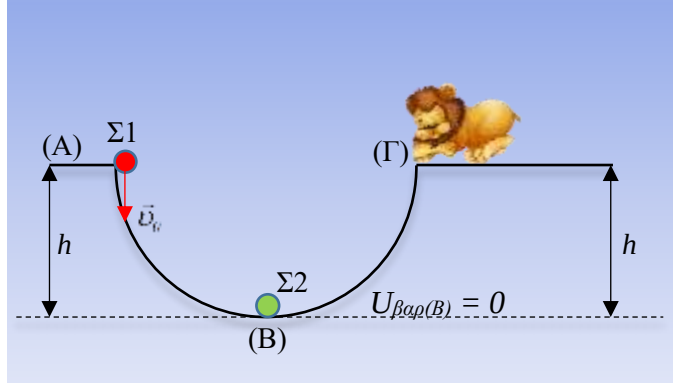


Για να ξυπνήσει ήρεμα το ...λιοντάρι

Ένα λιοντάρι κοιμάται στο σημείο Γ, ακριβώς στο χείλος μιας λείας ημικυκλικής τάφρου ακτίνας h , όπως φαίνεται στο σχήμα. Προκειμένου να το ξυπνήσουμε «γλυκά», σκεφτόμαστε να εκτοξεύσουμε μια σφαίρα Σ1, μάζας $m_1 = m$, από το σημείο Α, με κατάλληλη κατακόρυφη αρχική ταχύτητα μέτρου v_0 . Η σφαίρα αυτή, αφού κατέλθει, θα συγκρουστεί κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη σφαίρα Σ2, μάζας $m_2 = 2m$, που ηρεμεί στο κατώτερο σημείο Β, του ημικυκλίου. Η σφαίρα Σ2 με τη σειρά της θα εκτελέσει την ...αποστολή.



Θεωρούμε την ταχύτητα της σφαίρας Σ1, λίγο πριν την κρούση, να έχει οριζόντια διεύθυνση, δεν υπάρχουν τριβές, γνωστή την επιτάχυνση της βαρύτητας g και $U_{βαρ(B)} = 0$.

i) Η αρχική ταχύτητα της σφαίρας Σ1 θα πρέπει να έχει μέτρο

α) $v_0 = \sqrt{gh}$ β) $v_0 = \sqrt{2gh}$ γ) $v_0 = \sqrt{2,5gh}$

ii) Το ποσοστό της αρχικής μηχανικής ενέργειας του συστήματος Σ1-Σ2, που πρέπει να μεταβιβάσει η σφαίρα Σ1 στη Σ2 είναι

α) $\frac{800}{9} \%$ β) $\frac{500}{9} \%$ γ) $\frac{200}{9} \%$

iii) Η δύναμη που θα δεχτεί από το δάπεδο η σφαίρα Σ2, αμέσως μετά την κρούση, έχει μέτρο

α) $N = 5mg$ β) $N = 6mg$ γ) $N = mg$

iv) Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Σ1, μεταξύ των θέσεων Α και Β είναι

α) $|\Delta p| = m\sqrt{5gh}$ β) $|\Delta p| = m\sqrt{7gh}$ γ) $|\Delta p| = m\sqrt{3gh}$

Απάντηση

i) Εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ για τη σφαίρα Σ1, από το σημείο Α μέχρι το σημείο Β, έχουμε

$$U_A + K_A = U_B + K_B \Leftrightarrow m_1 gh + \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \quad (1)$$

Η ταχύτητα της σφαίρας Σ2 μετά την ελαστική κρούση θα είναι

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Leftrightarrow v_2' = \frac{2m}{3m} v_1 \Leftrightarrow v_2' = \frac{2}{3} v_1 \quad (2)$$

Για να ξυπνήσει ήρεμα το λιοντάρι πρέπει η σφαίρα Σ2 απλά να το ...αγγίξει, δηλαδή να φτάσει στο σημείο Γ με $v_{\Gamma} = 0$.

Εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ για τη σφαίρα Σ2, από το σημείο Β μέχρι το σημείο Γ, έχουμε

$$U_B + K_B = U_{\Gamma} + K_{\Gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = m_2 gh \Leftrightarrow v_2' = \sqrt{2gh} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε

$$\frac{2}{3} v_1 = \sqrt{2gh} \xrightarrow{(1)} \frac{2}{3} \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{2gh} \Leftrightarrow \frac{4}{9} (v_0^2 + 2gh) = 2gh \Leftrightarrow$$

$$4v_0^2 + 8gh = 18gh \Leftrightarrow 4v_0^2 = 10gh \Leftrightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{2,5gh} \quad (4)$$

Σωστή απάντηση $\rightarrow \gamma$

ii) Η αρχική μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι

$$E_{\mu(A)} = m_1 gh + \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \xrightarrow{(4)} E_{\mu(A)} = mgh + \frac{1}{2} m \cdot 2,5gh \Leftrightarrow E_{\mu(A)} = 2,25mgh$$

Η σφαίρα Σ1 μεταβιβάζει στη Σ2 κινητική ενέργεια ίση με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας της αρχικά ακίνητης Σ2. Η κινητική ενέργεια της Σ2 γίνεται τελικά μόνο δυναμική βαρυτική φτάνοντας στο Γ.

$$\Delta K_2 = m_2 gh = 2mgh$$

Άρα το ζητούμενο ποσοστό θα είναι

$$\pi\% = \frac{\Delta K_2}{E_{\mu(A)}} \cdot 100 = \frac{2mgh}{2,25mgh} \cdot 100 \Leftrightarrow$$

$$\pi\% = \frac{800}{9}\%$$

Σωστή απάντηση $\rightarrow \alpha$

iii) Η συνισταμένη των δυνάμεων κατά τη διεύθυνση της ακτίνας του ημικυκλίου, πρέπει να δημιουργεί την απαιτούμενη κεντρομόλο, άρα

$$\Sigma \vec{F}_R = \vec{F}_K \Leftrightarrow N - m_2 g = m_2 \cdot \frac{v_2'^2}{h} \Leftrightarrow N = 2m \cdot \left(g + \frac{v_2'^2}{h} \right) \xrightarrow{(3)} N = 2m \left(g + \frac{2gh}{h} \right) \Leftrightarrow$$

$$N = 6mg$$

Σωστή απάντηση $\rightarrow \beta$

iv) Στη θέση Α

$$|p_A| = mv_0 \xrightarrow{(4)} |p_A| = m\sqrt{2,5gh}$$

Στη θέση Β

$$|p_B| = m v_1 \xrightarrow{(1)} |p_B| = m \sqrt{v_0^2 + 2gh} \xrightarrow{(4)}$$

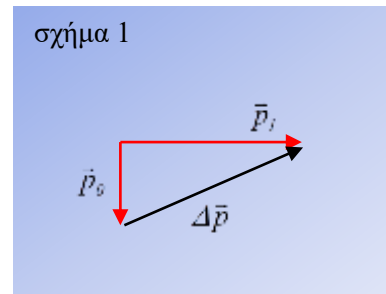
$$|p_B| = m \sqrt{2,5gh + 2gh} \Leftrightarrow |p_B| = m \sqrt{4,5gh}$$

Με βάση το σχήμα 1, το μέτρο της μεταβολής της ορμής είναι:

$$|\Delta p| = \sqrt{p_A^2 + p_B^2} \Leftrightarrow |\Delta p| = \sqrt{m^2 \cdot 2,5gh + m^2 \cdot 4,5gh} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{|\Delta p| = m\sqrt{7gh}}$$

Σωστή απάντηση $\rightarrow \beta$



Ανδρέας Φιζόπουλος