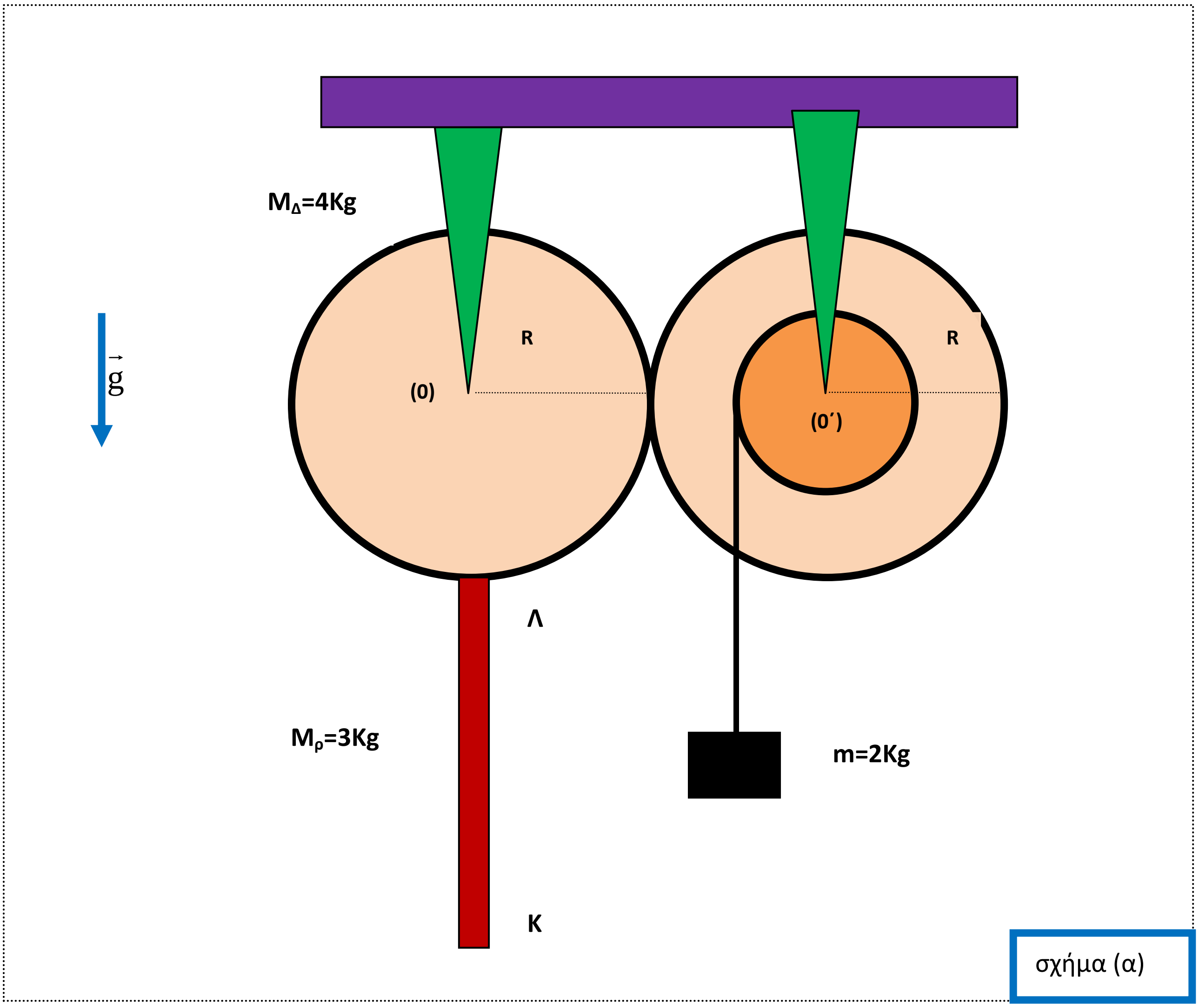
Η διάταξη του σχήματος (α) αποτελείται από :

**1.** Τον δίσκο **Δ** ακτίνας **R=0,1m** ,μάζας **$m_ρ$=4Kg.**




σχήμα (α)

**2.**Την ράβδο **ΚΛ** μήκους **2R=0,2m** ,μάζας **$m_ρ$=3Kg.**

**3.**Τη διπλή τροχαλία ακτίνας **R=0,1m** ,μάζας **$m_T$=4Kg.**

**4.**Το σώμα μάζα **m=2Kg.**

**5.**Το αβαρές νήμα **.**

**Η** ροπή αδράνειας του δίσκου **Δ** ως προς τον άξονα περιστροφής του που είναι οριζόντιος διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του είναι , $I_Δ=\frac{1}{2}M_ΔR^2$

**Η** ροπή αδράνειας της διπλής τροχαλίας **Τ** ως προς τον άξονα περιστροφής της που είναι οριζόντιος διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στο επίπεδό της,είναι $I_T=M_TR^2$

**Η** ροπή αδράνειας της ράβδου **Ρ** ως προς τον άξονα περιστροφής της που διέρχε-ται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σ΄αυτήν της είναι , $I_{cm,\rho}=\frac{1}{12}M_\rho L^2$

Δίνεται ακόμη:**g=10m/s²**

Η ράβδος ΚΛ είναι κολλημένη στον δίσκο και μπορεί να στρέφεται μαζί με αυτόν ως ενιαίο σώμα,γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του δίσκου (Ο)και είναι κάθετος σ΄αυτόν.

Η διπλή τροχαλία μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της (Ο΄)και είναι κάθετος σ΄αυτήν.

Όταν δίσκος και διπλή τροχαλία στρέφονται δεν παρατηρείται ολίσθηση του ενός ως προς την άλλη στο σημείο επαφής τους.

**Δ1**.Να υπολογίσετε την ροπή αδράνειας του συστήματος Δίσκος-Ράβδος ως προς τον άξονα τον διερχόμενο από το σημείο (Ο) **(Μονάδες 4)**

**Δ2**.Ασκώντας στο άκρο Κ της ράβδου κατάλληλη δύναμη $\vec{F}_1$,οριζόντιας διεύθυνσης , το όλο σύστημα ισορροπεί. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_1$. **(Μονάδες 4)**

**Δ3.**Ασκώντας κατακόρυφη κατάλληλη δύναμη $\vec{F}$ στο σώμα μάζας **m** εξασφαλίζουμε να στρέ-φεται ο δίσκος **Δ₁** με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_\gamma$**=5rad/s,** η διπλή τροχαλία με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha'_\gamma$ και το σώμα με σταθερή επιτάχυνση **α.**

Να υπολογίσετε την **συνολική κινητική ενέργεια** $K_{\text{ολ}}$ του συστήματος τη στιγμή κατά την οποία η ράβδος γίνεται οριζόντια. Δίνεται: $\sqrt{\frac{\pi}{5}}=0,8$ **(Μονάδες 4)**

**Δ4.**Ν α εκφράσετε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_2$ που ασκεί η διπλή τροχαλία στον δίσκο σε συνάρ-τηση με την γωνία στροφής **(φ)** του συστήματος Δίσκος-Ράβδος.

**(Μονάδες 4)**

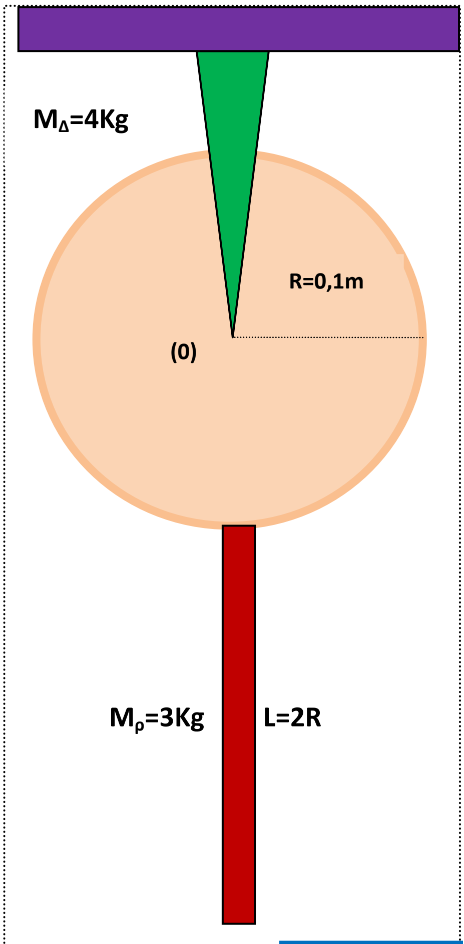
**Δ5.**Να υπολογίσετε το έργο της ροπής δύναμης $\vec{F}_2$ κατά την στροφή του συστήματος Δίσκος –Ράβδος , μέχρι η ράβδος να βρεθεί στην οριζόντια θέση.

**(Μονάδες 4)**

**Δ6.**Αν τη στιγμή κατά την οποία η ράβδος γίνεται οριζόντια αποκολληθεί από τον δίσκο, να βρεθεί σε πόσο χρόνο θα μηδενιστεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου και σε πόση απόσταση από τη οριζόντια θέση της ράβδου θα συμβεί αυτό. *Τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου ποια τα μέτρα των οι ταχυτήτων των άκρων της Κ,Λ ;*

**(Μονάδες 5)**

**Δ1.**



σχήμα (β)

$I_{ολ}=I_{ΔΙΣΚΟΥ}+I_{ΡΑΒΔΟΥ}$ (1)

$I_{ΔΙΣΚΟΥ}=\frac{1}{2}M_Δ R^2=\frac{1}{2}4.0,1^2=0,02Kg.m^2$ (2)

$$I_{ΡΑΒΔΟΥ}\overset{Steiner}{=}\frac{1}{12}M_P L^2+M_P(2R)^2=\frac{1}{12}3.0,2^2+3(2.0,1)^2$$
$$=\frac{O,12}{12}+0,12=0,01+O,12=0,13Kg.m^2 \quad (3)$$

(1), (2), (3)

$I_{ολ}=I_{ΔΙΣΚΟΥ}+I_{ΡΑΒΔΟΥ}$ =0,13+0,02=0,15Kg.m$^2$ (4)

**Δ2.**

**Ισορροπία στερεού αποτελούμενου από την ράβδο και τον δίσκο**

$Στ(0)=0$

$-F_1 3R+FR=0 \rightarrow \quad F=3F_1 \rightarrow F_1=\frac{F}{3}$ (4) ακόμη $F=F'$

**Ισορροπία διπλής τροχαλίας**

$Στ(0')=0$

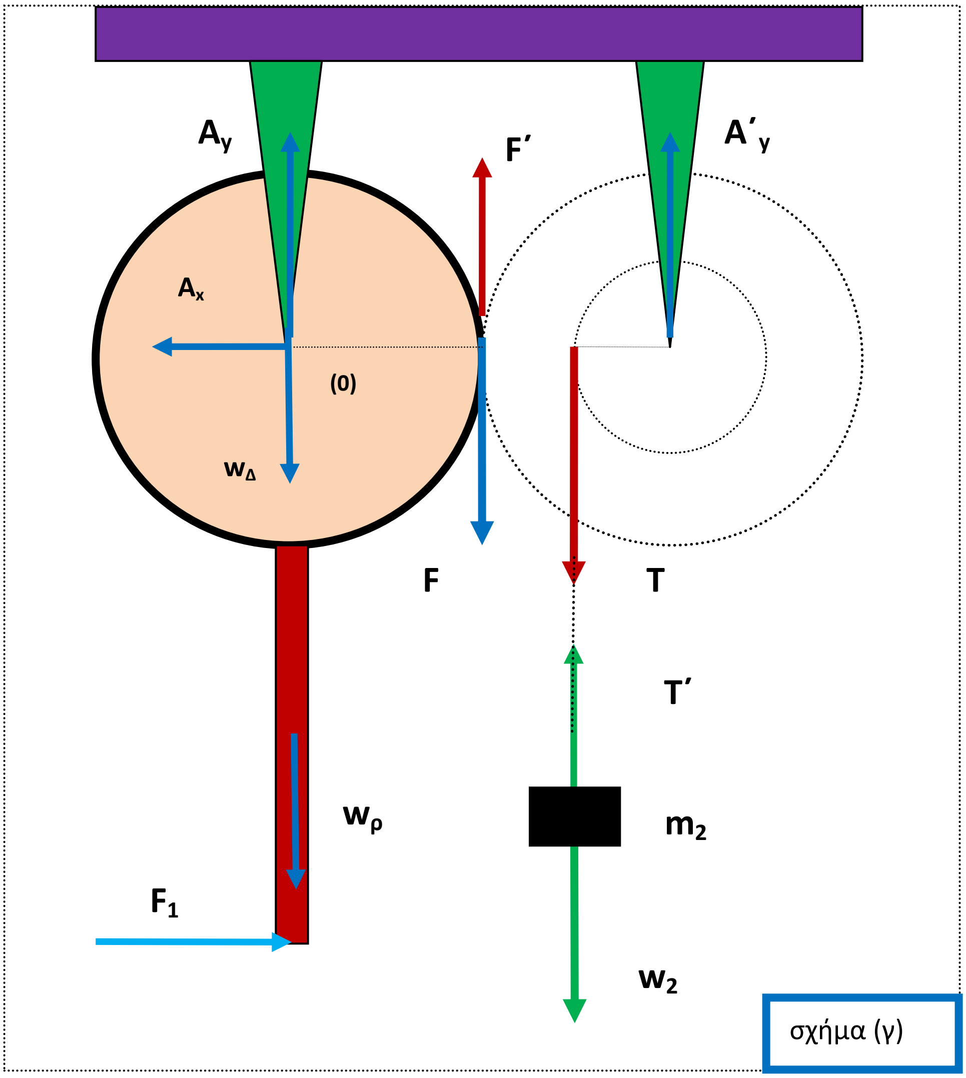
$+F'R-T\frac{R}{2}=0 \quad \rightarrow F'=\frac{T}{2}$ (5)

(4), (5), $\quad 3F_1=\frac{T}{2} \rightarrow F_1=\frac{T}{6}$ (6)

**Ισορροπία σώματος**

$\Sigma F=0 \rightarrow \quad w_2=T \qquad (7) \qquad T'=T$

$(6),(7) \rightarrow F_1=\frac{w_2}{6}=\frac{m_2 g}{6}=\frac{2.10}{6}=\frac{10}{3}N \quad (7)$



σχήμα (γ)

**Δ3.**Ηγωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος – δίσκος τη στιγμή που αυτή γίνεται οριζόντια δίνεται από τη σχέση:

$\omega_\Delta=\alpha_\gamma t$

ο χρόνος θα υπολογιστεί από τη γωνία στροφής του στερεού $\Delta\theta=\frac{\pi}{2}rad$

$\Delta\theta = \frac{1}{2}a_\gamma t^2 = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{1}{2}5t^2 = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{\pi}{5}}s$ =0,8s (8)

$\omega_\Delta$=5.0,8=4rad/s (9)

Η διπλή τροχαλία καθώς και ο δίσκος δεν ολισθαίνουν η μία σχετικά με τον άλλον οπότε η γραμμικές ταχύτητες των σημείων επαφής είναι ίσες.Καθώς μάλιστα οι ακτίνες τους είναι ίσες επίσης ,καταλήγουμε ότι και οι γωνιακές ταχύτητες δίσκου και διπλής τροχαλίας είναι στα μέτρα ίσες.Δηλαδή:

$\omega_\Delta = \omega_T$=4rad/s (10)

Το νήμα που συνδέει τροχαλία με σώμα είναι τεντωμένο οπότε η ταχύτητες των σημείων του έχουν ίσα μέτρα.Η ταχύτητα του σώματος είναι ίση στο μέτρο με τη γραμμική ταχύτητα των περιφερειακών σημείων του μικρού δίσκου της διπλής τροχαλίας.

$\upsilon_1 = \omega T.\frac{R}{2}$=0,2m/s (11) $I_T = M_T.R^2$=0,04Kg.m$^2$

$K_{o\lambda} = K_{(\Delta,P)} + K_T + K_1 = \frac{1}{2}I_{\Delta,P}\omega^2 + \frac{1}{2}I_T\omega^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1{}^2$

$= \frac{1}{2}0,15.4^2 + \frac{1}{2}0,04.4^2 + \frac{1}{2}2.0,2^2 =$

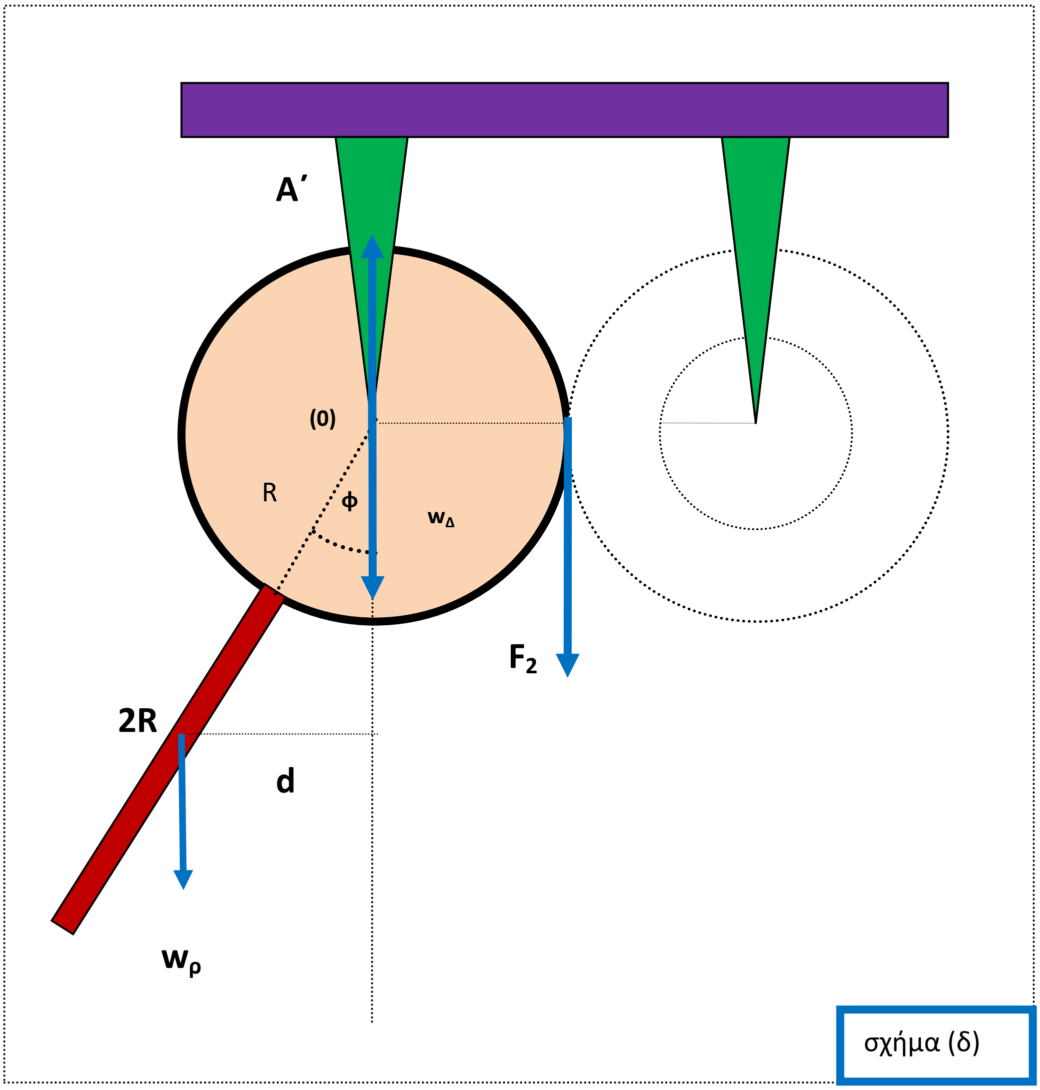
$= 1,2 + 0,32 + 0,04 = 1.56$j **Κολ=1.56j** (12)

**Δ4.**

**Σύστημα δίσκος-ράβδος (τυχαία θέση)**

**Στ(0)=Ια$_\gamma$** $\rightarrow$ F$_2$R-w(2Rημφ)= Ια$_\gamma$ $\rightarrow$ F$_2$0,1=0,15 .5 – 30.(2.0,1ημφ) $\rightarrow$

$F_2 = \frac{0,15\ .5 - 30.(2.0,1\eta\mu\varphi)}{0,1} = 7,5 - 60\eta\mu\varphi \rightarrow$ **F$_2$ = 7,5 - 60ημφ** (13)



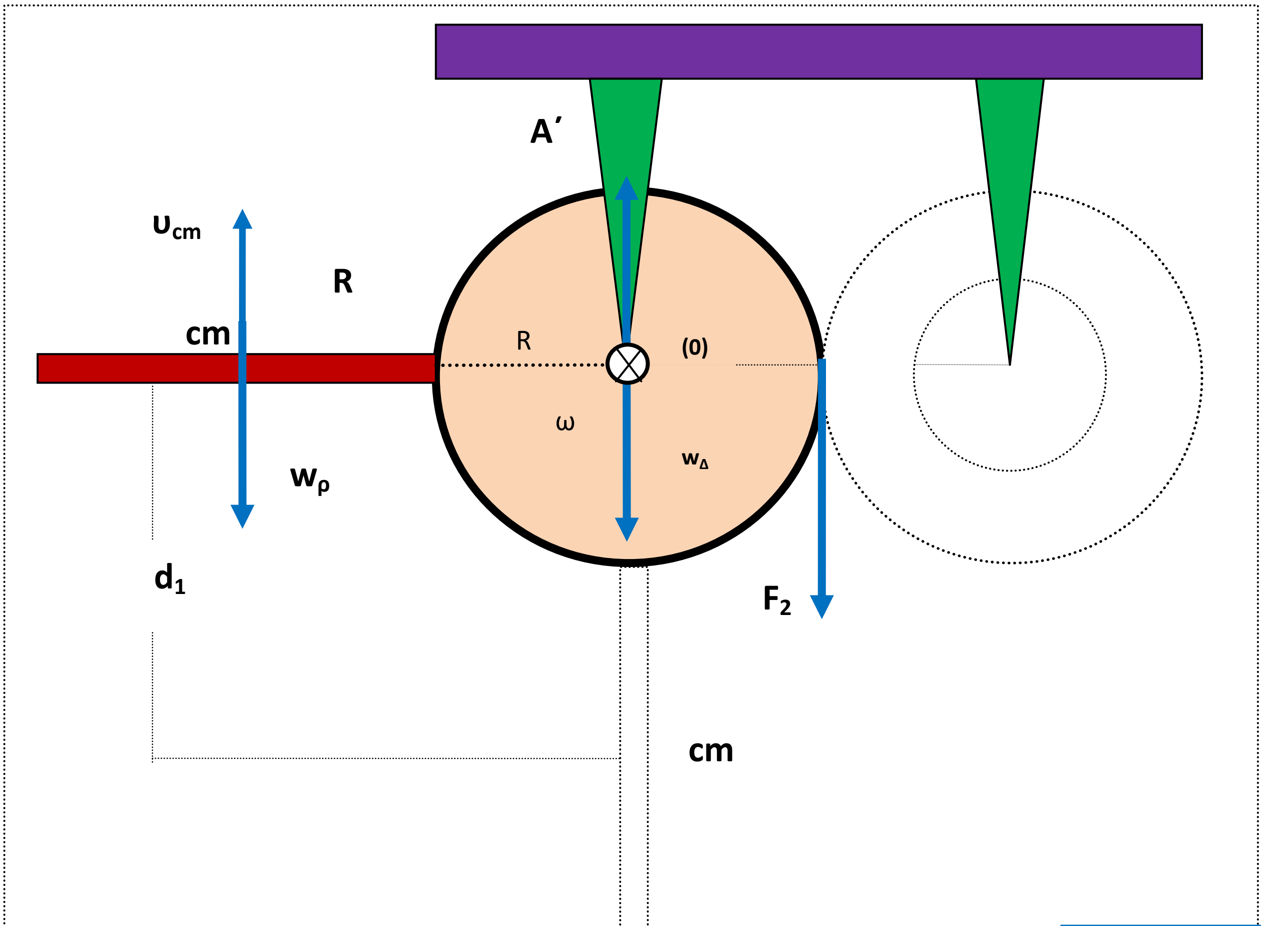

**Δ5.Εφαρόζουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας για το σύστημα δίσκος – ράβδος,**

$W_{ολ} = ΔK = K_{τελ} - K_{αρχ}$

$$W_{wρ} + W_{F2} = \frac{1}{2} I \omega^2 - 0 = \frac{1}{2} 0{,}15.4^2 = 1{,}2\,j$$

$$-w_ρ 2R + W_{F2} = \frac{1}{2} I \omega^2 - 0 = \frac{1}{2} 0{,}15.4^2 = 1{,}2\,j$$

$-3.10.2.0{,}1 + W_{F2} = 1{,}2\,j \rightarrow$ **$W_{F2}$ = 1,2 +6=7,2J** (14)



σχήμα (ε)

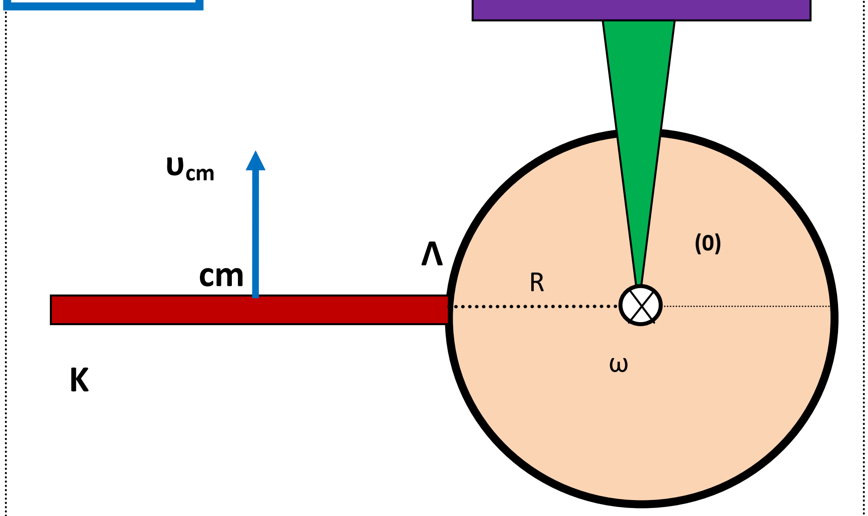
**Δ6.**Τι στιγμή κατά την οποία αποκολλάται η ράβδος από τον δίσκο ,το κέντρο μάζας της έχει ταχύτητα

$\upsilon_{cm}=\omega 2R=4.2.0{,}1$

$=0.8$ m/s. (15)

Στη συνέχεια η ράβδος δεχεται μόνο την δύναμη του βάρους η οποία δεν έχει ροπή ως προς το κέντρο μάζας της και επομένως το κέντρο μάζας

σχήμα (στ)



ΣΤΙΓΜΗ ΑΠΟΚΟΛΛΗΣΗΣ ΡΑΒΔΟΥ ΑΠΟ ΤΟΝ ΔΙΣΚΟ

πραγματοποιεί ευθύ-γραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση (επιτάχυνση ) $\vec{g}$ . Η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα μηδενιστεί μετά από χρόνο

t=$\frac{\upsilon_{cm}}{g} = \frac{0.8}{10} = 0,08s$ (16)

έχοντας μετατοπιστεί από την θέση όπου αποκολλήθηκε από τον δίσκο ,κατά

$h_{\max} = \frac{\upsilon_{cm}^2}{2g} = \frac{0.8^2}{20} = \frac{0,64}{20} = 0,032m$ (17)