

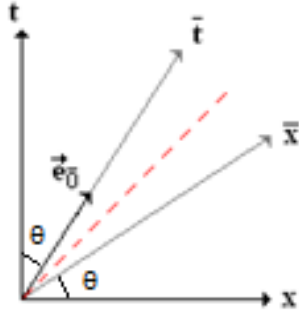
Το «παράδοξο» των διδύμων



Περιεχόμενα

1. Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας	3
2. Το «παράδοξο» των διδύμων	8
3. Αριθμητική εφαρμογή στο «παράδοξο»	12
4. Το «παράδοξο» των διδύμων, χωρίς επιταχυνόμενα στάδια	16
α) Η έννοια του «ταυτόχρονου» στα συστήματα αναφοράς των Σταμάτη και Γρηγόρη	16
β) Το γεγονός της συνάντησης σύμφωνα με τους παρατηρητές Σταμάτη και Π	18
γ) Η άρση του «παραδόξου» μέσω της διαφορετικής αντίληψης του «ταυτόχρονου»	20
5. Γενικά συμπεράσματα	22
6. Εν είδει επιλόγου	24
7. Βιβλιογραφία	25

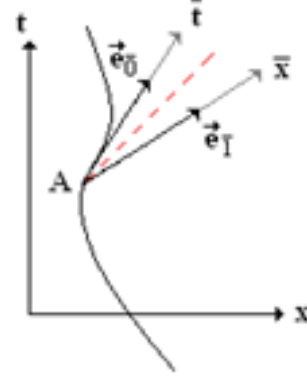
1. Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας



Σχήμα 1α

Στο σχήμα 1α απεικονίζεται ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς $\Pi(\hat{e}_0 \equiv \hat{t}, \hat{e}_1 \equiv \hat{x})$ και ένα κινούμενο σύστημα αναφοράς $\bar{\Pi}(\hat{e}_{\bar{0}} \equiv \hat{t}, \hat{e}_{\bar{1}} \equiv \hat{x})$ με σταθερή ταχύτητα μέτρου v κατά μήκος του άξονα $\hat{x}$. Οι άξονες του κινούμενου συστήματος αναφοράς $\hat{t}$ και $\hat{x}$ σχεδιάζονται υπό γωνία θ ως προς τους άξονες $\hat{t}$ και $\hat{x}$, όπου $\varepsilon\varphi(\theta) = v$. Χρίζει προσοχής ότι αν και στο σχήμα δεν φαίνεται (λόγω αδυναμίας της ευκλείδειας γεωμετρίας να αποτυπώσει σωστά την κατάσταση), οι άξονες $\hat{t}$ και $\hat{x}$ είναι κάθετοι μεταξύ τους (το σύστημα $\bar{\Pi}$ είναι ένα ορθογώνιο σύστημα αναφοράς).

Τέλος, με την κόκκινη γραμμή απεικονίζεται η κοσμική γραμμή ενός σωματιδίου το οποίο κινείται με την ταχύτητα του φωτός (πχ φωτονίου). Παρατηρείστε ότι για το φωτόνιο η κοσμική του γραμμή και οι άξονες $\hat{t}$ και $\hat{x}$ συμπίπτουν.



Σχήμα 1β

Στο σχήμα 1β απεικονίζεται η κοσμική γραμμή ενός σωματιδίου το οποίο κινείται σε ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς $\Pi(\hat{e}_0 \equiv \hat{t}, \hat{e}_1 \equiv \hat{x})$, με μεταβαλλόμενη ταχύτητα v . Σε κάθε σημείο Α ενός γεγονότος της κοσμικής γραμμής του σωματιδίου, μπορούμε να σχεδιάσουμε τους άξονες του συστήματος αναφοράς $\bar{\Pi}(\hat{e}_{\bar{0}} \equiv \hat{t}, \hat{e}_{\bar{1}} \equiv \hat{x})$ το οποίο κινείται με την εκάστοτε ταχύτητα v (παρατηρείστε ότι τώρα η κλίση των αξόνων $\hat{t}$ και $\hat{x}$ μπορεί να μεταβάλλεται από το ένα γεγονός στο άλλο). Το δεύτερο αυτό σύστημα αναφοράς μπορεί να θεωρηθεί στιγμιαία αδρανειακό και καλείται Στιγμιαία Συνταξιδεύον Σύστημα

Αναφοράς (ΣΣΣΑ) του σωματιδίου. Προφανώς το σωματίδιο στο ΣΣΣΑ του βρίσκεται συνεχώς ακίνητο στην αρχή των αξόνων ($\bar{x} = 0, \bar{t} = 0$) και ο χρόνος που καταγράφει το σωματίδιο στο ΣΣΣΑ του καλείται ιδιόχρονός του.

Έστω ακίνητο χωροχρονικό σύστημα αναφοράς $\Pi(\hat{e}_0 \equiv \hat{t}, \hat{e}_1 \equiv \hat{x}, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ και ένα επίσης αδρανειακό σύστημα αναφοράς $\bar{\Pi}(\hat{e}_{\bar{0}} \equiv \hat{t}, \hat{e}_{\bar{1}} \equiv \hat{x}, \hat{e}_{\bar{2}}, \hat{e}_{\bar{3}})$, το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = v\hat{e}_1 = v\hat{x}$ ως προς το Π (δες σχήμα 1α). Σύμφωνα με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας (ΕΘΣ), μεταξύ των συστημάτων Π και $\bar{\Pi}$ ισχύουν οι μετασχηματισμοί Lorentz¹, με πίνακες μετασχηματισμού μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων βάσης $\hat{e}_\mu$ των δύο συστημάτων αναφοράς και των συντεταγμένων x^μ των διανυσμάτων²,

$$[A^\mu_\nu] = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1a), \quad [A^\nu_{\bar{\mu}}] = \begin{bmatrix} \gamma & +\gamma v & 0 & 0 \\ +\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1b),$$

¹ Για να απλοποιηθούν οι πράξεις, υποθέτουμε σύστημα μονάδων στο οποίο η ταχύτητα του φωτός είναι αδιάστατη και ισούται με $c=1$. Στην συνέχεια μπορούμε σε οποιονδήποτε τύπο θελήσουμε, να αποκαταστήσουμε διαστατικά το σύμβολο c για την ταχύτητα του φωτός.

² Κάτω δείκτες υποδηλώνουν μοναδιαία διανύσματα ($\hat{e}_\mu$) και άνω δείκτες συνιστώσες διανυσμάτων (A^μ) σε ένα χωροχρονικό διάγραμμα. Για παράδειγμα ένα χωροχρονικό διάνυσμα $\vec{A}$ γράφεται ως $\vec{A} = A^\mu \hat{e}_\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Επίσης τονίζεται ότι επαναλαμβανόμενοι δείκτες αθροίζονται κατά την σύμβαση Einstein, ήτοι

$$\vec{A} = A^\mu \hat{e}_\mu = A^0 \hat{e}_0 + A^1 \hat{e}_1 + A^2 \hat{e}_2 + A^3 \hat{e}_3 = A^t \hat{t} + A^x \hat{x} + A^y \hat{y} + A^z \hat{z}.$$

όπου

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad (1.2).$$

Συγκεκριμένα τα διανύσματα βάσης του ΣΣΣΑ $\hat{e}_{\bar{\mu}}$ και του ακίνητου συστήματος αναφοράς $\hat{e}_\nu$, μετασχηματίζονται ως

$$\hat{e}_{\bar{\mu}} = \Lambda^{\nu}_{\bar{\mu}} \hat{e}_\nu \Rightarrow \begin{cases} \hat{e}_{\bar{0}} = \Lambda^{\nu}_{\bar{0}} \hat{e}_\nu = \Lambda^0_{\bar{0}} \hat{e}_0 + \Lambda^1_{\bar{0}} \hat{e}_1 \Rightarrow \boxed{\hat{t} = \gamma \hat{t} + \gamma v \hat{x}} \\ \hat{e}_{\bar{1}} = \Lambda^{\nu}_{\bar{1}} \hat{e}_\nu = \Lambda^0_{\bar{1}} \hat{e}_0 + \Lambda^1_{\bar{1}} \hat{e}_1 \Rightarrow \boxed{\hat{x} = \gamma v \hat{t} + \gamma \hat{x}} \end{cases} \quad (1.3\alpha),$$

$$\hat{e}_\nu = \Lambda^{\bar{\mu}}_{\nu} \hat{e}_{\bar{\mu}} \Rightarrow \begin{cases} \hat{e}_0 = \Lambda^{\bar{\mu}}_0 \hat{e}_{\bar{\mu}} = \Lambda^{\bar{0}}_0 \hat{e}_{\bar{0}} + \Lambda^{\bar{1}}_0 \hat{e}_{\bar{1}} \Rightarrow \boxed{\hat{t} = \gamma \hat{t} - \gamma v \hat{x}} \\ \hat{e}_1 = \Lambda^{\bar{\mu}}_1 \hat{e}_{\bar{\mu}} = \Lambda^{\bar{0}}_1 \hat{e}_{\bar{0}} + \Lambda^{\bar{1}}_1 \hat{e}_{\bar{1}} \Rightarrow \boxed{\hat{x} = -\gamma v \hat{t} + \gamma \hat{x}} \end{cases} \quad (1.3\beta).$$

Αντίστροφα από τα μοναδιαία διανύσματα μετασχηματίζονται οι συνιστώσες των διανυσμάτων σε κάθε σύστημα αναφοράς, ήτοι

$$x^\mu = \Lambda^{\mu}_{\bar{\nu}} x^{\bar{\nu}} \Rightarrow \begin{cases} x^0 = \Lambda^0_{\bar{0}} x^{\bar{0}} + \Lambda^0_{\bar{1}} x^{\bar{1}} \Rightarrow \boxed{t = \gamma \hat{t} + \gamma v \hat{x}} \\ x^1 = \Lambda^1_{\bar{0}} x^{\bar{0}} + \Lambda^1_{\bar{1}} x^{\bar{1}} \Rightarrow \boxed{x = \gamma v \hat{t} + \gamma \hat{x}} \end{cases} \quad (1.3\gamma),$$

$$x^{\bar{\nu}} = \Lambda^{\bar{\nu}}_{\mu} x^\mu \Rightarrow \begin{cases} x^{\bar{0}} = \Lambda^{\bar{0}}_0 x^0 + \Lambda^{\bar{0}}_1 x^1 \Rightarrow \boxed{\hat{t} = \gamma \hat{t} - \gamma v \hat{x}} \\ x^{\bar{1}} = \Lambda^{\bar{1}}_0 x^0 + \Lambda^{\bar{1}}_1 x^1 \Rightarrow \boxed{\hat{x} = -\gamma v \hat{t} + \gamma \hat{x}} \end{cases} \quad (1.3\delta).$$

Επίσης ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς σύμφωνα με την μετρική $n_{\mu\nu}$, όπου

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^\mu A^\nu n_{\mu\nu} = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3 \quad (1.4),$$

$$[n_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5).$$

Τέλος παρατηρούμε ότι αν ένα σωματίδιο κινείται στο σύστημα αναφοράς $\bar{I}$ με χωρική ταχύτητα

$$\bar{w} = \frac{dx^{\bar{1}}}{dx^{\bar{0}}} = \frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} \quad (1.6),$$

τότε στο σύστημα αναφοράς I (ως προς το οποίο το σύστημα $\bar{I}$ κινείται με σταθερή χωρική ταχύτητα μέτρου v), η ταχύτητα του σωματιδίου ισούται με

$$w = \frac{dx^1}{dx^0} \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{d[\Lambda^1_{\bar{\nu}} x^{\bar{\nu}}]}{d[\Lambda^0_{\bar{\mu}} x^{\bar{\mu}}]} = \frac{d[\Lambda^1_{\bar{0}} x^{\bar{0}} + \Lambda^1_{\bar{1}} x^{\bar{1}}]}{d[\Lambda^0_{\bar{0}} x^{\bar{0}} + \Lambda^0_{\bar{1}} x^{\bar{1}}]} = \frac{d[\gamma v \hat{t} + \gamma \hat{x}]}{d[\gamma \hat{t} + \gamma v \hat{x}]} = \frac{v d\hat{t} + d\hat{x}}{d\hat{t} + v d\hat{x}} = \frac{v + \frac{d\hat{x}}{d\hat{t}}}{1 + v \frac{d\hat{x}}{d\hat{t}}}$$

ή

$$w = \frac{v + \bar{w}}{1 + v \bar{w}} \quad (1.7).$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί τον νόμο της σύνθεσης των ταχυτήτων στα πλαίσια της ΕΘΣ.

Έστω τώρα ένα μη αδρανειακό χωροχρονικό σύστημα αναφοράς $\bar{\Pi}(\hat{e}_0 \equiv \hat{t}, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, το οποίο σε κάθε χρονική στιγμή η αρχή του ακολουθεί ένα κινούμενο σωματίδιο, πάνω στην κοσμική του γραμμή στο ακίνητο σύστημα αναφοράς Π , όπως στο σχήμα 1β. Στην περίπτωση αυτήν, το σύστημα $\bar{\Pi}$ καλείται Στιγμαία Συνταξιδεύον Σύστημα Αναφοράς (ΣΣΣΑ) του σωματιδίου και μπορεί να θεωρηθεί ως ένα επίσης στιγμαία αδρανειακό σύστημα αναφοράς, εφ' όσον στο στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt του Π , η ταχύτητα του $\bar{\Pi}$ μπορεί να θεωρηθεί σταθερή (δες σχήμα 1β).

Στο σημείο αυτό τονίζεται ότι:

- Στο ΣΣΣΑ του το σωματίδιο είναι ακίνητο σε κάθε χρονική στιγμή στην αρχή των αξόνων του.
- Βάσει της προηγούμενης πρότασης προκύπτει ότι η τετραταχύτητα $\vec{u}$ του σωματιδίου ταυτίζεται με το μοναδιαίο χρονικό διάνυσμα $\hat{e}_0 \equiv \hat{t}$ (δες τα σχόλια στο σχήμα 1β), εφ' όσον

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{dx^0}{d\tau} \hat{e}_0 = \frac{d\tau}{d\tau} \hat{e}_0 = \hat{e}_0 \quad (1.8),$$

- Ο χρόνος τ όπως μετράται στο ΣΣΣΑ κάθε σωματιδίου καλείται ιδιόχρονος του σωματιδίου. Διαφορετικά ο ιδιόχρονος κάθε σωματιδίου ταυτίζεται με την χρονική συντεταγμένη του ΣΣΣΑ του.

Μέσω του ορισμού (1.8) της τετραταχύτητας, παρατηρούμε επίσης ότι

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \hat{e}_0 \cdot \hat{e}_0 = n_{00} = -1 \quad (1.9),$$

διαφορετικά η τετραταχύτητα είναι εξ' ορισμού της ένα χρονοειδές διάνυσμα, μοναδιαίου μέτρου.

Τώρα σύμφωνα με τον μετασχηματισμό (1.3α) και τον πίνακα (1.1β), το διάνυσμα της τετραταχύτητας στο ακίνητο σύστημα αναφοράς, λαμβάνει την ισοδύναμη μορφή

$$\vec{u} = \hat{e}_0 = \Lambda^{\nu}_0 \hat{e}_{\nu} = \Lambda^0_0 \hat{e}_0 + \Lambda^1_0 \hat{e}_1 \Rightarrow \vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \gamma \hat{e}_0 + \gamma v \hat{e}_1 \quad (1.10\alpha).$$

Αλλά η τετραταχύτητα (1.8) μπορεί να γραφεί στο ακίνητο σύστημα αναφοράς Π , ισοδύναμα ως,

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \hat{e}_0 + \frac{dx}{d\tau} \hat{e}_1 \quad (1.10\beta).$$

Συγκρίνοντας τώρα τις εκφράσεις (1.10α,β), προκύπτουν οι σχέσεις μετασχηματισμού των συντεταγμένων μεταξύ του ακίνητου συστήματος αναφοράς και του ΣΣΣΑ του σωματιδίου,

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma \Rightarrow \boxed{dt = \gamma d\tau} \quad (1.11), \quad \frac{dx}{d\tau} = \gamma v \Rightarrow \boxed{dx = \gamma v d\tau} \quad (1.12).$$

Επίσης το διάνυσμα της τετραεπιτάχυνσης του σωματιδίου στο ακίνητο σύστημα αναφοράς ορίζεται, μέσω της σχέσης (1.10α), ως

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (\gamma \hat{e}_0 + \gamma v \hat{e}_1) = \frac{d\gamma}{d\tau} \hat{e}_0 + \frac{d(\gamma v)}{d\tau} \hat{e}_1 \quad (1.13).$$

Παρατηρούμε όμως ότι

$$\vec{u} \cdot \vec{a} = \hat{e}_0 \cdot \alpha^{\bar{\mu}} \hat{e}_{\bar{\mu}} = \alpha^{\bar{\mu}} n_{0\bar{\mu}} = -\alpha^{\bar{0}} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{a} = -\alpha^{\bar{0}} \quad (1.14)$$

και μέσω της σχέσης (1.9) ότι

$$\frac{d}{d\tau}(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{d\tau} \Rightarrow \frac{d}{d\tau}(-1) = 2\vec{u} \cdot \vec{a} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{a} = 0} \quad (1.15).$$

Μέσω των δύο τελευταίων αποτελεσμάτων συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα της τετραταχύτητας και της τετραεπιτάχυνσης είναι ορθογώνια, σύμφωνα με την σχέση (1.15), και ότι η τετραεπιτάχυνση έχει μηδενική χρονική συνιστώσα στο ΣΣΣΑ, σύμφωνα με την σχέση (1.14).

Συνεπώς θέτοντας $a^0 = 0$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η τετραεπιτάχυνση έχει μη μηδενική συνιστώσα μόνον κατά μήκος του άξονα $\hat{e}_1$, προκύπτει ότι

$$\vec{a} = a^1 \hat{e}_1 = a \Lambda^1_{\hat{1}} \hat{e}_1 = a(\Lambda^0_{\hat{1}} \hat{e}_0 + \Lambda^1_{\hat{1}} \hat{e}_1) \Rightarrow$$

$$\vec{a} = a(\gamma v \hat{e}_0 + \gamma \hat{e}_1) \quad (1.16).$$

Από τις σχέσεις (1.13) και (1.16) γίνεται τώρα προφανές ότι

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = a\gamma v \quad (1.17),$$

και

$$\frac{d(\gamma v)}{d\tau} = a\gamma \Rightarrow v \frac{d\gamma}{d\tau} + \gamma \frac{dv}{d\tau} = a\gamma \Rightarrow$$

$$a\gamma v^2 + \gamma \frac{dv}{d\tau} = a\gamma \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{d\tau} = a(1 - v^2)} \quad (1.18).$$

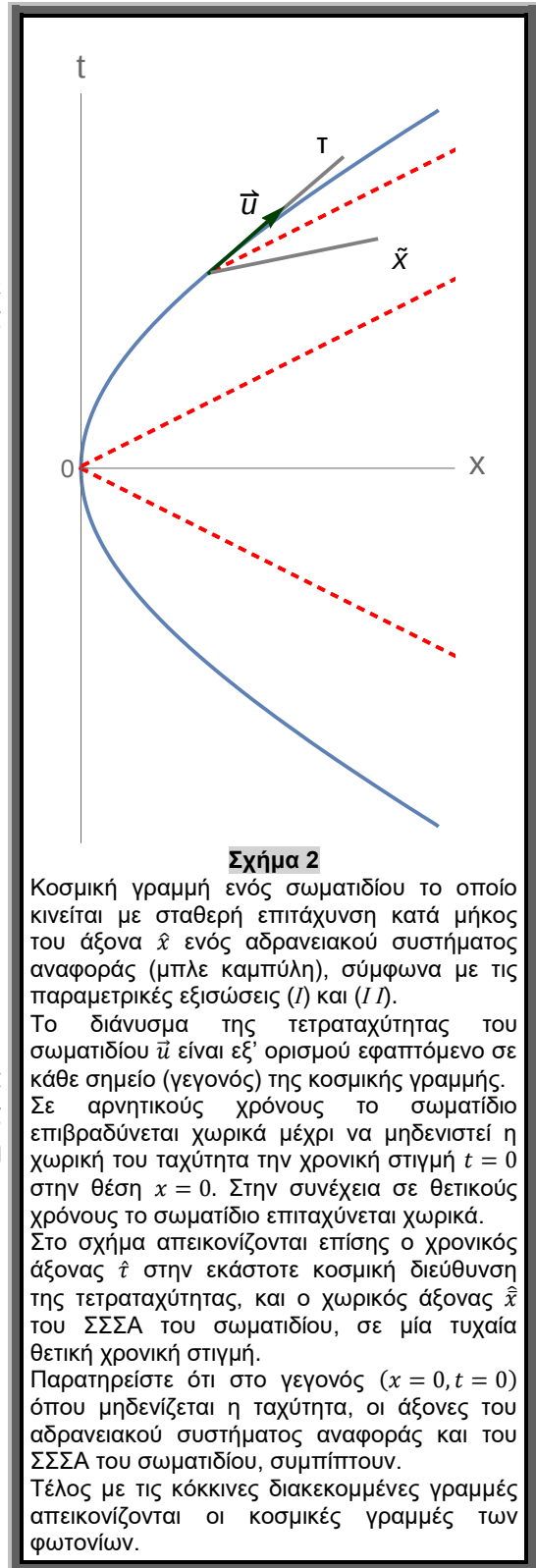
Η λύση της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την χρονική εξάρτηση της χωρικής ταχύτητας v του σωματιδίου από τον ιδιόχρονο τ . Συγκεκριμένα η λύση προκύπτει με ολοκλήρωση, όπως παρακάτω:

$$\frac{dv}{d\tau} = a(1 - v^2) \Rightarrow \int \frac{dv}{1 - v^2} = \int a d\tau \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - v}{1 + v} \right) = a\tau + \kappa \Rightarrow \ln \left(\frac{1 - v}{1 + v} \right) = 2(a\tau + \kappa) \Rightarrow$$

$$\frac{1 - v}{1 + v} = e^{2(a\tau + \kappa)} \Rightarrow v(\tau) = \frac{e^{2(a\tau + \kappa)} - 1}{e^{2(a\tau + \kappa)} + 1} \quad (1.19\alpha).$$

Διαφορετικά αλλά ισοδύναμα η συνάρτηση (1.19α) λαμβάνει την μορφή,



$$v(\tau) = \frac{e^{+(\alpha\tau+\kappa)} - e^{-(\alpha\tau+\kappa)}}{e^{+(\alpha\tau+\kappa)} + e^{-(\alpha\tau+\kappa)}} \Rightarrow \boxed{v(\tau) = \tanh(\alpha\tau + \kappa)} \quad (1.19\beta),$$

όπου κ αδιάστατη σταθερά η οποία εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες της χωρικής ταχύτητας. Στην συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε την εξάρτηση της χρονικής, t , και της χωρικής, x , συντεταγμένης του σωματιδίου στο ακίνητο σύστημα αναφοράς, συναρτήσει του ιδιοχρόνου τ του σωματιδίου στο ΣΣΣΑ του, μέσω των αποτελεσμάτων (1.11) και (1.12). Συγκεκριμένα,

$$(1.11) \rightarrow \int dt = \int \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tanh^2(\alpha\tau + \kappa)}} \Rightarrow \boxed{t(\tau) = \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau + \kappa) + b} \quad (1.20)$$

και

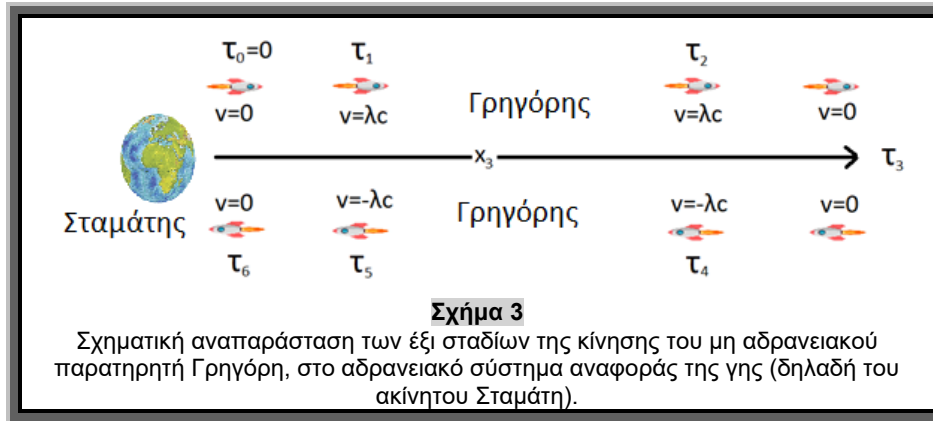
$$(1.12) \rightarrow \int dx = \int \frac{\tanh(\alpha\tau + \kappa) d\tau}{\sqrt{1 - \tanh^2(\alpha\tau + \kappa)}} \Rightarrow \boxed{x(\tau) = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau + \kappa) + d} \quad (1.21),$$

όπου b και d σταθερές ολοκλήρωσης οι οποίες εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες στο ακίνητο σύστημα αναφοράς. Αποκαθιστώντας το σύμβολο της ταχύτητας του φωτός, οι παραπάνω εξισώσεις κίνησης λαμβάνουν την μορφή,

$$\boxed{v(\tau) = c \tanh\left(\frac{\alpha}{c}\tau + \kappa\right)} \quad (I), \quad \boxed{t(\tau) = \frac{c}{\alpha} \sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau + \kappa\right) + b} \quad (II), \quad \boxed{x(\tau) = \frac{c^2}{\alpha} \cosh\left(\frac{\alpha}{c}\tau + \kappa\right) + d} \quad (III).$$

Η κοσμική γραμμή ενός ομαλά επιταχυνόμενου σωματιδίου κατά μήκος του άξονα x ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς, η οποία περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις (II) και (III), απεικονίζεται στο σχήμα 2.

2. Το «παράδοξο» των διδύμων



Στην συνέχεια θεωρούμε ότι ο ένας εκ δύο διδύμων, ο Σταμάτης ή σύστημα αναφοράς Π , είναι συνεχώς ακίνητος στην γη (αγνοούμε οποιαδήποτε κίνηση της γης στο νοητικό πείραμα που ακολουθεί), όταν ο άλλος, ο Γρηγόρης ή σύστημα αναφοράς $\bar{\Pi}$, επιβιβάζεται σε ένα διαστημόπλοιο και κινείται συνεχώς στην διεύθυνση του άξονα $\hat{e}_1 \equiv \hat{x}$ στο σύστημα του Σταμάτη, ως εξής:

- [1] Την χρονική στιγμή μηδέν ($\tau_0 = 0$) ο Γρηγόρης επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a} = \alpha\hat{x}$ για χρονικό διάστημα το οποίο ο ίδιος εκλαμβάνει ως $\tau_1 = T$, μέχρι να αποκτήσει ταχύτητα ίση με $\vec{v} = \lambda c\hat{x}$ (όπου $0 < \lambda < 1$ και c η ταχύτητα του φωτός).
- [2] Στην συνέχεια κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = \lambda c\hat{x}$ για χρονικό διάστημα $\tau_2 - \tau_1 = sT$, όπου $s > 0$.
- [3] Την χρονική στιγμή τ_2 ο Γρηγόρης αρχίζει να επιβραδύνεται με επιβράδυνση $\vec{a} = -\alpha\hat{x}$ για χρονικό διάστημα $\tau_3 - \tau_2 = T$ μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του.
- [4] Εν συνεχεία την χρονική στιγμή τ_3 επιταχύνεται εκ νέου προς την αντίθετη κατεύθυνση του άξονα $\hat{x}$, για επίσης χρονικό διάστημα $\tau_4 - \tau_3 = T$, μέχρι να αποκτήσει ταχύτητα $\vec{v} = -\lambda c\hat{x}$ την χρονική στιγμή που ο ίδιος καταγράφει ως τ_4 .
- [5] Στην συνέχεια ο Γρηγόρης επιστρέφει προς την γη με την σταθερή ταχύτητα $-\lambda c\hat{x}$ για χρονικό διάστημα $\tau_5 - \tau_4 = sT$.
- [6] Τέλος την χρονική στιγμή τ_5 αρχίζει να επιβραδύνεται με επιβράδυνση $\vec{a} = -\alpha\hat{x}$ μέχρι την χρονική στιγμή $\tau_6 = \tau_5 + T$, όπου και μηδενίζεται η ταχύτητά του επιστρέφοντας στην γη.

Τονίζεται στο σημείο αυτό, ότι όλες οι χρονικές στιγμές τ_j ($j = 1,2,3,4,5,6$) που αναφέρονται σε κάθε ένα από τα έξι στάδια κίνησης παραπάνω, είναι μετρημένες στο ΣΣΣΑ του πυραύλου, δηλαδή στον ιδιοχρόνο του συστήματος $\bar{\Pi}$ του Γρηγόρη. Επίσης όλες οι ταχύτητες και οι επιταχύνσεις είναι μετρημένες στο σύστημα αναφοράς Π του Σταμάτη.

Η κίνηση του Γρηγόρη απεικονίζεται στο σχήμα 3. Θα εξετάσουμε στην συνέχεια κάθε ένα από τα έξι στάδια της κίνησης του Γρηγόρη ξεχωριστά.

Α. Στάδιο [1]: $0 \leq \tau < \tau_1$

Στο πρώτο στάδιο της κίνησης, ο Γρηγόρης αφήνει πίσω του τον ακίνητο στην γη Σταμάτη, κινούμενος ομαλά επιταχυνόμενα κατά μήκος του χωρικού άξονα $\hat{x} \equiv \hat{e}_1$ με επιτάχυνση $\vec{a} = \alpha\hat{x}$ και μηδενική αρχική ταχύτητα. Τότε οι αρχικές συνθήκες και οι αντίστοιχες σταθερές για την κίνηση του Γρηγόρη στα δύο συστήματα αναφοράς, όπως προκύπτουν μέσω των αποτελεσμάτων (1.19β), (1.20) και (1.21), είναι οι ακόλουθες:

$$v(0) = 0 \Rightarrow \kappa = 0 \quad (2.1\alpha), \quad t(0) = 0 \Rightarrow d = 0 \quad (2.1\beta), \quad x(0) = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{a} \quad (2.1\gamma).$$

Συνεπώς οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης στο χρονικό διάστημα $0 \leq \tau < \tau_1$ λαμβάνουν την μορφή

$$v(\tau) = \tanh(a\tau) \quad (2.2\alpha), \quad t(\tau) = \frac{1}{a} \sinh(a\tau) \quad (2.2\beta), \quad x(\tau) = \frac{1}{a} [\cosh(a\tau) - 1] \quad (2.2\gamma).$$

Η Γρηγόρης κινείται με την σταθερή επιτάχυνση a έως ότου αποκτήσει ταχύτητα $v = \lambda$ (ή αποκαθιστώντας το σύμβολο της ταχύτητας του φωτός, $v = \lambda c$), οπότε σύμφωνα με την σχέση (2.2α) μέχρι την χρονική στιγμή $\tau_1 = T$ όπου

$$\tanh(a\tau_1) = \lambda \Rightarrow \frac{e^{2a\tau_1} - 1}{e^{2a\tau_1} + 1} = \lambda \Rightarrow e^{2a\tau_1} = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \Rightarrow \tau_1 = \boxed{T = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \right)} \quad (2.3).$$

Στο χρονικό αυτό διάστημα ο Γρηγόρης έχει διανύσει στο σύστημα αναφοράς του Σταμάτη, απόσταση

$$x_1 = x(\tau_1) = \frac{1}{a} [\cosh(a\tau_1) - 1] = \frac{1}{a} \left(\frac{e^{a\tau_1} + e^{-a\tau_1}}{2} - 1 \right) \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} - 1 \right) \quad (2.4)$$

σε χρόνο

$$t_1 = t(\tau_1) = \frac{1}{a} \sinh(a\tau_1) = \frac{1}{a} \frac{e^{a\tau_1} - e^{-a\tau_1}}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{a} \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \quad (2.5).$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις (2.2β) και (2.2γ) δίνουν την κοσμική γραμμή του Γρηγόρη, στο διάγραμμα του Σταμάτη, στο ζητούμενο χρονικό διάστημα $0 < t < t_1$.

B. Στάδιο [2]: $\tau_1 \leq \tau < \tau_2$

Στην συνέχεια ο Γρηγόρης κινείται με την σταθερή χωρική ταχύτητα $\vec{v} = \lambda \hat{x}$ (ή αποκαθιστώντας το σύμβολο της ταχύτητας του φωτός, $\vec{v} = \lambda c \hat{x}$) για χρονικό διάστημα $\tau_2 - \tau_1 = sT$, μέχρι την χρονική στιγμή $\tau_2 = (1 + s)T$. Σε αυτό το στάδιο της κίνησης, σύμφωνα με τα αποτελέσματα (1.11) και (1.12), η χρονική και η χωρική συνιστώσα στο σύστημα αναφοράς του Σταμάτη, λαμβάνουν την μορφή,

$$\int_{t_1}^t dt = \gamma \int_{\tau_1}^{\tau} d\tau \Rightarrow t - t_1 = \frac{\tau - \tau_1}{\sqrt{1 - v^2}} \Rightarrow t(\tau) = t_1 + \frac{\tau - \tau_1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \quad (2.6)$$

και

$$\int_{x_1}^x dx = \gamma v \int_{\tau_1}^{\tau} d\tau \Rightarrow x - x_1 = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} (\tau - \tau_1) \Rightarrow x(\tau) = x_1 + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} (\tau - \tau_1) \quad (2.7).$$

Προφανώς ο συνδυασμός των αποτελεσμάτων (2.6) και (2.7) δίνει στο διάγραμμα του Σταμάτη, την κοσμική γραμμή του Γρηγόρη με εξίσωση³

³ Η εξίσωση αυτή μπορεί να προκύψει πολύ πιο εύκολα, αν σκεφτούμε ότι στο στάδιο αυτό και στο ακίνητο σύστημα αναφοράς του Σταμάτη, ο Γρηγόρης κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = \lambda c \hat{x}$, άρα διανύει απόσταση/μετατόπιση ίση με $\Delta x = \lambda c \Delta t \Rightarrow x - x_1 = \lambda c (t - t_1)$.

$$x = x_1 + \lambda(t - t_1) \Rightarrow \boxed{t(x) = t_1 + \frac{1}{\lambda}(x - x_1)}, \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (2.8),$$

όπου,

$$t_2 = t_1 + \frac{sT}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \quad (2.9), \quad x_2 = x_1 + \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} sT \quad (2.10).$$

Γ. Στάδια [3] και [4]: $\tau_2 \leq \tau < \tau_4$

Την χρονική στιγμή τ_2 ο Γρηγόρης αρχίζει να ελαττώνει την ταχύτητά του με την σταθερή χωρική επιβράδυνση $\vec{a} = -\alpha\hat{x}$. Η χωρική του ταχύτητα μηδενίζεται στιγμιαία λόγω συμμετρίας την χρονική στιγμή $\tau_3 = \tau_2 + T = (2 + s)T$, και στην συνέχεια ο Γρηγόρης κινείται με την ίδια επιτάχυνση προς την αρνητική διεύθυνση του άξονα $\hat{x}$, μέχρι να αποκτήσει ταχύτητα $-\lambda\hat{x}$, και πάλι λόγω συμμετρίας, την χρονική στιγμή $\tau_4 = \tau_3 + T = (3 + s)T$. Συνεπώς η κίνηση του Γρηγόρη μεταξύ των ιδιοχρόνων τ_2 και τ_4 , διαφορετικά τα στάδια [3] και [4], μπορούν να περιγραφούν από κοινές εξισώσεις κίνησης.

Οι αρχικές συνθήκες της επιβραδυνόμενης κίνησης στα ακίνητο σύστημα αναφοράς είναι τώρα οι

$$v(\tau_2) = \lambda \quad (2.11\alpha), \quad x(\tau_2) = x_2 \quad (2.11\beta), \quad t(\tau_2) = t_2 \quad (2.11\gamma).$$

Η δε συνάρτηση της χωρικής ταχύτητας με τον ιδιοχρόνο του Γρηγόρη, δίνεται μέσω της σχέσης (1.19α) ως

$$v(\tau) = \frac{e^{2(-\alpha\tau+\kappa)} - 1}{e^{2(-\alpha\tau+\kappa)} + 1} \quad (2.12)$$

και ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $v(\tau_2) = \lambda$, άρα

$$\frac{e^{2(-\alpha\tau_2+\kappa)} - 1}{e^{2(-\alpha\tau_2+\kappa)} + 1} = \lambda \Rightarrow e^{2(-\alpha\tau_2+\kappa)} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \Rightarrow 2(-\alpha\tau_2 + \kappa) = \ln\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) \Rightarrow \kappa = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) + \alpha\tau_2.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $\tau_2 = \tau_1 + sT = (1 + s)T$, οπότε η σταθερά κ λαμβάνει τελικά την τιμή

$$\kappa = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) + \frac{1+s}{2}\ln\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) \Rightarrow \kappa = \frac{s+2}{2}\ln\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) \quad (2.13).$$

Τώρα οι εξισώσεις κίνησης (1.19α), (1.20) και (1.21) του Γρηγόρη στο ακίνητο σύστημα αναφοράς της γης (του Σταμάτη δηλαδή), λαμβάνουν την μορφή

$$v(\tau) = \tanh(\alpha\tau + \kappa) \quad (2.14), \quad t(\tau) = t_2 + \frac{1}{\alpha} [\sinh(\alpha\tau + \kappa) - \sinh(\alpha\tau_2 + \kappa)] \quad (2.15),$$

$$x(\tau) = x_2 + \frac{1}{\alpha} [\cosh(\alpha\tau + \kappa) - \cosh(\alpha\tau_2 + \kappa)] \quad (2.16).$$

Τονίζεται ότι οι ποσότητες t_2 και x_2 προκύπτουν αν θέσουμε $\tau = \tau_2$ στις σχέσεις (2.6) και (2.7) αντίστοιχα.

Δ. Στάδιο [5]: $\tau_4 \leq \tau < \tau_5$

Στην συνέχεια ο Γρηγόρης κινείται με την σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = -\lambda\hat{x}$ (ή αποκαθιστώντας το σύμβολο της ταχύτητας του φωτός, $\vec{v} = -\lambda c\hat{x}$) για χρονικό διάστημα sT , μέχρι την χρονική στιγμή $\tau_5 = (2s + 3)T$. Τώρα σύμφωνα με τα αποτελέσματα (1.11) και (1.12), η χρονική και η χωρική συνιστώσα του Γρηγόρη στο σύστημα αναφοράς του Σταμάτη, λαμβάνουν την μορφή

$$\int_{t_4}^t dt = \gamma \int_{\tau_4}^{\tau} d\tau \Rightarrow t - t_4 = \frac{\tau - \tau_4}{\sqrt{1 - v^2}} \Rightarrow t(\tau) = t_4 + \frac{\tau - \tau_4}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \quad (2.17),$$

όπου η σταθερά t_4 προκύπτει αν στην σχέση (2.15) θέσουμε $\tau = \tau_4$, και

$$\int_{x_4}^x dx = \gamma v \int_{\tau_4}^{\tau} d\tau \Rightarrow x - x_4 = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} (\tau - \tau_4) \Rightarrow x(\tau) = x_4 - \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} (\tau - \tau_4) \quad (2.18),$$

όπου η σταθερά x_4 προκύπτει αν στην σχέση (2.16) θέσουμε $\tau = \tau_4$.

Ε. Στάδιο[6]: $\tau_5 \leq \tau < \tau_6$

Την χρονική στιγμή τ_5 ο Γρηγόρης αρχίζει να ελαττώνει την ταχύτητά $\vec{v} = -\lambda c\hat{x}$ του με την σταθερή επιβράδυνση $\vec{a} = +\alpha\hat{x}$, για χρονικό διάστημα T , άρα μέχρι την χρονική στιγμή $\tau_6 = (2s + 4)T$, όπου και πάλι λόγω συμμετρίας αναμένεται η ταχύτητα του Γρηγόρη να μηδενιστεί. Οι αρχικές συνθήκες της επιβραδυνόμενης κίνησης στα ακίνητο σύστημα αναφοράς είναι τώρα οι

$$v(\tau_5) = -\lambda \quad (2.19\alpha), \quad x(\tau_5) = x_5 \quad (2.19\beta), \quad t(\tau_5) = t_5 \quad (2.19\gamma),$$

όπου οι τιμές των x_5 και t_5 προκύπτουν αν θέσουμε $\tau = \tau_5$ στις συναρτήσεις (2.17) και (2.18) αντίστοιχα.

Έπεται ότι η συνάρτηση της χωρικής ταχύτητας του Γρηγόρη με τον ιδιοχρόνο του, δίνεται μέσω της σχέσης (1.19α) και ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $v(\tau_5) = -\lambda$. Συνεπώς ισχύει ότι

$$\frac{e^{2(\alpha\tau_5 + \kappa)} - 1}{e^{2(\alpha\tau_5 + \kappa)} + 1} = -\lambda \Rightarrow e^{2(\alpha\tau_5 + \kappa)} = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \Rightarrow 2(\alpha\tau_5 + \kappa) = \ln\left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\right) \Rightarrow \kappa = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\right) - \alpha\tau_5.$$

Αλλά $\tau_5 = (2s + 3)T$, οπότε

$$\kappa = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\right) + \frac{2s + 3}{2} \ln\left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\right) = \frac{2s + 4}{2} \ln\left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\right) = (s + 2) \ln\left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}\right) \quad (2.20).$$

Βάσει των παραπάνω, οι εξισώσεις κίνησης (1.19α), (1.20) και (1.21) του Γρηγόρη στο ακίνητο σύστημα αναφοράς της γης (του Σταμάτη), λαμβάνουν την μορφή

$$v(\tau) = \tanh(\alpha\tau + \kappa) \quad (2.21), \quad t(\tau) = t_5 + \frac{1}{\alpha} [\sinh(\alpha\tau + \kappa) - \sinh(\alpha\tau_5 + \kappa)] \quad (2.22),$$

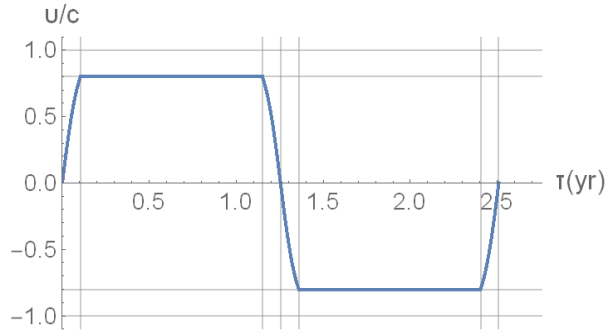
$$x(\tau) = x_5 + \frac{1}{\alpha} [\cosh(\alpha\tau + \kappa) - \cosh(\alpha\tau_5 + \kappa)] \quad (2.23).$$

Οι σταθερές t_5 και x_5 προκύπτουν αν θέσουμε $\tau = \tau_5$ στις σχέσεις (2.17) και (2.18) αντίστοιχα.

3. Αριθμητική εφαρμογή στο «παράδοξο»

Ως μία εφαρμογή των παραπάνω, έστω ότι ο κινούμενος δίδυμος Γρηγόρης ξεκινά με μηδενική αρχική ταχύτητα από την επιφάνεια της γης και επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha = 10g$ κατά μήκος του άξονα $\hat{e}^0 \equiv \hat{x}$ στο σύστημα αναφοράς του ακίνητου Σταμάτη.

Τότε σύμφωνα με το αποτέλεσμα (2.3), σε χρόνο $\tau_1 = 0.104\text{yr}$ (όπου yr η χρονική διάρκεια ενός έτους ή $\text{yr} = 3.1536 \cdot 10^7 \text{sec}$) σύμφωνα με το ρολόι του Σταμάτη, η ταχύτητά του γίνεται ίση με $v = 0.8c$ ($\lambda = 0.8$). Στην συνέχεια ο Σταμάτης κινείται με την σταθερή αυτήν ταχύτητα για χρονικό διάστημα $s\tau_1 = 1.04\text{yr}$ ($s = 10$), μέχρι την χρονική στιγμή $\tau_2 = 1.150\text{yr}$.



Σχήμα 4

Μεταβολή της ταχύτητας του Γρηγόρη (μετρημένη στο σύστημα αναφοράς του Σταμάτη), συνάρτησής του ιδιοχρόνου του Γρηγόρη, για το ταξίδι με τ' επιστροφής στην γη.

Την χρονική στιγμή τ_2 ο Σταμάτης αρχίζει να επιβραδύνεται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha = 10g$, έως ότου η ταχύτητα αναστραφεί στην τιμή $v = -0.8c$, την χρονική στιγμή $\tau_4 = 1.359\text{yr}$. Εν συνεχεία ο Σταμάτης επιστρέφει με σταθερή ταχύτητα προς την γη για χρονικό διάστημα $s\tau_1 = 1.04\text{yr}$, έως την χρονική στιγμή $\tau_5 = 2.404\text{yr}$. Τέλος ο Σταμάτης επιβραδύνεται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου $\alpha = 10g$, μέχρι να σταματήσει στην γη, την χρονική στιγμή που ο ίδιος καταγράφει ως $\tau_6 = 2.508\text{yr}$.

Η συνάρτηση της ταχύτητας v του Γρηγόρη με τον ιδιόχρονο τ του Γρηγόρη (δες σχήμα 4), καθώς και της χρονικής συνιστώσας t του ακίνητου διδύμου Σταμάτη ως προς τον ιδιόχρονο τ του Γρηγόρη (δες σχήμα 5), δίνονται παρακάτω από τις σχέσεις,

$$v(\tau) = \begin{cases} c \tanh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right), & 0 \leq \tau < \tau_1 \\ +\lambda c, & \tau_1 \leq \tau < \tau_2 \\ c \tanh\left(\frac{\alpha}{c}\tau + \kappa_1\right), & \tau_2 \leq \tau < \tau_4 \\ -\lambda c, & \tau_4 \leq \tau < \tau_5 \\ c \tanh\left(\frac{\alpha}{c}\tau + \kappa_2\right), & \tau_5 \leq \tau < \tau_6 \end{cases} \quad (3.1)$$

και

$$t(\tau) = \begin{cases} \frac{c}{a} \sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau\right), & 0 \leq \tau < \tau_1 \\ t(\tau_1) + \frac{\tau - \tau_1}{\sqrt{1 - \lambda^2}}, & \tau_1 \leq \tau < \tau_2 \\ t(\tau_2) + \frac{c}{a} \left[\sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau + \kappa_1\right) - \sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau_2 + \kappa_1\right) \right], & \tau_2 \leq \tau < \tau_4 \\ t(\tau_4) + \frac{\tau - \tau_4}{\sqrt{1 - \lambda^2}}, & \tau_4 \leq \tau < \tau_5 \\ t(\tau_5) + \frac{c}{a} \left[\sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau + \kappa_2\right) - \sinh\left(\frac{\alpha}{c}\tau_5 + \kappa_2\right) \right], & \tau_5 \leq \tau < \tau_6 \end{cases} \quad (3.2),$$

όπου οι σταθερές κ_1 και κ_2 είναι ίσες με

$$\kappa_1 = \frac{s+2}{2} \ln\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) \quad (3.3\alpha), \quad \kappa_2 = (s+2) \ln\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) \quad (3.3\beta).$$

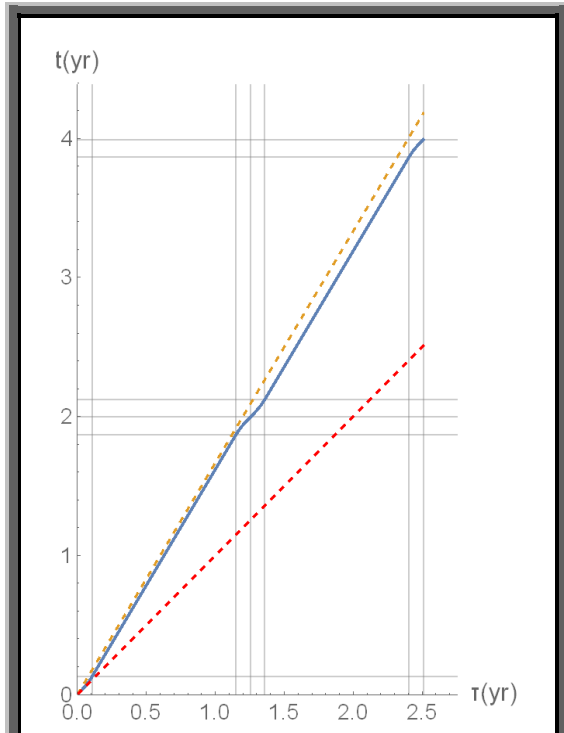
Αρχικά θα σχεδιάσουμε την εξάρτηση της χρονικής συνιστώσας t από τον ιδιοχρόνο τ στο ΣΣΣΑ του Γρηγόρη, μέσω του αποτελέσματος (3.2). Το αντίστοιχο γράφημα δίνεται στο σχήμα 5 με την μπλε γραμμή.

Παρατηρούμε ότι ο συνολικός χρόνος κίνησης όπως καταγράφεται στο ακίνητο σύστημα αναφοράς της γης, ισούται με $t_6 = 3.99\text{yr}$ (όπου yr η χρονική διάρκεια ενός έτους ή $\text{yr} = 3.1536 \cdot 10^7 \text{sec}$) όταν στα ΣΣΣΑ του Γρηγόρη ο συνολικός χρόνος κίνησης καταγράφεται στην τιμή $\tau_6 = 2.51\text{yr}$. Παρατηρούμε δηλαδή ότι στο κινούμενο σύστημα αναφοράς υφίσταται μία διαστολή χρόνου, υπό την έννοια ότι τα ρολόγια στο ΣΣΣΑ χτυπούν πιο αργά, οπότε καταγράφεται και μικρότερος χρόνος ταξιδιού.

Η χρονική αυτήν διαστολή επηρεάζεται στο συγκεκριμένο παράδειγμα πολύ λίγο από τα επιταχυνόμενα στάδια της κίνησης του Γρηγόρη (υπενθυμίζεται ότι διαρκούν στο 1/10 του χρόνου των σταδίων με την ομαλή κίνηση). Πράγματι, αν υποθέταμε ότι η κίνηση του Γρηγόρη πραγματοποιούνταν με την σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = +0.8c\hat{x}$ σε όλη την διάρκειά της, τότε θα υπολογίζαμε διαστολή χρόνου σύμφωνα με την γνωστή σχέση,

$$t' = \gamma\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = \frac{5}{3}\tau \approx 1.66\tau. \quad (3.4).$$

Το γράφημα της τελευταίας σχέσης απεικονίζεται στο σχήμα 5 με την πορτοκαλί διακεκομμένη γραμμή και θα έδινε συνολικό χρόνο κίνησης του Γρηγόρη στο ακίνητο σύστημα αναφοράς της γης, ίσο με $t'_6 = \frac{5}{3}\tau_6 \approx 4.180\text{yr}$, έναντι της τιμής $t_6 = 3.99\text{yr}$ που υπολογίσαμε πριν (δηλαδή μια διαφορά της τάξεως του 4.76%).



Σχήμα 5

Εξάρτηση της χρονικής συντεταγμένης στο ακίνητο σύστημα αναφοράς του Σταμάτη με τον ιδιοχρόνο στο ΣΣΣΑ του Γρηγόρη.

Η πορτοκαλί διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην υποθετική περίπτωση όπου ο Γρηγόρης κινούταν συνεχώς με την σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = +0.8c\hat{x}$ και η κόκκινη διακεκομμένη γραμμή σε κίνηση με την ταχύτητα του φωτός.

Αν δε αυξάναμε αυθαίρετα την τιμή του μέτρου της επιτάχυνσης καθώς και το χρονικό διάστημα της ομαλής κίνησης (δηλαδή την παράμετρο s), τα χρονικά διαστήματα των επιταχυνόμενων σταδίων στο ακίνητο σύστημα αναφοράς θα ελαττώνονταν συγκριτικά σε αυθαίρετα μικρές τιμές, οπότε η διαφορά στην διαστολή χρόνου θα μπορούσε πρακτικά να εκμηδενιστεί.

Πριν προχωρήσουμε να τονίσουμε ότι το «Παράδοξο των Διδύμων» εδράζεται σε αυτό ακριβώς το σημείο: Η παρατηρούμενη διαφορά στα ρολόγια της γης και του Γρηγόρη οφείλεται πρακτικά στα στάδια της κίνησης με σταθερή ταχύτητα (σχήμα 5), εφ' όσον τα επιταχυνόμενα στάδια της κίνησης μπορούν να συρρικνωθούν σε αυθαίρετα μικρές τιμές, με αποτέλεσμα να μην επηρεάζουν καθόλου στην μετρούμενη διαστολή χρόνου. Συνεπώς ο κινούμενος δίδυμος μπορεί να ισχυριστεί ότι είναι πρακτικά αδρανειακός και ακίνητος, ενώ ο ακίνητος στην γη αδελφός του κινείται απομακρυνόμενος από αυτόν. Τότε όμως κατά την άποψή του θα πρέπει να καταγράφεται διαστολή χρόνου στα ρολόγια της γης! Όταν λοιπόν τελειώσει το ταξίδι και οι δύο αδελφοί συναντηθούν, ποιος από τους δύο διδύμους θα έχει μεγαλώσει περισσότερο; Διαφορετικά ποια από τις δύο διαστολές χρόνου θα ισχύει, εφ' όσον τώρα οι καταγεγραμμένοι χρόνοι τους μπορούν να συγκριθούν και προφανώς μόνο η μία από τις δύο εκδοχές θα είναι η σωστή;

Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα θα δοθεί πιο κάτω. Για την ώρα ας σχεδιάσουμε στο σχήμα 6 την κοσμική γραμμή του Γρηγόρη στο σύστημα αναφοράς του Σταμάτη, όπως αυτήν προκύπτει από τις παραμετρικές εξισώσεις κίνησης (3.2) για την χρονική και (3.5) για την χωρική συνισταμένη, όπου

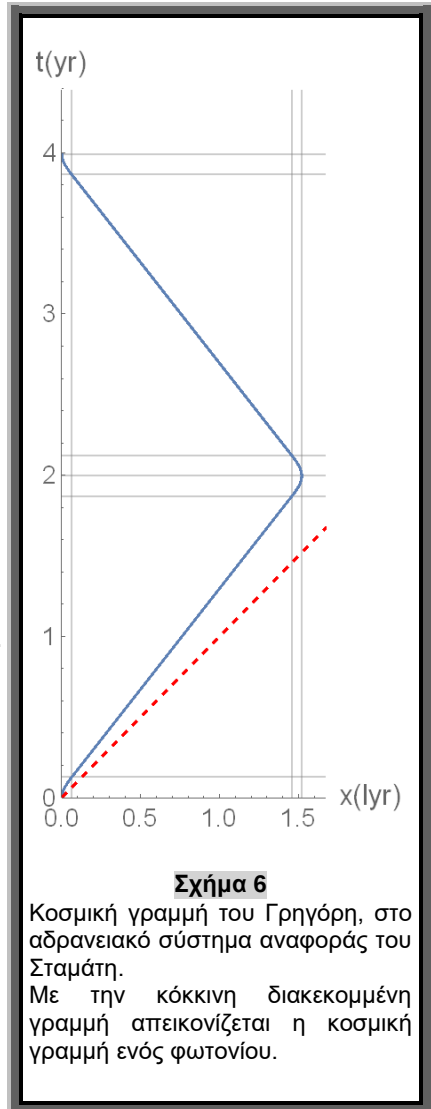
$$x(\tau) = \begin{cases} \frac{c}{a} \left[\cosh\left(\frac{a}{c}\tau\right) - 1 \right], & 0 \leq \tau < \tau_1 \\ x(\tau_1) + \frac{\lambda c}{\sqrt{1-\lambda^2}}(\tau - \tau_1), & \tau_1 \leq \tau < \tau_2 \\ x(\tau_2) + \frac{c^2}{a} \left[\cosh\left(\frac{a}{c}\tau + \kappa_1\right) - \cosh\left(\frac{a}{c}\tau_2 + \kappa_1\right) \right], & \tau_2 \leq \tau < \tau_4 \\ x(\tau_4) - \frac{\lambda c}{\sqrt{1-\lambda^2}}(\tau - \tau_4), & \tau_4 \leq \tau < \tau_5 \\ x(\tau_5) + \frac{c^2}{a} \left[\cosh\left(\frac{a}{c}\tau + \kappa_2\right) - \cosh\left(\frac{a}{c}\tau_5 + \kappa_2\right) \right], & \tau_5 \leq \tau < \tau_6 \end{cases} \quad (3.5).$$

Παρατηρούμε ότι στο ακίνητο αδρανειακό, σύστημα αναφοράς της γης, ο Γρηγόρης απομακρύνεται αρχικά σε απόσταση $x_3 = 1.5 \text{lyr}$ (όπου $\text{lyr} = 9.4605284 \cdot 10^{15} \text{m}$) έως την χρονική στιγμή $t_3 \approx 1.995 \text{yr}$. Στην συνέχεια η Γρηγόρης επιστρέφει προς την γη αναστρέφοντας την ταχύτητά του, την χρονική στιγμή $t_6 = 3.99 \text{yr}$.

Στο σημείο αυτό αξίζει να τονιστούν τα εξής:

Η Σταμάτης όντας συνεχώς ακίνητος, είναι σε όλη την διάρκεια του φαινομένου ένας αδρανειακός παρατηρητής.

Ο Γρηγόρης από την άλλη, ακόμη και αν αγνοήσουμε τα επιταχυνόμενα στάδια της κίνησής του, είναι ένας αδρανειακός παρατηρητής αυστηρά και μόνον στα χρονικά διαστήματα $0 \leq \tau < \tau_2$ και $\tau_4 \leq \tau < \tau_5$, αλλά δεν είναι αδρανειακός παρατηρητής στο συνολικό διάστημα $0 \leq \tau < \tau_5$.



Για να είμαστε δε συνεπείς ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz, ο Γρηγόρης του σταδίου που απομακρύνεται από την γη ($0 \leq \tau < \tau_3$) δεν είναι καν ο ίδιος παρατηρητής (δηλαδή το ίδιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς) με τον Γρηγόρη του σταδίου που προσεγγίζει την γη ($\tau_3 \leq \tau < \tau_6$).

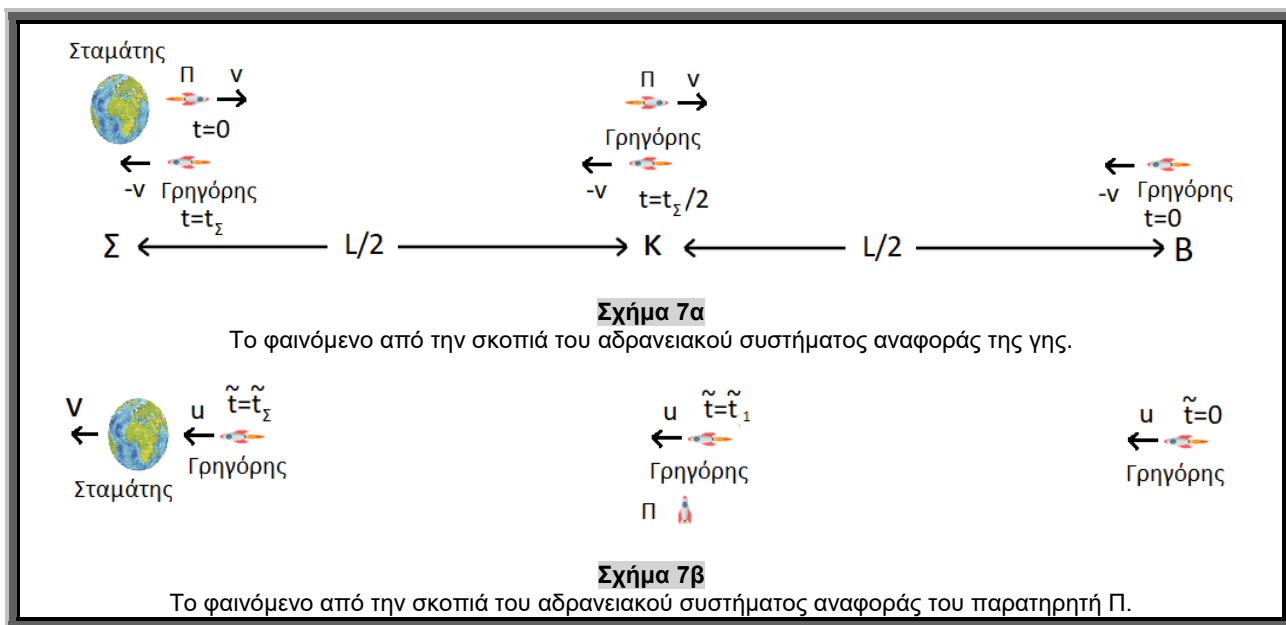
Να τονιστεί επίσης ότι οι μετασχηματισμοί Lorentz (1.3) της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας, μπορούν να εφαρμοστούν μόνον μεταξύ δυο αδρανειακών συστημάτων αναφοράς. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε τους μετασχηματισμούς σωστά, είτε μεταξύ των συστημάτων του Γρηγόρη και του απομακρυνόμενου από την γη Σταμάτη, είτε μεταξύ του Γρηγόρη και του προσεγγίζοντος την γη Σταμάτη, είτε, τέλος, μεταξύ του απομακρυνόμενου και του προσεγγίζοντος την γη Γρηγόρη..

Η τελευταία αυτήν παρατήρηση αποκτά κομβική σημασία, αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τα κοσμικά διαγράμματα της κίνησης από την σκοπιά του Γρηγόρη, για να απαντήσουμε στο «παράδοξο». Η αλλαγή του συστήματος αναφοράς του Γρηγόρη στο σημείο στροφής την χρονική στιγμή τ_3 , από ένα αδρανειακό σύστημα το οποίο απομακρύνεται από την γη με σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = +0.8c\hat{x}$, σε ένα νέο αδρανειακό σύστημα το οποίο πλησιάζει την γη με σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = -0.8c\hat{x}$, καθιστά αδύνατη την μελέτη της συνολικής κίνησης από την σκοπιά ενός συνολικά αδρανειακού συστήματος αναφοράς που να ανήκει στον ίδιο.

Συνεπώς η συμμετρία της κίνησης σπάει για τους δύο διδύμους και το «παράδοξο» αίρεται, γιατί σύμφωνα με την ΕΘΣ ο σωστός υπολογισμός μπορεί να γίνει μόνον από την σκοπιά του ακίνητου αδρανειακού παρατηρητή στην γη.

Φυσικά θα μπορούσαμε να μελετήσουμε την κίνηση και από την σκοπιά, είτε του αδρανειακού συστήματος αναφοράς του απομακρυνόμενου της γης Γρηγόρη ($0 \leq \tau < \tau_3$), είτε από την σκοπιά του προσεγγίζοντος την γη Γρηγόρη ($\tau_3 \leq \tau < \tau_6$). Για τον λόγο αυτό στην επόμενη παράγραφο θα μελετήσουμε μία παραλλαγή του παραδόξου, στην οποία δεν θα υφίστανται τα επιταχυνόμενα στάδια της κίνησης του Γρηγόρη.

4. Το «παράδοξο» των διδύμων, χωρίς επιταχυνόμενα στάδια



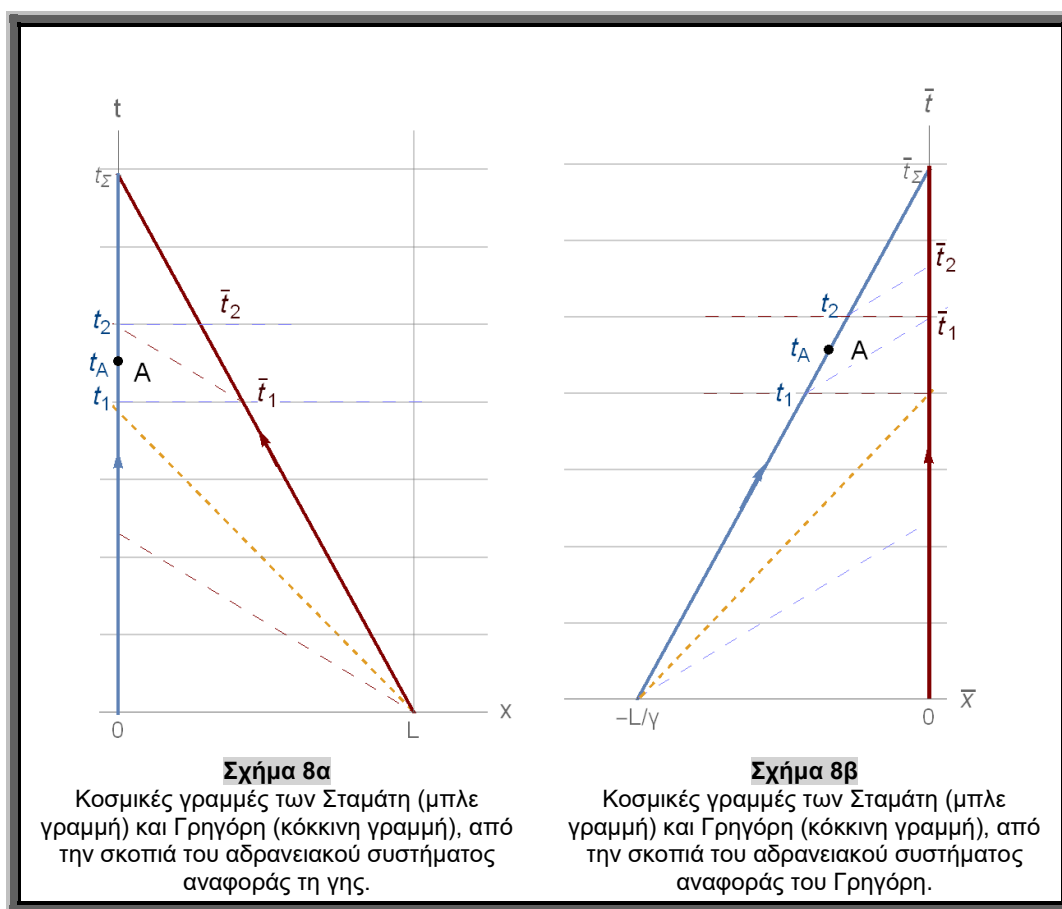
Όπως ήδη αναφέρθηκε, εάν θελήσουμε να μελετήσουμε το παράδοξο από την σκοπιά του συστήματος αναφοράς του Γρηγόρη στα πλαίσια της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, βρισκόμαστε μπροστά στο εξής πρόβλημα: ο Γρηγόρης δεν είναι αδρανειακός παρατηρητής στα στάδια της κίνησής του όπου επιταχύνεται. Μία σκέψη για να παρακάμψουμε αυτό το πρόβλημα, θα ήταν να θεωρήσουμε το χρονικό διάστημα των σταδίων αυτών αμελητέο, να θεωρήσουμε δηλαδή ότι ο Γρηγόρης επιταχύνεται ακαριαία από μηδέν στην ταχύτητα v και αντίστροφα. Αλλά τότε πρέπει να προσέξουμε το ότι το σύστημα αναφοράς του Γρηγόρη που απομακρύνεται από την γη, είναι διαφορετικό από το σύστημα αναφοράς του Γρηγόρη που πλησιάζει την γη. Συνεπώς τώρα θα πρέπει να μελετήσουμε το φαινόμενο συναρτήσει τριών αδρανειακών παρατηρητών (δες σχήματα 7α,β).

Συγκεκριμένα θεωρούμε κατά σειρά τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς:

- Αρχικά το σύστημα αναφοράς της γης (ή του Σταμάτη) $O(t, x)$.
- Στην συνέχεια το σύστημα αναφοράς του Γρηγόρη $\bar{O}(\bar{t}, \bar{x})$, ο οποίος βρίσκεται σε απόσταση L μακριά από την Γη, στο σημείο Β του σχήματος 7α, και την χρονική στιγμή μηδέν σύμφωνα με τα ρολόγια όλων των παρατηρητών αρχίζει να κινείται προς την Γη ευθύγραμμα και ομαλά, με χωρική ταχύτητα $\vec{v}_{r\rho} = -v\hat{x} = -\lambda c\hat{x}$.
- Τέλος, το σύστημα αναφοράς του παρατηρητή Π $\bar{O}(\bar{t}, \bar{x})$, ο οποίος την χρονική στιγμή μηδέν σύμφωνα με τα ρολόγια όλων των παρατηρητών, ξεκινά από την γη να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά προς τον Γρηγόρη, με χωρική ταχύτητα $\vec{v}_\Pi = +v\hat{x} = +\lambda c\hat{x}$.

α) Η έννοια του «ταυτόχρονου» στα συστήματα αναφοράς των Σταμάτη και Γρηγόρη

Η κατάσταση από την σκοπιά του συστήματος αναφοράς της γης περιγράφεται στο σχήμα 7α. Από την μελέτη των προηγούμενων παραγράφων είναι προφανές ότι η διαστολή χρόνου στο ρολόι του Γρηγόρη εν συγκρίσει με το ρολόι του Σταμάτη ισούται με



$$t_{\Sigma\tau} = \gamma \bar{t}_{\Gamma\rho}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \quad (4.1).$$

Φυσικά ο Γρηγόρης μπορεί να ισχυριστεί ακριβώς το αντίστροφο: στο δικό του αδρανειακό σύστημα αναφοράς ο ίδιος είναι ακίνητος ενώ η γη απομακρύνεται από αυτόν, οπότε η διαστολή χρόνου παρατηρείται στο ρολόι Σταμάτη και όχι στο δικό του. **Ο ισχυρισμός αυτός δεν παραβιάζει κανένα από τα αξιώματα της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, όσο κανείς από τους δύο εμπλεκόμενους παρατηρητές δεν επιβραδύνει ώστε να συναντηθούν για να συγκρίνουν τα ρολόγια τους.** Ο λόγος για τον οποίο δεν παραβιάζεται η ειδική σχετικότητα, γίνεται εμφανής στα σχήματα 8α,β, όπου απεικονίζονται τα κοσμικά διαγράμματα του Σταμάτη και του Γρηγόρη στα συστήματα αναφοράς της γης και του Γρηγόρη αντίστοιχα. Στα διαγράμματα έχουν σχεδιαστεί επίσης οι γραμμές των ταυτόχρονων γεγονότων για τον κινούμενο παρατηρητή σε κάθε σύστημα αναφοράς, με τις διακεκομμένες κόκκινες και μπλε γραμμές.

Αρχικά στο διάγραμμα 8α, ο Σταμάτης θεωρεί ότι το σύστημα αναφοράς του είναι ακίνητο και ότι ο Γρηγόρης τον πλησιάζει από απόσταση $x = L$ με ταχύτητα $-\lambda c\hat{x}$, άρα η κοσμική γραμμή του Γρηγόρη (με το κόκκινο χρώμα) τέμνει την διεύθυνση του χρονικού άξονα t υπό γωνία $\tan(\theta) = -\lambda$, ($c = 1$). Παρατηρείστε ότι η χρονική στιγμή t_1 στο σύστημα αναφοράς της γης, είναι σύγχρονη με την χρονική στιγμή $\bar{t}_1$ στο σύστημα αναφοράς του Γρηγόρη. Αλλά στο κινούμενο σύστημα αναφοράς του Γρηγόρη, η χρονική στιγμή $\bar{t}_1$ είναι σύγχρονη με την χρονική στιγμή $t_2 > t_1$ στο σύστημα αναφοράς της γης. Συνεπώς τα σύγχρονα για τον Γρηγόρη γεγονότα $\bar{t}_1$ και t_2 , διαφέρουν χρονικά κατά $\Delta t = t_2 - t_1$ στο σύστημα αναφοράς της γης. **Αυτό σημαίνει ότι κάθε γεγονός A στο διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ του Σταμάτη (της γης δηλαδή) συμβαίνει μετά την χρονική στιγμή t_1 , εφ' όσον το γεγονός A βρίσκεται πάνω από την**

διακεκομμένη μπλε γραμμή ισόχρονων γεγονότων του t_1 για τα γήινα ρολόγια (ήτοι $t_A > t_1$), αλλά πριν την χρονική $\bar{t}_1$ για τα ρολόγια του Γρηγόρη, εφ' όσον το γεγονός Α βρίσκεται κάτω από την κόκκινη διακεκομμένη γραμμή των ισόχρονων γεγονότων $\bar{t}_1$ για τα ρολόγια του Γρηγόρη (ήτοι $t_A < \bar{t}_1$).

Αναλόγως στο διάγραμμα 8β, ο Γρηγόρης θεωρεί εαυτόν ακίνητο και ότι η γη κινείται ως προς αυτόν με ταχύτητα $+λc\hat{x}$. Συνεπώς η κοσμική γραμμή του Σταμάτη (με το μπλε χρώμα) τέμνει την διεύθυνση του χρονικού άξονα $\bar{t}$ υπό γωνία $\tan(\theta) = +λ$, ($c = 1$). Τώρα παρατηρούμε ότι η χρονική στιγμή $\bar{t}_1$ στο σύστημα αναφοράς του Γρηγόρη, είναι σύγχρονη με την χρονική στιγμή t_2 στο σύστημα αναφοράς της γης. Αλλά στο κινούμενο σύστημα αναφοράς της γης η χρονική στιγμή t_2 είναι σύγχρονη με την χρονική στιγμή $\bar{t}_2 > \bar{t}_1$ στο σύστημα αναφοράς του Γρηγόρη. Συνεπώς τα σύγχρονα για την γη (δηλαδή τον Σταμάτη) γεγονότα t_2 και $\bar{t}_2$, διαφέρουν χρονικά κατά $\Delta\bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1$ στο σύστημα αναφοράς του Γρηγόρη. Όπως και πριν, κάθε γεγονός Α στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ της γης, συμβαίνει για τον Γρηγόρη πριν την χρονική στιγμή $\bar{t}_1$ γιατί βρίσκεται κάτω από την ισόχρονη γραμμή γεγονότων του η οποία διέρχεται από το $\bar{t}_1$ (ήτοι $t_A < \bar{t}_1$), αλλά ταυτόχρονα το γεγονός Α συμβαίνει για τον Σταμάτη μετά την χρονική στιγμή t_1 γιατί βρίσκεται πάνω από την μπλε διακεκομμένη ισόχρονη γραμμή της γης η οποία διέρχεται από το t_1 (ήτοι $t_A > t_1$).

Γίνεται προφανές από την παραπάνω ανάλυση ότι και οι δύο παρατηρητές μπορούν να ισχυρίζονται ταυτόχρονα ότι η διαστολή χρόνου συμβαίνει στα ρολόγια του άλλου, χωρίς να προκύπτει καμία παραδοξότητα, εφ' όσον έχουν διαφορετική αντίληψη περί ταυτόχρονων γεγονότων, σε πλήρη συμφωνία με τα αξιώματα της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Άρα σε κανέναν δεν φαντάζει παράδοξο το ότι το παρελθόν του ενός μπορεί να είναι το μέλλον του άλλου.

Επίσης τονίζεται ότι και οι δύο παρατηρητές συμφωνούν ως προς τα προφανή, δηλαδή στο ότι το γεγονός Α των σχημάτων 8α,β ανήκει το παρελθόν της χρονικής στιγμής $\bar{t}_1$ για τον Γρηγόρη και στο μέλλον της χρονικής στιγμής t_1 για τον Σταμάτη. Η ΕΘΣ είναι εξάλλου μία αιτιοκρατική θεωρία!

β) Το γεγονός της συνάντησης σύμφωνα με τους παρατηρητές Σταμάτη και Π

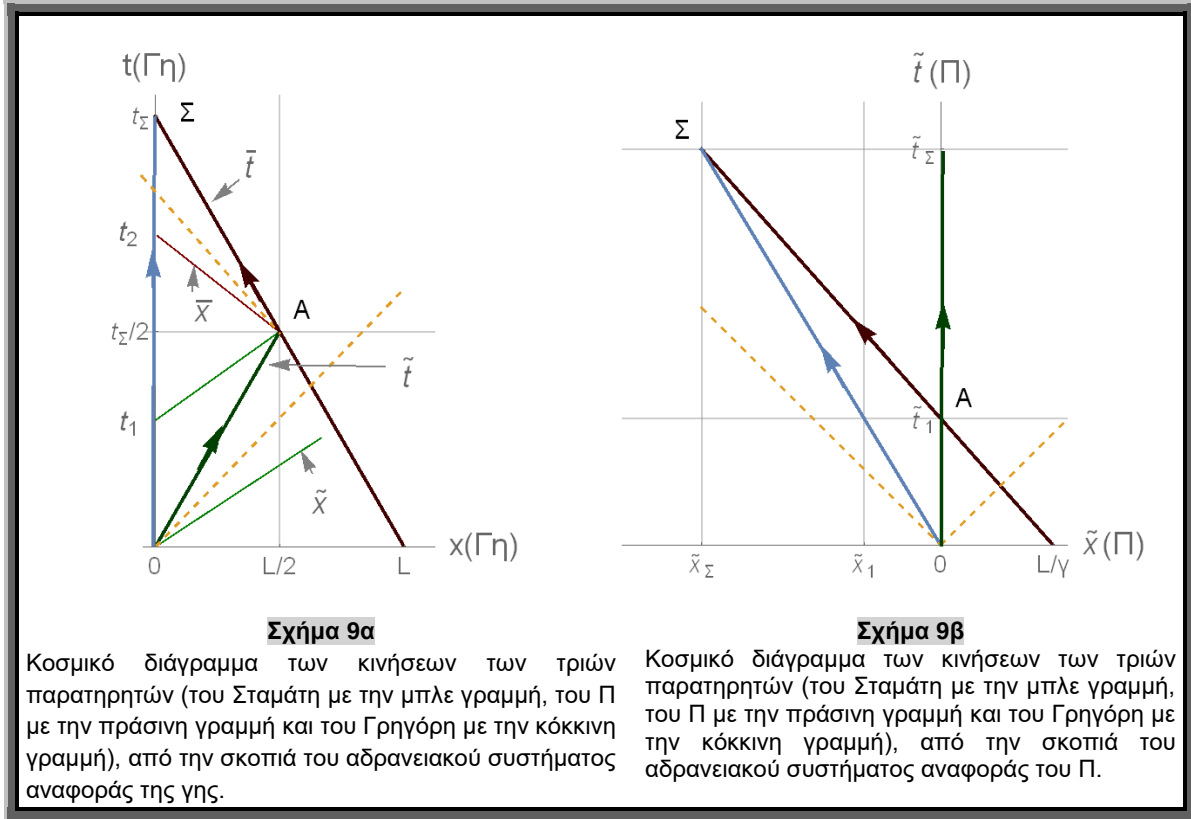
Ας έρθουμε στην συνέχεια στον τρίτο παρατηρητή. Από την σκοπιά του Π, η όλη κατάσταση αποτυπώνεται στο σχήμα 7β. Συγκεκριμένα ο Π ως ένας επίσης αδρανειακός παρατηρητής, έχει κάθε δικαίωμα να θεωρεί εαυτόν ακίνητο και ότι στο σύστημα αναφοράς του η μεν γη (δηλαδή ο Σταμάτης), απομακρύνεται από αυτόν με ταχύτητα $\vec{v}_{\gamma\eta} = -λc\hat{x}$, ο δε Γρηγόρης πλησιάζει τον ίδιο με ταχύτητα, η οποία σύμφωνα με το νόμο σύνθεσης των ταχυτήτων (1.7) της ΕΘΣ, ισούται με

$$u = \frac{v_{\Gamma\rho} + v_{\Pi}}{1 + \frac{v_{\Gamma\rho}v_{\Pi}}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2λc}{1 + λ^2} \quad (4.2).$$

Τα κοσμικά διαγράμματα των τριών παρατηρητών στο σύστημα αναφοράς της γης και στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή Π, απεικονίζονται στα σχήματα 9α και 9β αντίστοιχα.

Στο σύστημα αναφοράς του ακίνητου στην γη Σταμάτη, η κοσμική γραμμή του παρατηρητή Π (η γραμμή με το πράσινο χρώμα στο σχήμα 9α) τέμνει τον χρονικό άξονα υπό γωνία θ , όπου ($c = 1$),

$$\tan(\theta) = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{|v_{\Pi}|} = \frac{1}{λ} \quad (4.3).$$



Αναλόγως η κοσμική γραμμή του Γρηγόρη (με το κόκκινο χρώμα) εκκινεί από το σημείο $x = L$ και τέμνει την διεύθυνση του χρονικού άξονα ($c = 1$) υπό γωνία, $-\theta$.

Ο Γρηγόρης φτάνει στην γη (γεγονός Σ) μετά από χρόνο ο οποίος σύμφωνα με το ρολόι του Σταμάτη ισούται με

$$t_{\Sigma} = \frac{L}{v} = \frac{L}{\lambda c} \quad (4.4).$$

Στο ενδιάμεσο ο Παρατηρητής Π συναντά τον Γρηγόρη σε απόσταση $L/2$ από την γη στην χρονική στιγμή $t_{\Sigma}/2$ για τα γήινα ρολόγια. Στο σημείο συνάντησης τα ρολόγια και του Π και του Γρηγόρη είναι συγχρονισμένα για τον Σταμάτη, εφ' όσον κινούνται από συμμετρικές θέσεις με την ίδια κατά μέτρο σταθερή ταχύτητα και καταγράφουν χρόνο $t_{\Sigma}/2\gamma$, σύμφωνα με το αποτέλεσμα (1.11).

Στο διάγραμμα 9β αποτυπώνονται οι τρεις κοσμικές γραμμές από την σκοπιά του συστήματος αναφοράς του αδρανειακού παρατηρητή Π. Τώρα ο Γρηγόρης πλησιάζει τον Σταμάτη με ταχύτητα μέτρου u , σύμφωνα με την σχέση (4.2), άρα η κοσμική του γραμμή (με το κόκκινο χρώμα) τέμνει την διεύθυνση του χρονικού άξονα $\tilde{t}$ υπό γωνία $-\varphi$, όπου

$$\tan(\varphi) = \frac{\Delta \tilde{t}}{\Delta \tilde{x}} = -\frac{1}{|\vec{v}_{\Gamma\rho}|} - \frac{1}{u} = -\frac{1 + \lambda^2}{2\lambda} \quad (4.5).$$

Η δε κοσμική γραμμή της γης τέμνει την διεύθυνση του χρονικού άξονα $\tilde{t}$ υπό γωνία $-\theta$ και αποτυπώνεται με το μπλε χρώμα στο διάγραμμα 9β.

Αρχικά ο Γρηγόρης με την κόκκινη κοσμική γραμμή, ξεκινά να πλησιάζει τον Π με ταχύτητα μέτρου u , από απόσταση η οποία λόγω συστολής μήκους για τον Π (μην ξεχνάμε ότι Π είναι μεν αδρανειακός παρατηρητής αλλά κινείται με ταχύτητα μέτρου v) ισούται με L/γ . Ταυτόχρονα για τον Π, ο Σταμάτης (δηλαδή η γη) με την μπλε κοσμική γραμμή, ξεκινά να απομακρύνεται με ταχύτητα μέτρου $v < u$. Οι δύο κινούμενοι παρατηρητές στο σύστημα αναφοράς του Π, θα συναντηθούν την χρονική στιγμή $\tilde{t}_\Sigma$ στην θέση $\tilde{x}_\Sigma$, όπου σύμφωνα με το διάγραμμα 9β,

$$\frac{L}{\gamma} + \tilde{x}_\Sigma = u\tilde{t}_\Sigma \Rightarrow \frac{L}{\gamma} + v\tilde{t}_\Sigma = u\tilde{t}_\Sigma \Rightarrow \tilde{t}_\Sigma = \frac{L/\gamma}{u-v} \quad (4.6).$$

Προφανώς η χωρική συντεταγμένη στο σημείο συνάντησης των δύο διδύμων, Γρηγόρη και Σταμάτη, ισούται με

$$\tilde{x}_\Sigma = -v\tilde{t}_\Sigma = -\frac{v}{u-v} \frac{L}{\gamma} \quad (4.7).$$

Από την σκοπιά του Π, το ρολόι της γης στο σημείο συνάντησης (γεγονός Σ) έχει ένδειξη τ_Σ , όπου λόγω διαστολής χρόνου (θυμηθείτε ότι η γη κινείται για τον Π με ταχύτητα $-v$),

$$\tau_\Sigma = \gamma\tilde{t}_\Sigma = \frac{L}{u-v} \quad (4.8).$$

Συνδυάζοντας τώρα τα αποτελέσματα (4.6) και (4.8), συμπεραίνουμε ότι για τον παρατηρητή Π στο γεγονός της συνάντησης Σ, τα ρολόγια των Γρηγόρη και Σταμάτη παρουσιάζουν διαφορά στις καταγραφές τους, $\tilde{t}_\Sigma$ και τ_Σ αντίστοιχα, όπου

$$\frac{\tilde{t}_\Sigma}{\tau_\Sigma} = \frac{\frac{L/\gamma}{u-v}}{\frac{L}{u-v}} = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \boxed{\tau_\Sigma = \gamma\tilde{t}_\Sigma} \quad (4.9).$$

Συμπεπώς σύμφωνα με τα αποτελέσματα (4.1) και (4.9), για τον αδρανειακό παρατηρητή Π, στο σύστημα αναφοράς του, το ρολόι του Γρηγόρη εμφανίζει ως προς το ρολόι του Σταμάτη ακριβώς την ίδια διαστολή χρόνου, όπως αυτήν μετράται στο σύστημα αναφοράς της γης.

γ) Η άρση του «παράδοξου» μέσω της διαφορετικής αντίληψης του «ταυτόχρονου»

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε και απ' ευθείας μέσω του διαγράμματος του σχήματος 9α, δηλαδή από την σκοπιά του ακίνητου στην Γη, Σταμάτη. Στο σχήμα 9α με την αχνή πράσινη και την αχνή κόκκινη γραμμή απεικονίζονται τα συγχρονισμένα γεγονότα για τον παρατηρητή Π και για τον Γρηγόρη. Παρατηρούμε ότι στην γήινη χρονική στιγμή $t_\Sigma/2$ όπου το σύστημα αναφοράς του Γρηγόρη συναντάται με το σύστημα αναφοράς του Π (γεγονός Α στα σχήματα 9α), ο Π αντιλαμβάνεται ότι το ρολόι στην γη δείχνει

$$t_1 = \bar{t}_A = \frac{t_A}{\gamma} = \frac{L}{2\gamma v} \quad (4.10).$$

Άρα για τον Π το γεγονός Α συμβαίνει στο παρελθόν της χρονικής στιγμής $t_\Sigma/2$ της γης.

Επίσης στο γεγονός Α της συνάντησης ο Γρηγόρης αντιλαμβάνεται ότι το ρολόι της γης δείχνει

$$t_2 = \tilde{t}_A = t_\Sigma - t_1 \quad (4.11).$$

Άρα για τον Γρηγόρη το γεγονός Α συμβαίνει στο μέλλον της χρονικής στιγμής $t_\Sigma/2$ της γης.

Συνεπώς μεταξύ του Γρηγόρη και του Π, για το γεγονός Α υφίσταται μία χρονική διαφορά, η οποία στα ρολόγια της γης καταγράφεται ως

$$\Delta t_A = t_2 - t_1 = t_\Sigma - 2t_1 \quad (4.12).$$

Στην συνέχεια ο Γρηγόρης συνεχίζει το ταξίδι του και φτάνει στην γη σε χρόνο τον οποίο η γη καταγράφει, επίσης λόγω συμμετρίας, ως

$$t_\Sigma - t_2 = t_1 \quad (4.13).$$

Συνεπώς ο συνολικός χρόνος κίνησης σύμφωνα με τα ρολόγια στην γη ισούται (δες σχήμα 9α), με

$$t_1 + \Delta t_A + t_1 = t_1 + t_2 = t_\Sigma = \frac{L}{v} \quad (4.14).$$

Κατά τα γνωστά ο ίδιος ο Γρηγόρης αντιλαμβάνεται εαυτόν ακίνητο και ότι η γη κινείται ως προς τον ίδιο με ταχύτητα μέτρου v , από απόσταση η οποία λόγω συστολής μήκους ισούται με L/γ , άρα καταγράφει στο γεγονός της συνάντησης Σ ιδιοχρόνο

$$\tilde{t}_\Sigma = \frac{L}{\gamma v} \quad (4.15).$$

Αν τώρα θέλουμε στα πλαίσια της ΕΘΣ να μελετήσουμε το φαινόμενο της χρονικής διαστολής στο γεγονός Σ της συνάντησης από την σκοπιά του επιταχυνόμενου διδύμου, πρέπει να συνδυάσουμε τις μετρήσεις των αδρανειακών παρατηρητών Π και Γρηγόρη αυτής της ενότητας. Συγκρίνοντας λοιπόν τα αποτελέσματα (4.14) και (4.15) καταλήγουμε και πάλι στο συμπέρασμα ότι στα ρολόγια του Γρηγόρη παρατηρείται διαστολή χρόνου, σε σχέση με τα ρολόγια του Σταμάτη στην γη, εφ' όσον

$$t_\Sigma = \gamma \tilde{t}_\Sigma \quad (4.16).$$

5. Γενικά συμπεράσματα

Είναι γνωστό ότι η ΕΘΣ βασίζεται πάνω σε δύο αξιώματα,

- κατά πρώτον την σταθερότητα της ταχύτητας του φωτός στο κενό ως προς οποιονδήποτε παρατηρητή
- και κατά δεύτερον το ότι οι νόμοι της φύσης είναι πανομοιότυποι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Άμεση συνέπεια του πρώτου αξιώματος, της σταθερότητας δηλαδή της ταχύτητας του φωτός στο κενό, είναι ότι η αντίληψη περί ταυτόχρονων γεγονότων είναι διαφορετική ανάμεσα σε δύο αδρανειακούς παρατηρητές. Εφ' όσον ο χρόνος χάνει τον απόλυτο χαρακτήρα που έχει στα πλαίσια της Νευτώνειας θεωρίας, δεν είναι παράδοξο στα πλαίσια της ΕΘΣ το μέλλον ενός παρατηρητή να είναι το παρελθόν ενός άλλου ή αντίστροφα.

Σύμφωνα τώρα με το δεύτερο αξίωμα, το αποτέλεσμα κάθε πειράματος που πραγματοποιείται σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς πρέπει να είναι το ίδιο, εάν το πείραμα πραγματοποιηθεί με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, σε οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Διαφορετικά δύο αδρανειακοί παρατηρητές πρέπει να συμφωνούν ως προς τα αποτελέσματα μετρήσεων ο καθένας στο δικό του σύστημα αναφοράς, για το ίδιο μέγεθος (για παράδειγμα ποιος από τους δύο διδύμους έχει γεράσει περισσότερο). Η συμφωνία αυτή προκύπτει βέβαια, αν εφαρμοστούν σωστά από τον κάθε παρατηρητή οι μετασχηματισμοί Lorentz (1.3) από το ένα σύστημα στο άλλο. Υπό την έννοια αυτήν, οι μετασχηματισμοί Lorentz οδηγούν σε μία συμμετρία μεταξύ των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το «παράδοξο» των διδύμων παύει να είναι παράδοξο γιατί ο ένας εκ των δύο αδελφών, ο επιταχυνόμενος Γρηγόρης εν προκειμένω, δεν είναι αδρανειακός παρατηρητής, οπότε η συμμετρία μεταξύ του δικού συστήματος αναφοράς και του αδελφού του Σταμάτη, «σπάει». Συνεπώς ο ιδιόχρονος στο σύστημα αναφοράς του Γρηγόρη θα είναι πάντα μικρότερος από τον ιδιόχρονο στο σύστημα αναφοράς της γης, οδηγώντας στην παρατηρούμενη διαστολή χρόνου.

Στο σημείο αυτό πρέπει να προσεχθεί το εξής: η παρατηρούμενη διαφορά χρόνου δεν οφείλεται στην ουσία της στο μέγεθος της επιτάχυνσης που βιώνει ο Γρηγόρης, ούτε στον χρόνο στον οποίο επιταχύνεται. Το γεγονός αυτό γίνεται αντιληπτό αν σκεφτούμε την διαστολή χρόνου σε δύο περιπτώσεις κινούμενων επιταχυνόμενα παρατηρητών Α και Β, όπου τα επιταχυνόμενα στάδια της κίνησης είναι πανομοιότυπα, αλλά τα ομαλά στάδια είναι μεγαλύτερα για τον παρατηρητή Α εν συγκρίσει με τον παρατηρητή Β. Γίνεται τότε προφανές ότι ο χρόνος διαστέλλεται περισσότερο για τον παρατηρητή Α σε σχέση με την διαστολή χρόνου στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή Β.

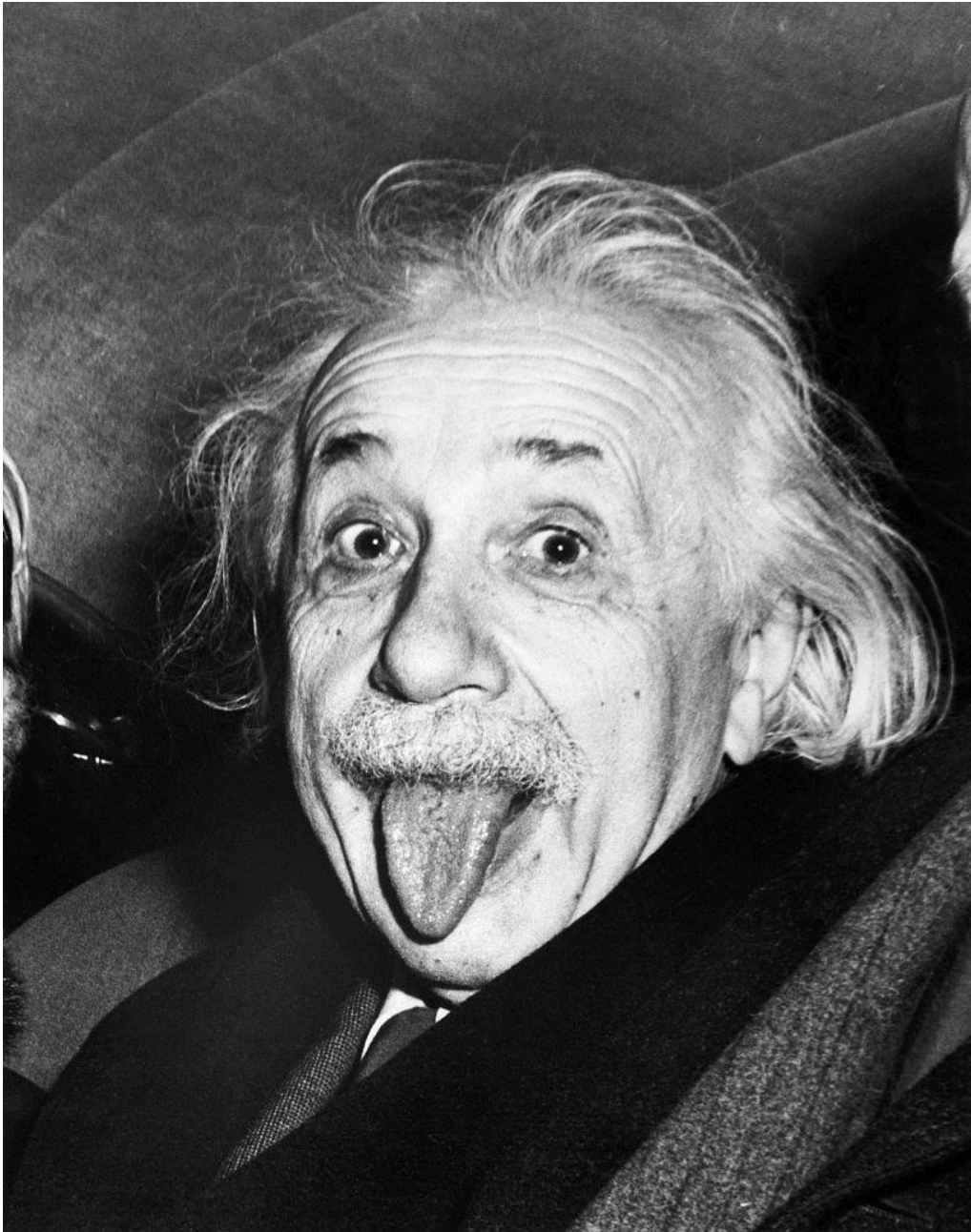
Με απλά λόγια η διαστολή χρόνου στον επιταχυνόμενο παρατηρητή οφείλεται στην ύπαρξη και μόνον της επιτάχυνσης, ανεξάρτητα από την τιμή της και την χρονική της διάρκεια, επιτάχυνση η οποία «σπάει» την συμμετρία των αδρανειακών συστημάτων της ΕΘΣ.

Βάσει των παραπάνω οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το σύστημα αναφοράς του Γρηγόρη δεν είναι αδρανειακό σε όλη την διάρκεια της κίνησής του, ακόμη και αν θεωρήσουμε ακαριαία τα επιταχυνόμενα στάδια. Η δε κίνηση του επιταχυνόμενου διδύμου στην ολότητά της, μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά με όση ακρίβεια θέλουμε, ως το αποτέλεσμα της σύνθεσης της κίνησης δύο αδρανειακών συστημάτων αναφοράς: του Γρηγόρη που απομακρύνεται (ή παρατηρητή Π στην ενότητα 4) από την γη και του Γρηγόρη που πλησιάζει στην γη με σταθερή ταχύτητα. Τώρα αν θέλουμε να αναλύσουμε το φαινόμενο από την σκοπιά του επιταχυνόμενου διδύμου στα πλαίσια της ΕΘΣ, πρέπει να το κάνουμε μέσω των δύο αδρανειακών συστημάτων του απομακρυνόμενου παρατηρητή Π και του πλησιάζοντος την γη Γρηγόρη. Πρέπει δηλαδή να μελετήσουμε αρχικά την κίνηση του παρατηρητή Π έως το γεγονός Α της συνάντησής

του με τον Γρηγόρη και στην συνέχεια την κίνηση του Γρηγόρη από το γεγονός Α ως το γεγονός Σ της συνάντησής του με την γη (δες τα διαγράμματα Minkowski του σχήματος 9).

Τότε το παράδοξο αίρεται αν λάβουμε υπ' όψιν μας την διαφορά στις χρονικές στιγμές στα ρολόγια της γης, οι οποίες καταγράφονται ως σύγχρονες (ταυτόχρονες) με τους ιδιοχρόνους των παρατηρητών Π και Γρηγόρη για το γεγονός Α της συνάντησής τους. Πράγματι αν ο Γρηγόρης διορθώσει τον συνολικό χρόνο κίνησης λαμβάνοντας υπ' όψιν την διαφοροποίηση του ταυτόχρονου μεταξύ της γης και των κινούμενων αδρανειακών συστημάτων, θα καταλήξει στην ίδια διαστολή χρόνου με αυτήν που μετράται από τα ρολόγια του Σταμάτη, όπως στην παράγραφο 4γ.

6. Εν είδει επιλόγου



Στις 14 Μαρτίου 1951 ο παγκοσμίου φήμης, σεβάσμιος καθηγητής Albert Einstein, γινόταν 72 χρονών.

Η φωτογραφία πάρθηκε όταν ο ίδιος βρισκόταν στο πίσω μέρος της λιμουζίνας που τον μετέφερε στην γιορτή προς τιμήν του, η οποία λάμβανε μέρος στο περίφημο Institute of Advanced Studies του Princeton.

Οι παπαράτσι περίμεναν για μία του φωτογραφία, ο καθηγητής ενοχλημένος λέγεται ότι μουρμούρισε στους συνεπιβάτες του «αρκετά πια» («enough is enough»), ένας παπαράτσι φώναξε «Κύριε καθηγητά, σας παρακαλώ, χαμογελάστε για μία γενέθλια φωτογραφία» και ο σεβάσμιος καθηγητής ξαναέγινε για λίγο το παιδί που κάποτε συνομήλισε με το Θεό...

7. Βιβλιογραφία

- [1] Born ,M., “*Einstein’s Theory of Relativity*”, Dover Publications, New York, 1965.
- [2] Hartle, J., B., “*Gravity: An Introduction to Einstein’s General Relativity*”, Addison Wesley, USA, 2003.
- [3] Rindler, W., «*Εισαγωγή στην Ειδική Σχετικότητα*», Εκδόσεις Leader Books, Αθήνα 2001.
- [4] Schutz, B., F., «*Γενική Σχετικότητα*», Εκδόσεις Κωσταράκη, Αθήνα 1997.