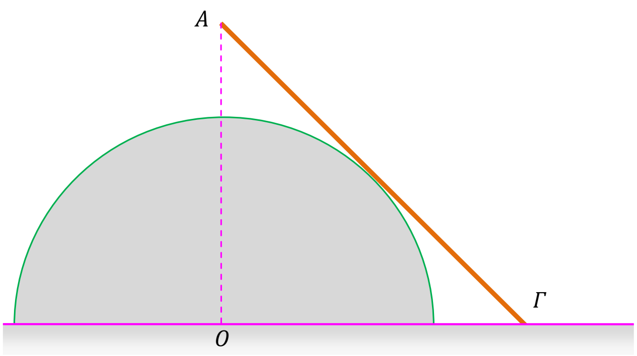
Ισορροπία Ράβδου και μετά κίνηση

Λεπτή ομογενής ράβδος μάζας M ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα ώστε να είναι σε επαφή με λεία κυλινδρική επιφάνειας ακτίνας R όπως φαίνεται στο σχήμα .Δίδεται $OA = O\Gamma$



A. Αν το δάπεδο δεν είναι λείο

Βρείτε τον ελάχιστο συντελεστή στατικής τριβής ώστε η ράβδος να ισορροπεί.

B. Αν το δάπεδο είναι λείο

i. Βρείτε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ που πρέπει να ασκούμε στο άκρο Α της ράβδου ώστε να ισορροπεί

ii. Αν καταργήσουμε τη δύναμη $\vec{F}$ βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν το άκρο Α έρθει σε επαφή με την κυλινδρική επιφάνεια

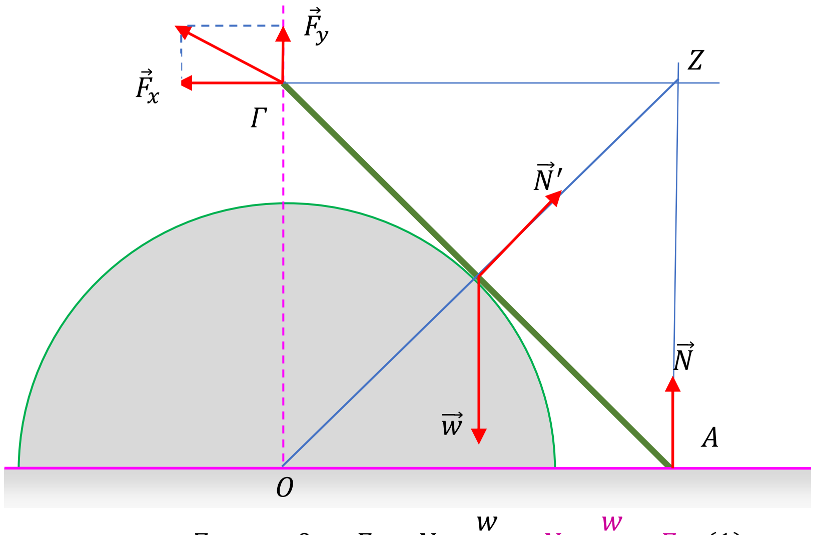
Λύση

A. Όταν ασκείται τριβή τότε στη ράβδο ασκούνται τρείς δυνάμεις και αφού έχουμε ισορροπία οι τρείς δυνάμεις θα διέρχονται από το μέσον της ράβδου. Έτσι η αντίδραση Α από το δάπεδο θα είναι επί της ράβδου και αναλύεται στις συνιστώσες N και T_s που έχουν ίσα μέτρα :

Μη ολίσθηση :

$$T_s \leq \mu_s N \Rightarrow 1 \leq \mu_s \ \Rightarrow \mu_s \geq 1$$

B. Λείο δάπεδο. Η δύναμη F αναλύεται σε δύο συνιστώσες F_x, F_y



$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow F_x + N = \frac{w}{2} \Rightarrow N = \frac{w}{2} - F_x \quad (1)$$

$$\Sigma\tau_{(Z)} = 0 \Rightarrow F_y = \frac{w}{2} \quad (2)$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = F_x \quad (3)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + F_y + N' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = w \quad (4)$$

Για τη δύναμη στήριξης N ισχύει:

$$N \geq 0 \Rightarrow \frac{w}{2} - F_x \geq 0 \Rightarrow F_x \leq \frac{w}{2}$$

Από την (4)

$$N' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{w}{2} - N \geq 0 \Rightarrow N \leq \frac{w}{2}$$

Όταν

$$N = \frac{w}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow} F_x = 0$$

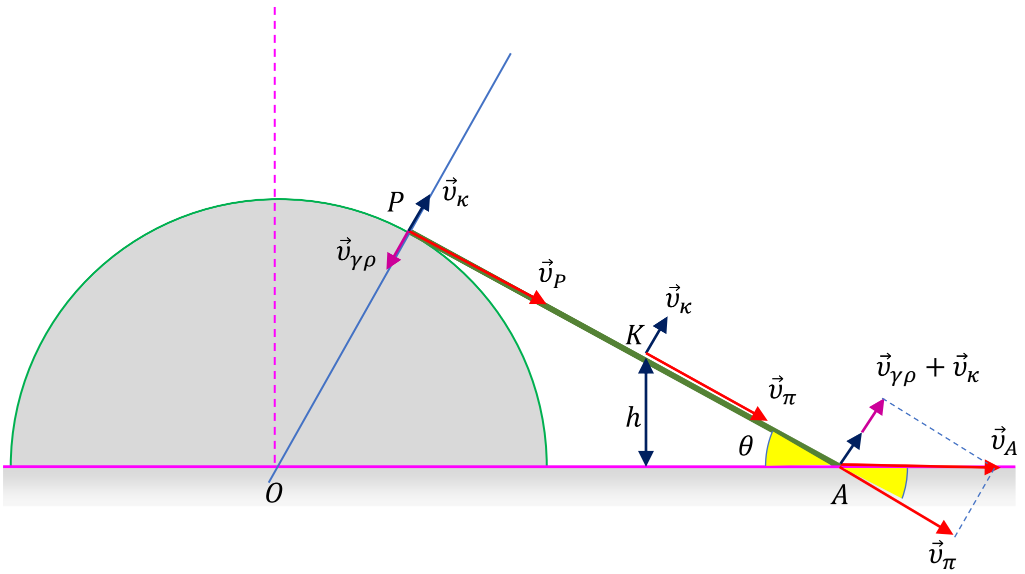
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Όταν: $F_x = 0$ τότε:

$$F = (min) = \sqrt{F_y^2} = F_y = \frac{w}{2}$$

Όταν: $F_x = max = \frac{w}{2}$ τότε

$$F = (max) = \sqrt{2F_y^2} = F_y\sqrt{2} = \frac{w}{2}\sqrt{2}$$



Η ράβδος είναι εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο P και η ταχύτητα του άκρου P θα έχει την διεύθυνση της ράβδου
Αναλύουμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας σε δύο συνιστώσες

$$\vec{\upsilon}_\kappa \rightarrow \text{κάθετη στη ράβδο}$$

$$\vec{\upsilon}_\pi \rightarrow \text{παράλληλη στη ράβδο}$$

Η ταχύτητα κάθε σημείου είναι η συνισταμένη των $\vec{\upsilon}_\kappa, \vec{\upsilon}_\pi$ και της γραμμικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$ λόγω κυκλικής κίνηση η οποία έχει μέτρο $\upsilon_{\gamma\rho} = \omega r$ όπου r απόσταση του σημείου από το Κ .
Η ταχύτητα του P είναι πάνω στη ράβδο και άρα στο σημείο P οι κάθετες συνιστώσες της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$ και $\vec{\upsilon}_\kappa$ έχουν ίδια μέτρα :

$$\upsilon_\kappa = \upsilon_{\gamma\rho} \Rightarrow \upsilon_\kappa = \omega r = \omega \frac{l}{2}$$

Στο σημείο Α οι συνιστώσες $\vec{\upsilon}_\kappa, \vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$ είναι ίσες και η συνισταμένη ταχύτητα είναι οριζόντια
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΡΑ βρίσκουμε την $\varepsilon\varphi\theta$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{2\upsilon_\kappa}{\upsilon_\pi} \Rightarrow \upsilon_\pi = 4\upsilon_\kappa \Rightarrow \upsilon_\pi = 4\frac{l}{2}\omega = 2l\omega$$

$$\upsilon_{cm} = \sqrt{\upsilon_{\kappa}^2 + \upsilon_{\pi}^2} = \omega\sqrt{\frac{l^2}{4} + 4l^2} = \frac{\omega l}{2}\sqrt{17} = \frac{\omega 2R}{2}\sqrt{17} = \omega R\sqrt{17}$$

Το ύψος του κέντρου μάζας είναι

$$h = R\eta\mu\theta$$

Από την

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$h = \frac{\sqrt{5}}{5}R$$

ΑΔΜΕ:

$$mgR\frac{\sqrt{2}}{2} = mgR\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{2}m(\omega R\sqrt{17})^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m4R^2\omega^2$$

$$gR\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{1}{2}17\omega^2R^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}R^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$gR\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{1}{2}R^2\omega^2(17 + \frac{1}{3}) \Rightarrow$$

$$\frac{g}{R}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{26}{3}\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3}{26}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\frac{g}{R}}$$