

ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

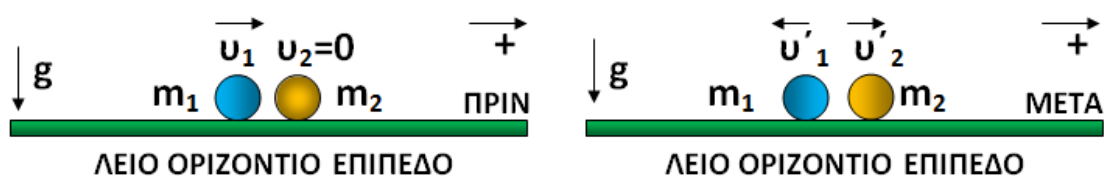
1. ΘΕΜΑ

Μελέτη κεντρικής ανελαστικής κρούσης δύο σφαιρών.

2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Σφαίρα μάζας m_1 κινούμενη στο λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα v_1 συγκρούεται ακαριαία κεντρικά και ανελαστικά με άλλη ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 . Με χρήση των αρχών διατήρησης της Ορμής (Α.Δ.Ο.) και Ενέργειας (Α.Δ.Ε.), να προσδιοριστεί η κατεύθυνση κίνησης της σφαίρας m_1 μετά την κρούση και να υπολογιστεί η απώλεια Q της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των δυο σφαιρών εξαιτίας της.

Θεωρούμε θετική τη φορά της κίνησης της σφαίρας m_1 , πριν την κρούση.



3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ

α) Σχέση ταχυτήτων

Με εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Ορμής έχουμε:

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \Leftrightarrow v'_2 = \frac{m_1}{m_2} (v_1 - v'_1) \quad (1)$$

Όμως από Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας ισχύει:

$$\begin{aligned} K_{\text{ΑΡΧ}} &= K_{\text{ΤΕΛ}} + Q \Leftrightarrow K_1 = K'_1 + K'_2 + Q \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 + Q \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 &> \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \Leftrightarrow m_1 (v_1^2 - v'^2_1) > m_2 v'^2_2 \Leftrightarrow \\ \frac{m_1}{m_2} (v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) &> v'^2_2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} v'_2 (v_1 + v'_1) > v'^2_2 \Leftrightarrow \\ v_1 + v'_1 &> v'_2 \quad (2) \end{aligned}$$

Λόγω της (1):

$$v'_2 - v'_1 < v_1 \Leftrightarrow v'_2 - v_1 + \frac{m_2}{m_1} v'_2 < v_1 \Leftrightarrow v'_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) < 2v_1 \Leftrightarrow$$

$$v'_2 < \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας στην (3) την (1) έχουμε:

$$v'_1 > \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (4)$$

β) Απώλεια μηχανικής ενέργειας συστήματος

$$K_{APX} = K_{TEΛ} + Q \Leftrightarrow K_1 = K'_1 + K'_2 + Q \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + Q$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - v_1'^2) - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Leftrightarrow$$

$$Q = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$Q = \frac{1}{2} m_2 v_2' (v_1 + v_1') - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2} m_2 v_2' [(v_1 + v_1') - v_2'] \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$Q = \frac{1}{2} m_2 v_2' \left[(v_1 + v_1') - \frac{m_1}{m_2} (v_1 - v_1') \right] \Leftrightarrow$$

$$Q = \frac{1}{2} v_2' [(m_2 - m_1)v_1 - (m_2 + m_1)v_1'] \quad (5)$$

4. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Αν $v'_1 = 0$:

οπότε λόγω της (1): $m_1 v_1 = m_2 v'_2$ και αφού $v_1 > v'_2 \Leftrightarrow m_2 > m_1$

Από την σχέση (5) για την απώλεια της μηχανικής ενέργειας συστήματος έχουμε:

$$Q = \frac{1}{2} v_2' (m_2 - m_1) v_1 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2 m_2} m_2 v_2' (m_2 - m_1) v_1 \Leftrightarrow$$

$$Q = \frac{1}{2 m_2} m_1 v_1 (m_2 - m_1) v_1 \Leftrightarrow Q = \frac{m_2 - m_1}{m_2} K_1 \quad (6)$$

β) Αν $v'_1 \neq 0$, ανάλογα με τη σχέση των μαζών, έχουμε:

β₁) Αν $m_1 = m_2$, από την (1) παίρνουμε: $v_1 = v'_1 + v'_2 \quad (6)$

και από τη σχέση (4) προκύπτει ότι $v'_1 > 0 \quad (7)$,

άρα μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται ομόρροπα.

Επιπλέον θα πρέπει να ισχύει $v'_2 > v'_1 \Leftrightarrow v_1 - v'_1 > v'_1 \Leftrightarrow v'_1 < \frac{v_1}{2} \quad (8)$

Επίσης $v'_1 < \frac{v_1}{2} \Leftrightarrow v_1 - v'_2 < \frac{v_1}{2} \Leftrightarrow v'_2 > \frac{v_1}{2} \quad (9)$

Τελικά για τις ταχύτητες των σφαιρών ισχύει:

$$0 < v'_1 < \frac{v_1}{2} \text{ (10) και } \frac{v_1}{2} < v'_2 < v_1 \text{ (11)}$$

Για την απώλεια μηχανικής ενέργειας συστήματος έχουμε:

$$Q = m_1 v'_1 v'_2 \Leftrightarrow Q = m_1 v'_1 (v_1 - v'_1) \text{ (12)}$$

β₂) Αν $m_1 > m_2 \Leftrightarrow m_1 - m_2 > 0$,

οπότε λόγω της (4) είναι $v'_1 > 0$ (13)

Επιπλέον θα πρέπει να ισχύει $v'_2 > v'_1$ και αντικαθιστώντας την σχέση (1)

οπότε παίρνουμε ισοδύναμα:

$$\frac{m_1}{m_2} (v_1 - v'_1) > v'_1 \Leftrightarrow v'_1 < \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \text{ (14)}$$

Συναληθεύοντας με την (4) τελικά προκύπτει:

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 < v'_1 < \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \text{ (15)}$$

Εργαζόμενοι αντίστοιχα για την ταχύτητα v'_2 παίρνουμε:

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 < v'_2 < \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \text{ (16)}$$

Για την απώλεια μηχανικής ενέργειας συστήματος έχουμε:

$$Q = \frac{1}{2} v'_2 [(m_2 - m_1) v_1 + (m_2 + m_1) v'_1] \text{ (5)}$$

Θα κατασκευάσουμε την σχέση (5) πολλαπλασιάζοντας την σχέση (15) με $m_1 + m_2$, οπότε προκύπτει:

$(m_1 - m_2) v_1 < (m_1 + m_2) v'_1 < m_1 v_1$ και προσθέτουμε στα μέλη της ανισότητας τον όρο $(m_2 - m_1) v_1$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 &< (m_2 - m_1) v_1 + (m_2 + m_1) v'_1 < m_2 v_1 \Leftrightarrow \\ 0 &< \frac{1}{2} v'_2 [(m_2 - m_1) v_1 + (m_2 + m_1) v'_1] < \frac{1}{2} m_2 v'_2 v_1 \Leftrightarrow \\ 0 &< Q < \frac{1}{2} m_2 v'_2 v_1 \text{ ή } 0 < Q < \frac{1}{2} m_1 v_1 (v_1 - v'_1) \text{ (17)} \end{aligned}$$

β₃) Αν $m_1 < m_2$, τότε από την σχέση (4) προκύπτει ότι $v'_1 > \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ με τον όρο του δεύτερου μέλους αρνητικό, πράγμα που σημαίνει ότι η ταχύτητα της σφαίρας μάζας m_1 μπορεί να είναι ομόρροπη, μηδενική ή αντίρροπη με την ταχύτητα v_1 ανάλογα με τις τιμές των μαζών και των ταχυτήτων.

Ενδεικτικά για αυτή την περίπτωση αυτή είναι τα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1

Αν $m_1 = 1\text{kg}$, $m_2 = 4\text{kg}$, $v_1 = 10\text{m/s}$ και $v'_2 = 2,25\text{m/s}$ τότε προκύπτει από την σχέση (1) $v'_1 = 1\text{m/s}$ ($v'_2 > v'_1$) και από την σχέση (5)

$$Q = 39,375\text{J} \quad (Q > K_1 = 50\text{J})$$

Παράδειγμα 2

Αν $m_1 = 1\text{kg}$, $m_2 = 4\text{kg}$, $v_1 = 10\text{m/s}$ και $v'_2 = 2,5\text{m/s}$ τότε προκύπτει από την σχέση (1) $v'_1 = 0$ και από την σχέση (5)

$$Q = 12,5\text{J} \quad (Q > K_1 = 50\text{J})$$

Παράδειγμα 3

Αν $m_1 = 1\text{kg}$, $m_2 = 4\text{kg}$, $v_1 = 10\text{m/s}$ και $v'_2 = 3\text{m/s}$ τότε προκύπτει από την σχέση (1) $v'_1 = -2\text{m/s}$ και από την σχέση (5)

$$Q = 30\text{J} \quad (Q > K_1 = 50\text{J})$$

Ιούλιος 2022
nknd@hotmail.gr