ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Θεωρούμε τον αστέρα νετρονίων ομογενή σφαίρα μάζας Μ και ακτίνας R που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω.

Ροπή αδράνειας: $I = 2/5MR^2$

Στροφορμή: $L = I\omega$

Περιστροφική κινητική ενέργεια: $K = 1/2I\omega^2$

Όγκος σφαίρας: $V = 4/3\pi R^3$

1.Ο αστέρας νετρονίων – Pulsar PSR J0952 – 607 είναι ο αστέρας νετρονίων με την μεγαλύτερη μάζα που έχει βρεθεί $M = 2{,}35\ M_H$. Ο αστέρας ανήκει επίσης στην κατηγορία των ταχύτερα περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων γνωστούς ως milisecond Pulsar. Η περίοδός του είναι $P = 1{,}4138$ ms και η γραμμική ταχύτητα στον ισημερινό $V = 44.000$ km/s. Αν μάζα ήλιου $M_H = 2\chi10^{30}$ kg $G = 6{,}67x10^{-11}$ kgm^2kg^{-2} να βρεθούν.

α) Η ακτίνα του, η ένταση της βαρύτητας στην επιφάνειά του και η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνειά του χρησιμοποιώντας Νευτώνεια βαρύτητα.

β) Σε απόσταση $r = 1.600.000$ km από τον αστέρα περιφέρεται σε κυκλική τροχιά ένας φαιός νάνος(αποτυχημένο αστέρι με μάζα $m < 0{,}1M_H$ στο οποίο δεν ξεκίνησαν ποτέ θερμοπυρηνικές αντιδράσεις παραγωγής ενέργειας στον πυρήνα τους). Ο συνοδός φαιός νάνος του αστέρα νετρονίων έχει μάζα $m = 0{,}032\ M_H$, περίοδο $P' = 6{,}42$ h και ακτίνα $R' = 1{,}5x10^5$ km. Να βρεθούν η ένταση της βαρύτητας g' στην επιφάνεια του συνοδού αστέρα, η γραμμική ταχύτητα περιφοράς του και η επιτάχυνση που "αφαιρείται" από την g' ως κεντρομόλος (φυγόκεντρος επιτάχυνση).

γ) Έχει παρατηρηθεί ότι ο αστέρας νετρονίων τραβά ύλη από τον συνοδό του. Στην επιφάνεια του αστέρα νετρονίων συσσωρεύεται μάζα από τον συνοδό με σταθερό ρυθμό 21,8%M_Γ/year όπου $M_\Gamma = 6\chi10^{24}$ kg η μάζα της γης . Όταν η μάζα του γίνει $M' = 3M_H$ η βαρύτητα κερδίζει κατά κράτος την αντίσταση των νετρονίων και το αστέρι καταρρέει σε μαύρη τρύπα χωρίς απώλεια μάζας. Σε πόσα χρόνια θα καταρρεύσει το αστέρι;

Λύση

α) V = 2πR/P => R = VP/2π = 44χ10^6χ1,4138χ10^{-3}/2π => **R = 9900 m**

g = GM/r^2 = 6,67x10^{-11}x2,35x2x10^{30}/99^2x10^4 => **g = 3,2x10^{12} N/kg = 3,2χ$10^{11}$$g_0$ = 3,2 τρισεκατομμύρια φορές μεγαλύτερη από την ένταση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης.**

Ολική ενέργεια $E_{ολ}$ = 0 => $\frac{-GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_\delta^2$= 0 => $υ_δ$ = $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ => **$υ_δ$ = 251657 km/s ή $υ_δ$ = 251657/300000 = 0,84c ή 84%c**

β) g' = Gm/R'^{2} = 6,67x10^{-11}x0,032x2x10^{30}/$1,5^2$x10^{16} => **g' = 190 N/kg**

V = 2πR'/P = 2πχ1,5x10^5/6,42h => **V = 146803,4 km/h**

$α_c$ = 4$π^2$χR'/p^2 = 4$π^2$χ1,5χ10^8/$6,42^2$χ3600^2 => **$α_c$ = 11 m/s^2**

γ) Προκειμένου ο αστέρας να αποκτήσει μάζα 3M_H πρέπει να προσλάβει ύλη 3 – 2,35 = 0,65M_H = 1,3χ10^{30} kg

Ο αστέρας προσλαμβάνει 0,218$M_Γ$ = 1,3χ10^{24} kg σε ένα έτος

Για τα 1,3χ10^{30} kg **θα χρειαστεί** 1,3χ10^{30}/1,3χ10^{24} = **1 εκατομμύριο χρόνια.**

2. Η πιο ακραία πυκνότητα που συναντάμε στον πλανήτη μας είναι η πυκνότητα των ατομικών πυρήνων. Έχει βρεθεί με ικανοποιητική ακρίβεια ότι οι σφαιρικοί πυρήνες των ατόμων έχουν ακτίνα r που εξαρτάται από τον μαζικό αριθμό A του πυρήνα σύμφωνα με τη σχέση r = 1,2χ10^{-15}χ $A^{1/3}$.

α) Δείξτε ότι η πυκνότητα όλων των πυρήνων είναι ίδια και υπολογίστε την. Δίνεται μονάδα ατομικής μάζας 1u = 1,66x10^{-27} kg.

β) Ένας τυπικός αστέρας νετρονίων έχει μάζα M = 2M_H όπου M_H = 2χ10^{30} kg και ακτίνα R = 16 km. Να βρείτε την πυκνότητα του αστέρα νετρονίων και να την συγκρίνεται με αυτή των ατομικών πυρήνων.

γ) Ας θεωρήσουμε έναν κόκκο αλατιού ακμής α = 10^{-3} m. Αν ο κόκκος ήταν ύλη του παραπάνω αστέρα νετρονίων πόση μάζα θα είχε;

Λύση

α) Πυκνότητα πυρήνα ρ_π = μάζα πυρήνα/V = 3Αx1,66x10^{-27}/4πr^3= 3Αx1,66x10^{-27}/4π(1,2χ10^{-15}χ$A^{1/3}$)^3 = 3χ1,66χ10^{-27}/4πχ$1,2^3$χ10^{-45} =>

ρ_π = 2,29χ10^{17} kg/m^3

β) Πυκνότητα αστέρα νετρονίων ρ = 3χ2M_H/4πR^3 = 12x10^{30}/4πχ16^3χ10^9 => **ρ = 2,33χ10^{17} kg/m^3**

Δηλαδή οι αστέρες νετρονίων έχουν πυκνότητες της ίδιας τάξης μεγέθους με τους ατομικούς πυρήνες, κάτι σαν τεράστιοι πυρήνες στο διάστημα.

γ) V = α^3 = 10^{-9} m^3

m = ρV = 2,33x10^{17}x10^{-9} => **m = 233.000.000 kg ή 233.000 tn !!!**

3. Ελεύθερη πτώση σε αστέρα νετρονίων; Ας πούμε από 1 cm στον αστέρα νετρονίων της πρώτης άσκησης.

Θα προσεδαφιστούμε με υ =$\sqrt{2gh}$ = $\sqrt{2x3{,}2x10^{12}x10^{-2}}$ = 2,53x10^5 m/s ή **υ = 910.800 km/h !!!**

4. Ένας millisecond Pulsar έχει μάζα 2 ηλιακές, ακτίνα 20 km και περιστρέφεται με περίοδο P = 8 ms. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σώμα μάζας m = 80 kg στη γη και το μεταφέρουμε στον ισημερινό του αστέρα χωρίς να συνθλιβεί.

α) Ποιο το βάρος του στη γη αν g_Γ = 10 N/kg; Ποιο το πραγματικό βάρος του στον αστέρα νετρονίων; Ποιό το φαινόμενο βάρος του σώματος στον αστέρα νετρονίων αν μπορούσαμε να το ζυγίσουμε με μία ζυγαριά;

β) Ο αστέρας δεν έχει εσωτερική πηγή ενέργειας έτσι ακτινοβολεί εις βάρος της περιστροφικής κινητικής του ενέργειας κάτι που ελαττώνει την περίοδο περιστροφής με ρυθμό 3χ10^{-14} s για κάθε δευτερόλεπτο. Σε πόσα χρόνια το παραπάνω σώμα μάζας m θα έχει φαινόμενο βάρος μηδέν όπως στο εσωτερικό του διεθνούς διαστημικού σταθμού; Μπορεί να υποστηριχτεί η ύπαρξη του αστέρα με αυτή την περίοδο;

Λύση

α) Στη γη **$B = mg_\Gamma = 800$ N**

Στον αστέρα νετρονίων $g = GM/R^2 = 6{,}67x10^{-11}x4x10^{30}/4x10^8$ => **$g = 6{,}67x10^{11}$ N/kg**

Πραγματικό βάρος στον αστέρα νετρονίων **$B_\Pi = 5{,}336\chi10^{13}$ N**

Κεντρομόλος επιτάχυνση $\alpha_c=4\pi^2R/T^2=4\pi^2\chi2\chi10^4/10^{-6}$=>

$\alpha_c = 1{,}97\chi10^{11}$ N/kg

Η κεντρομόλος επιτάχυνση αφαιρείται από την βαρυτική επιτάχυνση(ή g – φυγόκεντρος) ώστε η φαινόμενη βαρυτική επιτάχυνση να είναι $g – \alpha_c$ και το φαινόμενο βάρος που δείχνει η ζυγαριά $B_\phi = m(g – \alpha_c) = 80x4{,}7x10^{11}$ N => **$B_\phi = 3{,}760\chi10^{13}$ N.**

β) Για να γίνει το φαινόμενο βάρος μηδέν πρέπει $\alpha_c = g$ => $4\pi^2R/T^2 = g$ => $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\chi10^4}{6{,}67\chi10^{11}}} = 10^{-3}$ s

δηλαδή πρέπει να μειωθεί η περίοδος κατά $7\chi10^{-3}$ s και για αυτό θα χρειαστούν $7\chi10^{-3}/3\chi10^{-14} = 2{,}33\chi10^{11}$ s ή **7388,4 χρόνια.**

Προφανώς σε αυτές τις 1000 στροφές ανά δευτερόλεπτο το αστέρι νετρονίων θα διαλυθεί.

5. Ο μητρικός πυρήνας ενός αστέρα νετρονίων είχε ακτίνα $r = 5\chi10^5$ km και περιστρεφόταν με συχνότητα f = 1 περιστροφή/30 days. Ο αστέρας νετρονίων που προκύπτει χωρίς απώλεια μάζας έχει ακτίνα R = 10 km. Με την αρχή διατήρησης της στροφορμής να βρείτε τη συχνότητα f' με την οποία περιστρέφεται ο αστέρας νετρονίων.

Λύση

$L = L'$ => $I\omega = I'\omega'$ => $2/5Mr^22\pi f = 2/5MR^22\pi f'$ => $f' = f(r/R)^2$ => f' => $f' = 1:(30\chi24\chi3600)\chi(25\chi10^{10}/10^2$ => **f' = 965 στροφές/sec => T = 1 ms δηλαδή πρόκειται για millisecond Pulsar.**

6. Περιστασιακά ένα αστέρι νετρονίων υφίσταται μία απροσδόκητη ξαφνική επιτάχυνση. Μια πιθανή εξήγηση είναι σεισμικά γεγονότα στον αστέρα που έχουν σαν αποτέλεσμα την καθίζηση του στερεού φλοιού. Το 1975 παρατηρήθηκε ένα αστέρι νετρονίων με γωνιακή ταχύτητα ω_0 =

70,4 rad/s που παρουσίασε ένα τέτοιο συμβάν όπου η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται κατά $\Delta\omega = 2{,}01\chi 10^{-6}\omega_0$. Αν η ακτίνα του αστέρα πριν τον αστρικό σεισμό ήταν 11 km ποια η νέα του ακτίνα.

Λύση

Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής $I\omega = I_0\omega_0 \Rightarrow 2/5MR_0^2\omega_0 = 2/5MR^2\omega \Rightarrow R = R_0(\omega_0/\omega)^2 = 11.000.000$ mm$((\omega_0/(\omega_0 + 2{,}01\chi 10^{-6}\omega_0)) \Rightarrow$ R = 10999989 mm δηλαδή ελάττωση κατά 11 mm.

7. Ο αστέρας νετρονίων της άσκησης 1 έχει μαγνητικό πεδίο $B = 10^{11}$ T. Ένα πρωτόνιο επιταχύνεται κοντά σε έναν πόλο σε ταχύτητα $\upsilon = 10^{-4}$ m/s. Δείξτε ότι η δύναμη Lorentz κερδίζει την βαρύτητα.
Δίνονται: Μάζα πρωτονίου $m_p = 1{,}67262x10^{-27}$ kg , $q_p = 1{,}6x10^{-19}$ C.

Λύση

Βάρος $W_g = mg = 1{,}67262x10^{-27}x3{,}2x10^{12} \Rightarrow$ $\mathbf{W_g = 5{,}352384x10^{-15}}$ **N**
Δύναμη Lorentz $F_L = B\upsilon q = 10^{11}x10^{-4}x1{,}6x10^{-19} \Rightarrow$ $\mathbf{F_L = 1{,}6x10^{-12} > W_g}$