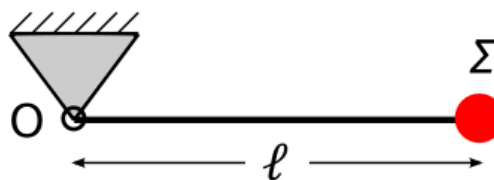


Με ίσες περιόδους

Το σημειακό σώμα Σ του σχήματος έχει μάζα m και είναι προσδεμένο στο ελεύθερο άκρο ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους ℓ , το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε σημείο O . Το σώμα Σ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές και αντιστάσεις γύρω από το O , σε κατακόρυφο επίπεδο. Φέρνουμε το σώμα σε οριζόντια θέση με το νήμα τεντωμένο και το αφήνουμε ελεύθερο, με αποτέλεσμα να εκτελέσει μία περιοδική κίνηση με περίοδο T_1 .



Στη συνέχεια, στερεώνουμε στο ίδιο σημείο O το άκρο μίας ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους L , η οποία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές και αντιστάσεις γύρω από το O , σε κατακόρυφο επίπεδο. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το άκρο της και είναι κάθετος σε αυτή, ισούται με $I_O = \frac{1}{3}ML^2$. Φέρνουμε τη ράβδο σε οριζόντια θέση όπως στο σχήμα και την αφήνουμε ελεύθερη. Η ράβδος εκτελεί μία περιοδική κίνηση με περίοδο T_2 .



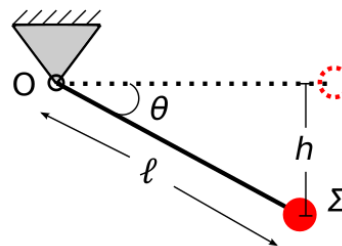
Για να ισχύει ότι $T_2 = T_1$, πρέπει:

α. $L = 3\ell$ β. $L = \frac{3\ell}{2}$ γ. $L = \ell$

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Το σώμα Σ , εκτελεί μη ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας ℓ . Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ της αρχικής οριζόντιας θέσης που απελευθερώθηκε το Σ και μίας τυχαίας κατά την οποία έχει στραφεί κατά γωνία θ από την οριζόντια διεύθυνση, έχουμε:



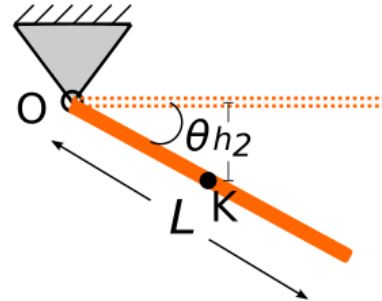
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow g\ell\eta\mu\theta = \frac{v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2g\ell\eta\mu\theta},$$

όπου v το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του Σ τότε και $\eta\mu\theta = \frac{h}{\ell}$. Για την αντίστοιχη γωνιακή ταχύτητα του Σ την ίδια τυχαία χρονική στιγμή έχουμε ότι:

$$v = \omega \ell \Rightarrow \omega = \frac{v}{\ell} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{2g\ell\eta\mu\theta}}{\ell} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\eta\mu\theta} \quad (1)$$

Η ράβδος, από τη στιγμή που απελευθερώνεται, εκτελεί περιστροφική κίνηση γύρω από το σημείο Ο (άκρο της). Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση της ράβδου μεταξύ της αρχικής οριζόντιας θέσης της και της αντίστοιχης τυχαίας κατά την οποία έχει στραφεί επίσης κατά γωνία θ σε σχέση με την οριζόντια, έχουμε:



$$Mgh_2 = \frac{1}{2}I_O\omega_2^2 \Rightarrow M g \frac{L}{2}\eta\mu\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}ML^2 \cdot \omega_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{L}\eta\mu\theta} \quad (2),$$

όπου h_2 η κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου μάζας Κ της ράβδου.

Από τα παραπάνω, αντιλαμβανόμαστε ότι η γωνιακή ταχύτητα τόσο του σώματος Σ, όσο και της ράβδου, είναι ανεξάρτητη της μάζας τους και εξαρτάται μόνο από το μήκος τους και τη γωνία στροφής.

Για να έχουν οι δύο κινήσεις την ίδια περίοδο, πρέπει και αρκεί, οι αντίστοιχες γωνιακές τους ταχύτητες να είναι ίσες για όλες τις (ίδιες) γωνίες $\theta \in [0, \pi]$. Έτσι, από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\omega = \omega_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2g}{\ell}\eta\mu\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}\eta\mu\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{3\ell}{2}$$

Άρα, σωστή απάντηση είναι η β.

Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com