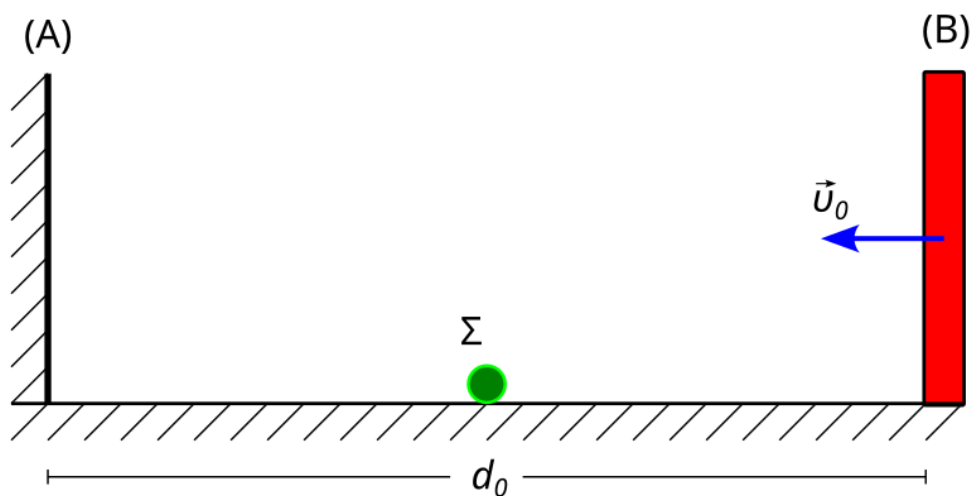


Ελαστική κρούση με κινούμενο τοίχο

Ένα σώμα Σ αμελητέων διαστάσεων βρίσκεται ακίνητο πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο και μεταξύ δύο παράλληλων κατακόρυφων τοίχων. Ο τοίχος (Α) είναι ακλόνητος, ενώ ο τοίχος (Β) κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_0 = 2\text{ m/s}$ προς το σώμα Σ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ οι δύο τοίχοι απέχουν απόσταση $d_0 = 80\text{ m}$ και το σώμα Σ βρίσκεται στο μέσο αυτής της απόστασης.



Εάν όλες οι κρούσεις που θα ακολουθήσουν είναι ελαστικές,

- A. να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή της πρώτης κρούσης του τοίχου (Β) με το σώμα Σ και την ταχύτητα του Σ αμέσως μετά από αυτή.
- B. Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή της δεύτερης κρούσης του τοίχου (Β) με το σώμα Σ και την ταχύτητα του Σ αμέσως μετά από αυτή.

Εάν αμέσως μετά τη δεύτερη κρούση του με το Σ ο τοίχος (Β) ακινητοποιείται ακαριαία (λόγω κατάλληλης εξωτερικής παρέμβασης) και παραμένει ακλόνητος στη θέση αυτή,

- Γ. να αιτιολογήσετε το γεγονός ότι η κίνηση του Σ στη συνέχεια είναι περιοδική, υπολογίζοντας και την περίοδο της κίνησής του.

Όλες οι κρούσεις να θεωρηθούν ακαριαίες. Η μάζα κάθε τοίχου να θεωρηθεί πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα του σώματος Σ .

Λύση

- A. Επειδή το σώμα Σ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ισαπέχει από τους δύο τοίχους, συμπεραίνουμε ότι η απόστασή του από τον τοίχο (Β) θα είναι τότε ίση με $d_1 = \frac{d_0}{2} = 40\text{ m}$. Καθώς ο τοίχος κινείται με σταθερή ταχύτητα και το σώμα Σ είναι ακόμη ακίνητο, η χρονική στιγμή της 1^{ης} τους κρούσης θα είναι η:

$$v_0 = \frac{d_1}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{d_1}{v_0} = \frac{40m}{2m/s} \Rightarrow \boxed{t_1 = 20s}$$

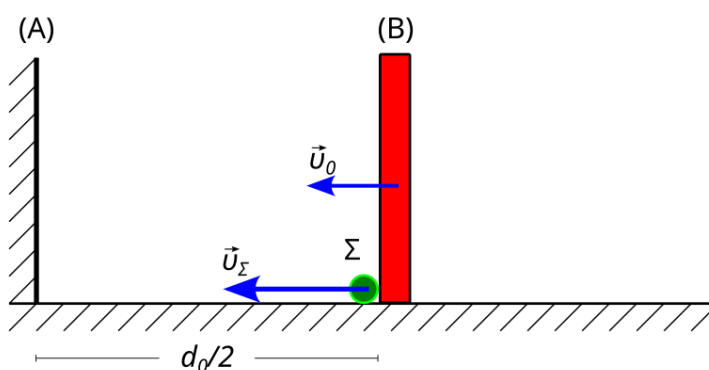
Έστω m_1 η μάζα του σώματος Σ και m_2 η μάζα του τοίχου (B), με $m_2 \gg m_1$.
Ισοδύναμα, θα ισχύει ότι $\frac{m_1}{m_2} \approx 0$.

Επειδή η κρούση του τοίχου (B) με το σώμα Σ είναι ελαστική και κάθετη, για την ταχύτητα του Σ αμέσως μετά την 1^η κρούση τους θα έχουμε:

$$v_\Sigma = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v_0 \approx \frac{2}{0 + 1} v_0 = 2v_0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{v_\Sigma = +4m/s}$$

όπου θεωρήσαμε θετική φορά προς τα αριστερά.

B. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 20s$ λοιπόν, το σώμα Σ κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα $v_\Sigma = +4m/s$ και ο τοίχος (B) με ταχύτητα $v_0 = +2m/s$ επίσης προς τα αριστερά, και απέχουν και οι δύο από τον τοίχο (A) απόσταση ίση με $d_1 = \frac{d_0}{2} = 40m$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Το σώμα Σ , μέχρι να συγκρουστεί κάθετα και ελαστικά με τον τοίχο (A), θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Η (πρώτη) σύγκρουση του σώματος Σ με τον τοίχο (A), θα πραγματοποιηθεί μετά από χρονικό διάστημα Δt_1 από τη χρονική στιγμή t_1 , για το οποίο θα ισχύει ότι

$$v_\Sigma = \frac{d_1}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{d_1}{v_\Sigma} = \frac{40m}{4m/s} \Rightarrow \Delta t_1 = 10s$$

Επομένως, το σώμα Σ θα συγκρουστεί με τον τοίχο (A) τη χρονική στιγμή

$$t_A = t_1 + \Delta t_1 = 20s + 10s = 30s$$

Στο χρονικό διάστημα Δt_1 , ο τοίχος (B) έχει διανύσει απόσταση ίση με

$$\Delta x_B = v_0 \Delta t_1 = 2 \cdot 10m \Rightarrow \Delta x_B = 20m$$

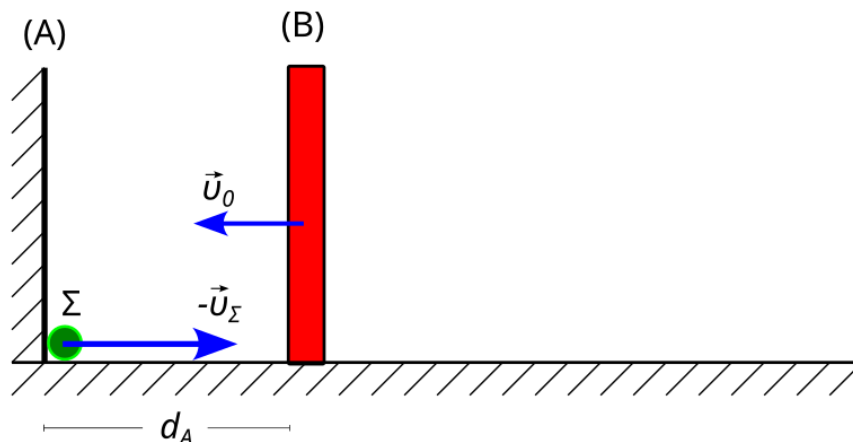
Άρα, τη χρονική στιγμή t_A ο τοίχος (B) απέχει από τον τοίχο (A) απόσταση ίση με

$$d_A = d_1 - \Delta x_B \Rightarrow d_A = 20m$$

Επειδή ο Σ προσκρούει ελαστικά και κάθετα στον τοίχο (A), συμπεραίνουμε ότι θα ανακλαστεί με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς. Δηλαδή,

$$v'_\Sigma = -4\text{m/s}$$

Όλα τα παραπάνω, για τη χρονική στιγμή t_A , φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Έτσι, το σώμα Σ θα συγκρουστεί για 2^η φορά με τον τοίχο (B) μετά από χρονικό διάστημα Δt_2 από τη χρονική στιγμή t_A , για το οποίο θα ισχύει ότι:

$$|v'_\Sigma|\Delta t_2 + v_0\Delta t_2 = d_A \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{d_A}{|v'_\Sigma| + v_0} = \frac{20}{4 + 2}\text{s} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{10}{3}\text{s}$$

Οπότε, η 2^η κρούση του Σ με τον τοίχο (B) θα συμβεί τη χρονική στιγμή

$$t_2 = t_A + \Delta t_2 \Rightarrow t_2 = 30\text{s} + \frac{10}{3}\text{s} \Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{100}{3}\text{s}}$$

Για την ταχύτητα του Σ αμέσως μετά από τη 2^η αυτή κρούση του με τον τοίχο (B), έχουμε:

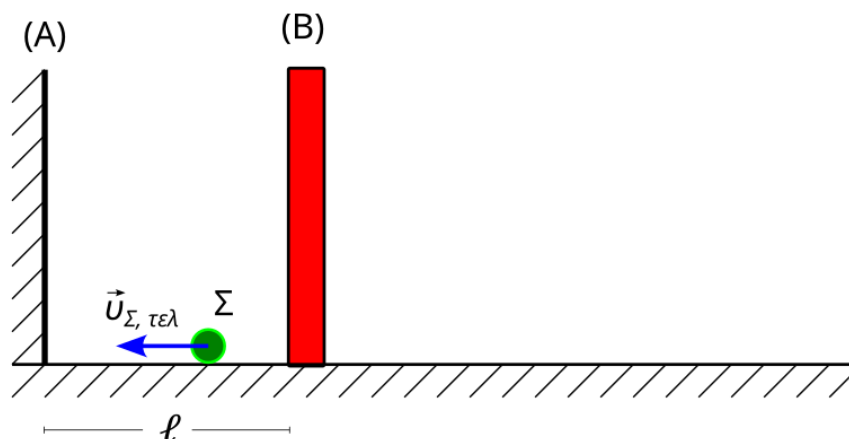
$$\begin{aligned} v_{\Sigma, \tau\epsilon\lambda} &= \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_0 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v'_\Sigma \Rightarrow v_{\Sigma, \tau\epsilon\lambda} = \frac{2}{\frac{m_1}{m_2} + 1}v_0 + \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}v'_\Sigma \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_{\Sigma, \tau\epsilon\lambda} \approx \frac{2}{0 + 1}v_0 + \frac{0 - 1}{0 + 1}v'_\Sigma \Rightarrow v_{\Sigma, \tau\epsilon\lambda} = 2 \cdot (+2\text{m/s}) - 1 \cdot (-4\text{m/s}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{v_{\Sigma, \tau\epsilon\lambda} = +8\text{m/s}} \end{aligned}$$

Δηλαδή, μετά τη 2^η κρούση τους, το σώμα Σ κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου 8m/s .

Γ. Ο τοίχος (B) θα παραμείνει ακίνητος στη θέση της 2^{ης} κρούσης του με το σώμα Σ και θα απέχει από τον τοίχο (A) απόσταση ίση με το διάστημα που διήνυσε ο Σ στο χρονικό διάστημα Δt_2 . Επομένως,

$$(AB) = \ell = |v'_\Sigma|\Delta t_2 \Rightarrow \ell = 4 \cdot \frac{10}{3}\text{m} \Rightarrow \ell = \frac{40}{3}\text{m}$$

Πλέον, θα έχουμε τη διάταξη του παρακάτω σχήματος όπου τόσο ο τοίχος (A), όσο και ο τοίχος (B) θα παραμένουν ακλόνητοι και όλες οι κρούσεις ελαστικές.



Μετά από κάθε κρούση του Σ με κάποιον από τους δύο τοίχους, το σώμα θα ανακλάται με αντίθετη ταχύτητα. Έτσι, το σώμα Σ θα περιορίσει την κίνησή του ανάμεσα στους δύο τοίχους και θα διανύει την απόσταση ℓ μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων με σταθερού μέτρου ταχύτητα και σε σταθερό χρονικό διάστημα. Άρα, η κίνησή του θα εκτελέσει το σώμα Σ είναι περιοδική, με περίοδο ίση με το χρονικό διάστημα για τη μετάβαση $(B) \rightarrow (A) \rightarrow (B)$. Δηλαδή,

$$T = \frac{2\ell}{v_{\Sigma, \text{τελ}}} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \frac{40}{3}}{8} \text{ s} \Rightarrow \boxed{T = \frac{10}{3} \text{ s}}$$

Σχόλιο: 1) Το ερώτημα A θα μπορούσαμε να το αντιμετωπίσουμε και δουλεύοντας με σύστημα αναφοράς τον τοίχο (B). Στο σύστημα αυτό, ο τοίχος (B) είναι ακίνητος και το σώμα Σ κινείται προς αυτόν με ταχύτητα $v_1 = -v_0 = -2\text{ m/s}$. Έτσι, θα είχαμε μία κάθετη και ελαστική κρούση του Σ στον ακίνητο τοίχο, με αποτέλεσμα το σώμα Σ να κινούταν με αντίθετη ταχύτητα μετά την κρούση. Δηλαδή, $v'_1 = -v_1 = +2\text{ m/s}$, ως προς τον τοίχο (B). Έτσι, αλλάζοντας σύστημα αναφοράς και επιστρέφοντας πάλι ως προς τον ακίνητο παρατηρητή του εδάφους, θα είναι $v_\Sigma = v'_1 + v_0 = +4\text{ m/s}$.

2) Μετά από κάθε τέτοια κρούση του σώματος Σ με τον πρακτικά αμετάβλητης ταχύτητας τοίχο (B), το σώμα Σ θα αυξάνει το μέτρο της ταχύτητάς του κατά $2v_0 = 4\text{ m/s}$. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι κάθε τους κρούση είναι κάθετη και ελαστική με αντίρροπες ταχύτητες, με αποτέλεσμα να ικανοποιείται σε κάθε τους κρούση η σχέση $v_\Sigma + v'_\Sigma = v_0 + v_0$ ή $v'_\Sigma = -v_\Sigma + 2v_0$.

Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com