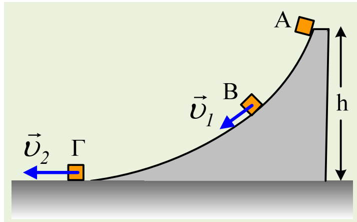
Όταν η τροχιά δεν έχει σταθερή κλίση



Ένα μικρό σώμα μάζας 0,4kg αφήνεται να κινηθεί σε κατακόρυφο επίπεδο, από τη θέση Α, που βρίσκεται σε ύψος h=1,8m πάνω από το οριζόντιο επίπεδο, κατά μήκος μιας καμπύλης τροχιάς, όπως του σχήματος και φτάνει στο οριζόντιο επίπεδο (θέση Γ) με ταχύτητα υ_2=6m/s.

i) Να εξεταστεί αν εμφανίζονται τριβές κατά την παραπάνω κίνηση του σώματος.

ii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ταχύτητας (μέτρο και κατεύθυνση) του σώματος, μεταξύ των θέσεων Α και Γ.

iii) Στη διάρκεια της παραπάνω κίνησης, κάποια στιγμή το σώμα πέρασε από μια θέση Β, η οποία βρίσκεται σε ύψος h_1=1m, με ταχύτητα υ_1 η οποία σχημάτιζε με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ=30°. Για τη στιγμή αυτή να βρεθούν:

α) το μέτρο της ταχύτητας υ_1.

β) Η επιτάχυνση του σώματος.

γ) Η ισχύς του βάρους.

δ) Οι ρυθμοί μεταβολής της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας του σώματος.

Δίνονται ημ30°= ½, συν30°= √3/2 και g=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Το σώμα, τη στιγμή που αφήνεται να κινηθεί, βρίσκεται σε ύψος h από το οριζόντιο επίπεδο, στο οποίο μπορούμε να ορίσουμε ότι $U_{ορ}$=0. Αλλά τότε έχει δυναμική ενέργεια:

$$U_A=mgh= 0,4\cdot 10\cdot 1,8J=7,2J$$

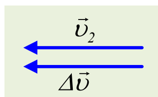
Μόλις φτάνει στο οριζόντιο επίπεδο έχει κινητική ενέργεια:

$$K_\Gamma=\frac{1}{2}m\upsilon_2^2=\frac{1}{2}0,4\cdot 6^2\,J=7,2J$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε πλήρη μετατροπή της αρχικής δυναμικής ενέργειας σε κινητική ενέργεια, χωρίς κάποιο μέρος της να μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας κάποιας τριβής. Άρα δεν εμφανίστηκε τριβή κατά την παραπάνω κίνηση του σώματος.

Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν εφαρμόζαμε και το Θ.Μ.Κ.Ε. και υπολογίζαμε το έργο της τριβής. Θα προέκυπτε μηδενικό, πράγμα που θα μας οδηγούσε στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχουν τριβές.

ii) Η μεταβολή της ταχύτητας μεταξύ δύο θέσεων (εδώ θέσεις Α και Γ) είναι το διάνυσμα:

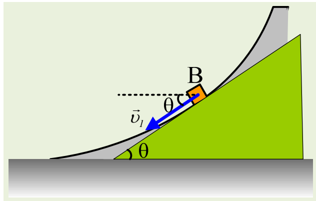


$$\Delta\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_{τελ}-\vec{\upsilon}_{αρχ}\rightarrow\Delta\vec{\upsilon}_{A\Gamma}=\vec{\upsilon}_\Gamma-\vec{\upsilon}_A\rightarrow$$

$$\Delta\vec{\upsilon}_{A\Gamma}=\vec{\upsilon}_\Gamma-0=\vec{\upsilon}_\Gamma$$

Η ταχύτητα όμως $\vec{\upsilon}_\Gamma$ είναι οριζόντια, έχοντας τη διεύθυνση του οριζοντίου επιπέδου, συνεπώς και η μεταβολή της ταχύτητας $\Delta\vec{\upsilon}$ είναι επίσης οριζόντια μέτρου 6m/s.

iii) Αν στη θέση Β το διάνυσμα της ταχύτητας σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση, την ίδια κλίση παρουσιάζει και η τροχιά στο σημείο Β. Μπορούμε δηλαδή να φανταστούμε ένα κεκλιμένο επίπεδο, το οποίο να προσεγγίζει την τροχιά στη θέση Β, όπως φαίνεται στο σχήμα, όπου η ταχύτητα υ_1 είναι παράλληλη με το κεκλιμένο επίπεδο.



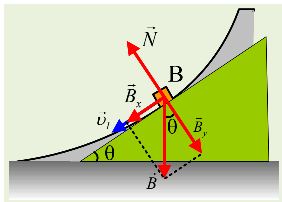
α) Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργεια μεταξύ των θέσεων Α και Β:

$$K_A+U_A=K_B+U_B\to$$

$$0+mgh=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+mgh_1\to\frac{1}{2}m\upsilon_1^2=mg\left(h-h_1\right)\to$$

$$\upsilon_1=\sqrt{2g\left(h-h_1\right)}=\sqrt{2\cdot 10\cdot\left(1{,}8-1\right)}m/s=4m/s$$

β) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση Β. Αναλύοντας το βάρος σε δυο συνιστώσες, μια παράλληλη και μια κάθετη στην τροχιά. Παίρνοντας το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής έχουμε:



$$\Sigma F_x=m\cdot\alpha\to B_x=m\cdot\alpha\to\ mg\cdot\eta\mu\theta=m\cdot\alpha\to$$

$$\alpha=g\cdot\eta\mu\theta=10\cdot \tfrac{1}{2}\ m/s^2=5m/s^2.$$

Ίδιας κατεύθυνσης με την ταχύτητα υ_1.

γ) Η (στιγμιαία) ισχύς του βάρους, είναι ίση με την ισχύ της συνιστώσας B_x, αφού η συνιστώσα B_y δεν παράγει έργο μιας και είναι κάθετη στη ταχύτητα (μετατόπιση).

$$P_B=P_{Bx}=B_x\cdot\upsilon=mg\cdot\eta\mu\theta\cdot\upsilon_1=0{,}4\cdot 10\cdot \tfrac{1}{2}\cdot 4W=8W.$$

δ) Το έργο του βάρους συνδέεται με τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας με την εξίσωση:

$$W_B=U_{\alpha\rho\chi}-U_{\tau\varepsilon\lambda}\to W_B=-\Delta U\to$$

$$\frac{\Delta W_B}{\Delta t}=-\frac{\Delta U}{\Delta t}\to\frac{\Delta U}{\Delta t}=-P_B=-8J/s$$

Αλλά αφού η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t}+\frac{\Delta U}{\Delta t}=0\to\frac{\Delta K}{\Delta t}=+8J/s$$

Σχόλιο:

Και για να αφήσουμε λίγο στην άκρη τα μαθηματικά, τη στιγμή που το σώμα περνά από τη θέση Β το βάρος **παράγει** έργο 8J/s. Αυτό όμως σημαίνει ότι **μειώνεται** κατά 8J/s η δυναμική ενέργεια και **αυξάνεται** κατά το ίδιο ποσό η κινητική ενέργεια.

dmargaris@gmail.com