο - οριζόντιος - δεσμός $h(x_M, x_m, \theta) = x_M - x_m + R\sin\theta = h(x_M + \varepsilon, x_m + \varepsilon, \theta)$ και άρα από το θεώρημα της Noether, η ορμή διατηρείται). Έτσι μπορούμε να γράψουμε $m\dot{x}_m + M\dot{x}_M = p$, όπου p είναι σταθερά. Από την εξίσωση (1) έχουμε λοιπόν:

$$\dot{x}_m = \frac{1}{m+M}\left(p + MR\cos\theta\dot{\theta}\right) \quad (2.A) \qquad \dot{y}_m = -R\sin\theta\dot{\theta} \quad (2.B)$$
$$\dot{x}_M = \frac{m}{m+M}\left(\frac{p}{m} - R\cos\theta\dot{\theta}\right) \quad (2.C)$$

(2)

Η κινητική ενέργεια του συστήματος (βάσει της εξίσωσης (2)) θα είναι:

$$K=\frac{1}{2}M\frac{m^2}{(m+M)^2}\left(\frac{p}{m}-R\cos\theta\dot{\theta}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{m}{(m+M)^2}\left(p+MR\cos\theta\dot{\theta}\right)^2+\frac{1}{2}mR^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2\Longrightarrow$$

$$K=\frac{m}{(m+M)^2}\left[\frac{M}{m}p^2+MmR^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2+p^2+M^2R^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2+(m+M)^2R^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2\right]\Longrightarrow$$

$$K=\frac{1}{2}\frac{m}{(m+M)^2}\left[\frac{m+M}{m}p^2+(m+M)^2R^2+[Mm+M^2-(m+M)^2]R^2\cos^2\theta\right]\dot{\theta}^2\Longrightarrow$$

$$K=\frac{p^2}{2(m+M)}+\frac{mR^2}{2(m+M)}[(m+M)-m\cos^2\theta]\dot{\theta}^2$$

$$K\big(\theta,\dot{\theta}\big)=\lambda+\psi(\theta)\dot{\theta}^2\ \text{ με }\ \psi(\theta)=\frac{m(m+M-m\cos^2\theta)R^2}{2(m+M)}\ \text{ και }\ \lambda=\frac{p^2}{2(m+M)}$$

(3)

Φυσικά η συνάρτηση $\psi(\theta)$ πρέπει να είναι πάντα θετική, το οποίο ισχύει αφού η ελάχιστη τιμή της (για $\cos\theta=1$) είναι μεγαλύτερη του μηδενός. Το δυναμικό τώρα του συστήματος δίνεται από την σχέση $V=-mgy_m=-mgR\cos\theta$. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε την Λαγκραζιανή του συστήματος ως: $L=K\big(\theta,\dot{\theta}\big)-V(\theta)$ – δηλαδή δεν αποτελεί εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου ($\partial L/\partial t=0$), οπότε το ολοκλήρωμα Jacobi διατηρείται και άρα έχουμε την εξής διατηρούμενη ποσότητα:

$$C=K\big(\theta,\dot{\theta}\big)+V(\theta)=\psi(\theta)\dot{\theta}^2-mgR\cos\theta+\lambda\Longrightarrow\dot{\theta}^2=\frac{E+mgR\cos\theta}{\psi(\theta)}$$

(4)

Όπου ο σταθερός όρος λ εκφυλλίζεται ορίζοντας ως $E=C-\lambda=\psi(\theta)\dot{\theta}^2-mgR\cos\theta$. Η σχέση (4) λοιπόν δίνει την συνάρτηση της γωνιακής ταχύτητας σε σχέση με την γωνία θ. Το σημαντικό στην κατανόηση της κίνησης του συστήματος, είναι να δούμε ότι αν όπου θ βάλουμε το $-\theta$, η (4) παραμένει αναλλοίωτη (είναι δηλαδή άρτια). Αυτό σημαίνει ότι εφόσον σε κάθε συμμετρική θέση η ταχύτητα του σώματος m είναι ίδια, τότε το φαινόμενο είναι περιοδικό και το σώμα m θα ανεβοκατεβαίνει συνεχώς και θα έχει μέγιστη ταχύτητα στην κατώτατη θέση – θα αντικατοπτρίζει δηλαδή κάτι σαν το γνωστό εκκρεμές. Η μέγιστη εκτροπή είναι εκεί που η (4) μηδενίζει, δηλαδή:

$$E+mgR\cos\theta_{max}=0\Longrightarrow\cos\theta_{max}=-\frac{\psi(\theta_0)\dot{\theta}_0-mgR\cos\theta_0}{mgR}=\cos\theta_0-\frac{\psi(\theta_0)\dot{\theta}_0}{mgR}$$

(5)

Εδώ πρέπει επίσης να τονίσουμε ότι απαιτείται να εξεταστεί για ποιες αρχικές συνθήκες είναι δυνατόν το σώμα να μην εγκαταλείπει το ημικύκλιο: θα πρέπει στην ανώτερη θέση ($\cos\theta=0$) να είναι οριακά $\dot{\theta}=0$ ώστε σύμφωνα με την (2.C) να μην ανέβει άλλο προς τα πάνω. Έτσι από την (4) παίρνουμε $\psi(\theta_0)\dot{\theta}_0^2-mg\cos\theta_0\leq 0\ \Longrightarrow\dot{\theta}_0^2\leq mg\cos\theta_0/\psi(\theta_0)$. Για αρχικές συνθήκες λοιπόν που δεν ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα, το σώμα m εγκαταλείπει το καμπυλωμένο σώμα M. Ας μελετήσουμε τώρα την μονοτονία της συνάρτησης $\dot{\theta}^2$ παραγωγίζοντας χρονικά την (4):

$$\ddot{\theta}=-\frac{mgR\sin\theta\psi(\theta)+(E+mgR\cos\theta)\psi'(\theta)}{2\psi^2(\theta)}\quad,\text{όπου}\quad\psi'(\theta)=\frac{2m^2R^2\cos\theta\sin\theta}{2(m+M)}=\frac{m^2R^2\sin(2\theta)}{2(m+M)}$$

(6)

Παρατηρούμε ότι η (6) μηδενίζει για $\theta=0$ και ότι για $\theta<0$ είναι θετική, ενώ για $\theta>0$ είναι αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι η $\dot{\theta}^2$ παρουσιάζει μέγιστο στο $\theta=0$, που επιβεβαιώνει την υπόθεση μας ότι η κίνηση αντικατοπτρίζει περίπου αυτή ενός εκκρεμούς. Επιπλέον, αντικαθιστώντας την σχέση (4) στο σύστημα (2) παίρνουμε τις εκφράσεις των ταχυτήτων κάθε σώματος.

$$\dot{x}_m = \frac{1}{m+M}\left(p \pm MR\cos\theta\sqrt{\frac{E+mgR\cos\theta}{\psi(\theta)}}\right) \ (6.A) \ \text{και} \ \dot{y}_m = \pm R\sin\theta\sqrt{\frac{E+mgR\cos\theta}{\psi(\theta)}} \ (6.B)$$

$$\dot{x}_M = \frac{m}{m+M}\left(\frac{p}{m} \pm R\cos\theta\sqrt{\frac{E+mgR\cos\theta}{\psi(\theta)}}\right) \ (6.C)$$

(7)

Επανερχόμαστε τώρα στην σχέση (4) και μελετάμε την συμπεριφορά της για μικρές γωνίες θ (δεδομένου ότι είναι $\ddot{\theta} = 0$ για $\theta = 0$). Η διαίσθηση μας λέει ότι θα κάνει αρμονική ταλάντωση. Η προσέγγιση εδώ όμως δεν είναι τόσο απλή όσο συνήθως γιατί ναι μεν ο αριθμητής προκύπτει ανάλογος του θ^2 αλλά και ο παρανομαστής προκύπτει ανάλογος του θ^2 όταν αναπτύσσουμε κατά Taylor την (4). Μπορούμε όμως να βρούμε μια γενικευμένη συντεταγμένη, για την οποία το σώμα m να εκτελεί αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα ανεξάρτητη των αρχικών συνθηκών – όπως συνήθως. Ας παρατηρήσουμε αρχικά ότι μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (4) ως $E = \psi(\theta)\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta$. Έστω ότι ορίζουμε τώρα μια νέα συντεταγμένη φ ως:

$$\varphi = \int_0^\theta \sqrt{\psi(\tau)}\,d\tau \Rightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{\psi(\theta)}\dot{\theta}$$

(8)

Υποθέτοντας ότι $\cos\theta \equiv h(\varphi)$, έχουμε

$$E = \psi(\theta)\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta = \dot{\varphi}^2 - mgRh(\varphi)$$

(9)

Φυσικά η cosθ έχει ελάχιστο εκεί που $\theta = 0$. Όμως όταν $\theta = 0$, σύμφωνα με την εξίσωση (8), είναι και η φ επίσης μηδενική. Άρα αν αναπτύξουμε κατά Taylor την $h(\varphi)$ γύρω από το $\varphi = 0$, προκύπτει:

$$h(\varphi) = h(0) + \left.\frac{dh}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}\varphi + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2h}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0}\varphi^2 + O(\varphi^3) = 1 + \left.\frac{dh}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}\varphi + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2h}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0}\varphi^2 + O(\varphi^3)$$

(10)

Το δυναμικό $-mgRh(\varphi)$ έχει ελάχιστο όταν $\left.\frac{dh}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = 0$, άρα για μικρές γωνίες φ, η $h(\varphi)$ – αγνοώντας τον όρο $O(\varphi^3)$ – γράφεται:

$$h(\varphi) = 1 + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2h}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0}\varphi^2 \Rightarrow E = \dot{\varphi}^2 - mgR\frac{1}{2}\left.\frac{d^2h}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0}\varphi^2 + 1$$

(11)

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (11) έχουμε:

$$\ddot{\varphi} = \frac{mgR}{2}\left(\left.\frac{d^2h}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0}\right)\varphi$$

(12)

Οπότε τώρα έχουμε μόνο να υπολογίσουμε τον συντελεστή της φ από την εξίσωση (12) και να αποδείξουμε ότι είναι αρνητικός (ώστε να έχουμε αρμονική κίνηση). Ας δούμε τις παραγώγους της h:

$$\frac{dh}{d\varphi}=\frac{d\cos\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{d\varphi}=-\sin\theta\frac{d\theta}{d\varphi}=-\sin\theta\frac{1}{\frac{d\varphi}{d\theta}}\overset{(12)}{\cong}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{\psi(\theta)}}\Rightarrow$$

$$\frac{d^2h}{d^2\varphi}=\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\sin\theta}{\sqrt{\psi(\theta)}}\right)\frac{d\theta}{d\varphi}=-\frac{\cos\theta\sqrt{\psi(\theta)}+\frac{1}{2\sqrt{\psi(\theta)}}\sin\theta}{\psi(\theta)}\frac{1}{\sqrt{\psi(\theta)}}=-\frac{\cos\theta\psi(\theta)-\frac{1}{2}\sin\theta}{\psi^2(\theta)}\Rightarrow$$

$$\left.\frac{d^2h}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0}\overset{\theta=0}{\cong}-\frac{1}{\psi(0)}$$

(13)

Έχουμε δείξει όμως ότι η ψ είναι πάντα θετική, άρα σύμφωνα με την (12) και την (13) προκύπτει:

$$\ddot{\varphi}=-\left(\frac{mgR}{2\psi(0)}\right)\varphi\quad \text{με}\quad \omega=\sqrt{\frac{mgR}{2\psi(0)}}$$

(13)

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ως προς την συγκεκριμένη γενικευμένη συντεταγμένη φ που έχουμε ορίσει, έχουμε ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα αυτή που βρήκαμε – το σώμα κινείται αρμονικά για μικρές γωνίες. Τέλος, αξίζει να εξετάσουμε την περίοδο με την οποία το σώμα m ταλαντώνεται, όχι μόνο για μικρές γωνίες, αλλά καθόλα την κίνηση του. Αν κάνουμε επανορισμό της t=0, και θεωρήσουμε ως t=0 την στιγμή που το σώμα βρίσκεται στην κατώτατη θέση, τότε έχουμε από την (4) – θεωρώντας θετική την γωνιακή ταχύτητα – ότι:

$$\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{E+mgR\cos\theta}{\psi(\theta)}}\Rightarrow\frac{T}{4}=\int_0^{\theta_{max}}\sqrt{\frac{\psi(\theta)}{E+mgR\cos\theta}}d\theta=\int_0^{\theta_{max}}\sqrt{\frac{[m(m+M)R^2-m^2R^2\cos^2\theta]}{2(m+M)(E+mgR\cos\theta)}}d\theta$$

(14)

Η μέγιστη γωνία θ_{max} υπολογίζεται σύμφωνα με την σχέση (5). Το ολοκλήρωμα αυτό δεν μπορεί να υπολογιστεί γενικά με αναλυτικό τρόπο. Ας υποθέσουμε όμως ότι θέλουμε να βρούμε την περίοδο όταν $M=3m$ και $\theta_0=0$, ενώ $\dot{\theta}_0=\sqrt{2g/R}$ r/s, R = 0,8 m, και $g=10m/s^2$. Τότε από την (5) προκύπτει για την μέγιστη γωνία εκτροπής ότι $\cos\theta_{max}=1/4$ άρα $\theta\cong1.3181$ rad. Επίσης προκύπτει $E=-0.25mgR$. Έτσι με αντικατάσταση έχουμε:

$$\frac{T}{4}=\int_0^{\theta_{max}}\sqrt{\frac{4m^2R^2-mR^2\cos^2\theta}{8m^2gR\left(cos\theta-\frac{1}{4}\right)}}d\theta=\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{1.3181}\sqrt{\frac{4-\cos^2\theta}{(8cos\theta-2)}}d\theta=\frac{1}{5}\int_0^{1.3181}\sqrt{\frac{4-\cos^2\theta}{(4cos\theta-1)}}d\theta$$

(15)

Χρησιμοποιούμε την πρισματική μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης, για την οποία γνωρίζουμε ότι το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f(θ) από το μηδέν έως την θ_{max}, ισούται προσεγγιστικά με:

$$\int_0^{\theta_{max}}f(\theta)d\theta\cong\frac{\theta_{max}}{6}\left\{f(0)+4f\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right)+f(\theta_{max})\right\}$$

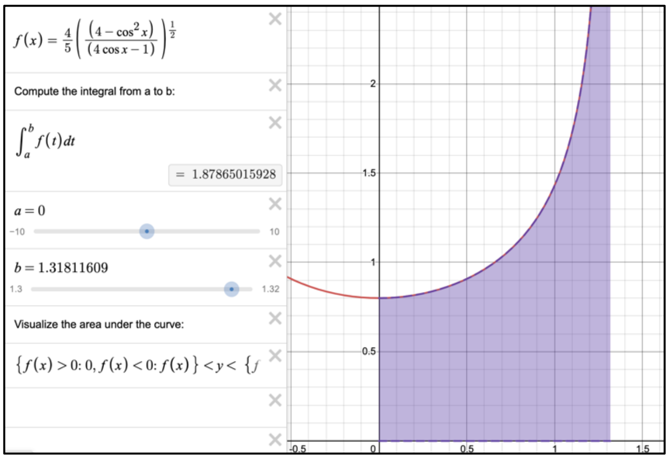
(16)

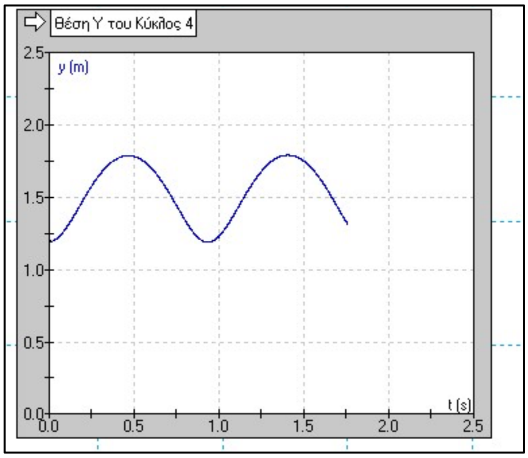
Οπότε στην δική μας περίπτωση – υπολογίζοντας τα συνημίτονα – η σχέση (16) γράφεται στην μορφή:

$$\frac{\mathrm{T}}{4} = \int_{0}^{1.3181} \sqrt{\frac{4 - \cos^2\theta}{4\cos\theta - 1}}\, d\theta \cong \frac{1}{5}\frac{1.3181}{6}\{10.6972\} \cong 0.47 \Longrightarrow \mathrm{T} \cong 1.88\ \mathrm{sec}$$

(17)

Στο παρακάτω γράφημα φαίνεται το ολοκλήρωμα δοσμένο σε υπολογιστικό πρόβλημα και η γραφική παράσταση της περιόδου από προσομοίωση ακριβείας.





Παρατηρούμε ότι ο υπολογιστής δίνει το ολοκλήρωμα ίσο με Τ ≅ 1.879 sec, δηλαδή υπολογίσαμε την περίοδο με απόκλιση μόλις 0,001 sec! Η προσομοίωση συμφωνεί επίσης. Θα μπορούσαμε να γίνουμε ακόμα πιο ακριβείς – για την ακρίβεια όσο ακριβείς θέλουμε – και με διαφορετικές μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης, όμως ο τρόπος που γράψαμε είναι εξαιρετικά γρήγορος και απλός.