ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ – ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

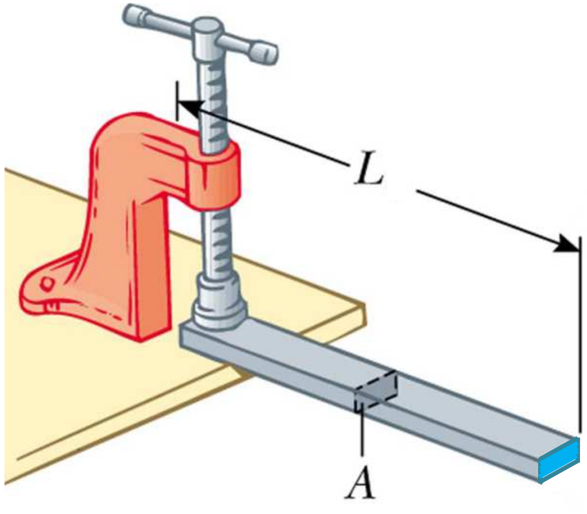
Παραμόρφωση Εφελκυσμού

Ισοτροπική Παραμόρφωση Όγκου

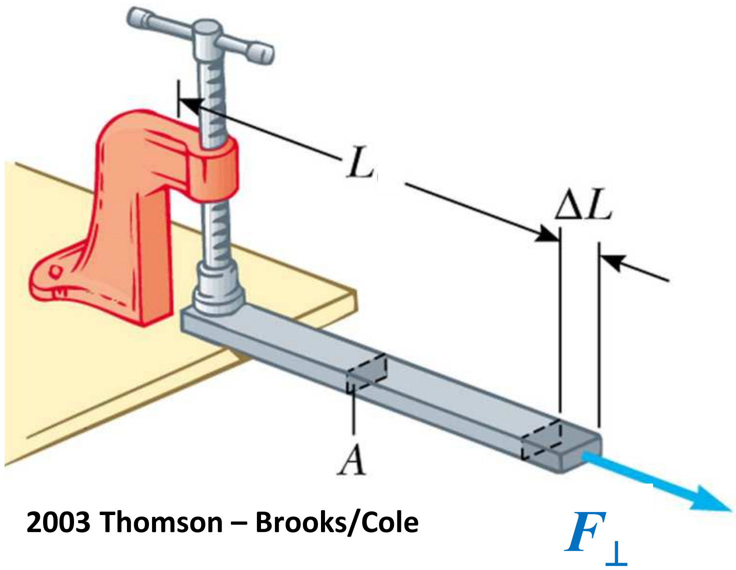
Διατμητική Παραμόρφωση

Παραμόρφωση Κάμψης

Παραμόρφωση Εφελκυσμού



2003 Thomson – Brooks/Cole



2003 Thomson – Brooks/Cole

Νόμος του Hook

$$\frac{\text{Τaση Εφελκυσμού}}{\text{Σχετικη Παραμορφωση}} = \text{Μετρο Ελαστικοτητας}$$

$$\frac{\text{Θλιπτικη Τaση}}{\text{Σχετικη Παραμορφωση}} = \text{Μετρο Ελαστικοτητας}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Τάση Εφελκυσμού}\\ \text{ή}\\ \text{Θλιπτική Τάση}\end{array}} = \sigma = \frac{F_\perp}{A}$$

$$\text{Σχετική Παραμόρφωση} = \varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

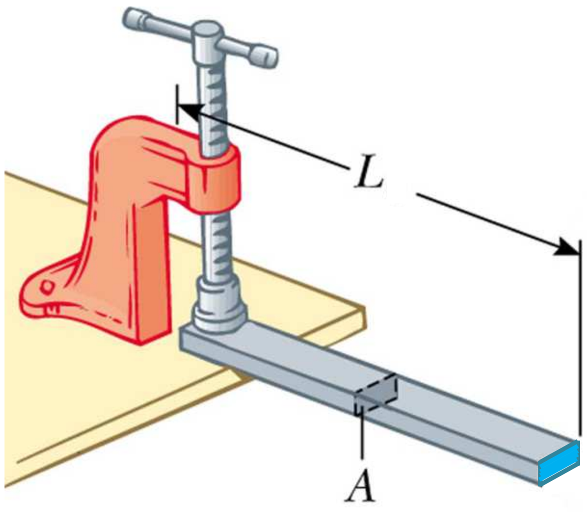
$$\text{Μέτρο Ελαστικότητας Young}: \ Y = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\sigma = Y\varepsilon}$$

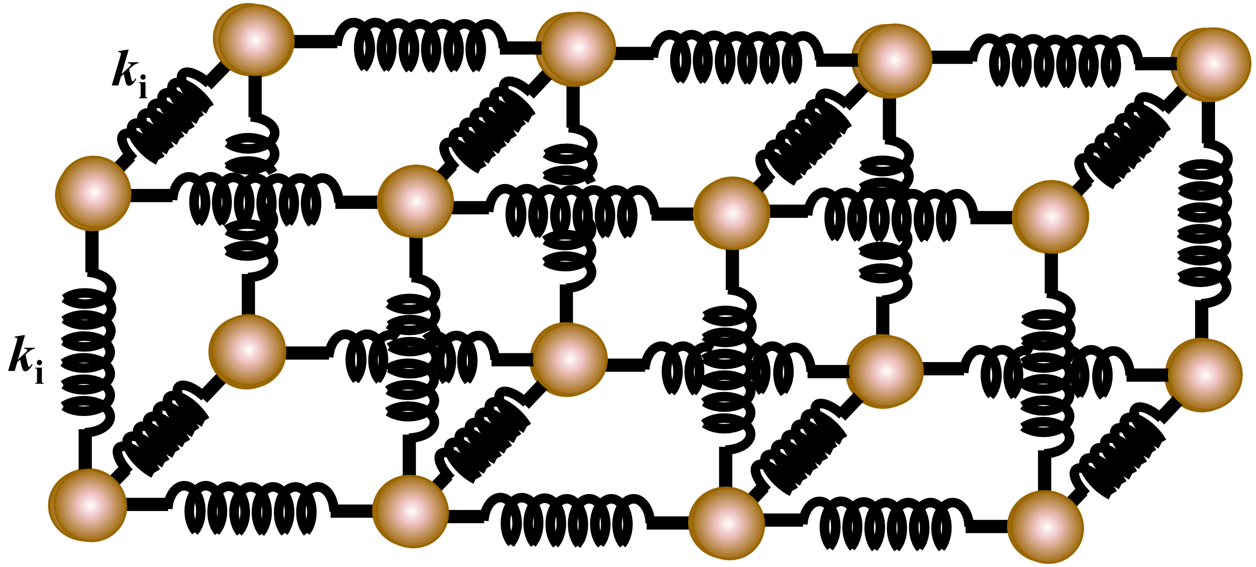
$$\boxed{\frac{F_\perp}{A} = Y\frac{\Delta L}{L}}$$

Νόμος του Hook

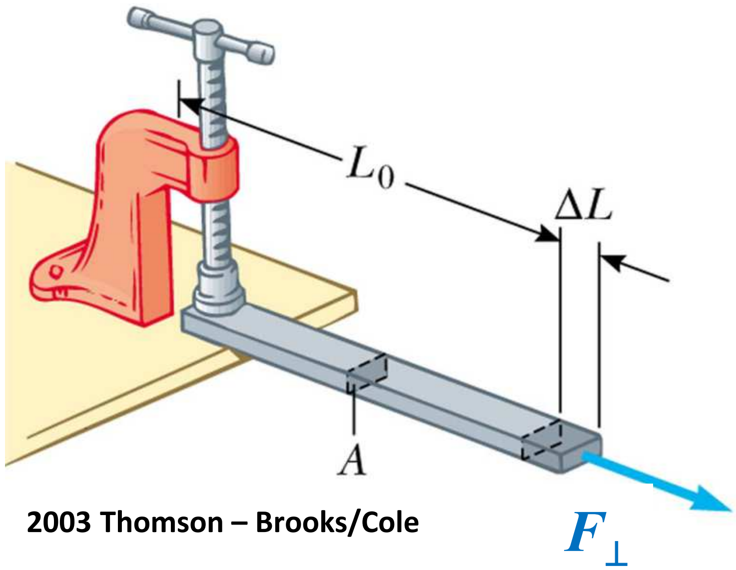
Ερμηνεία του Νόμου του Hook



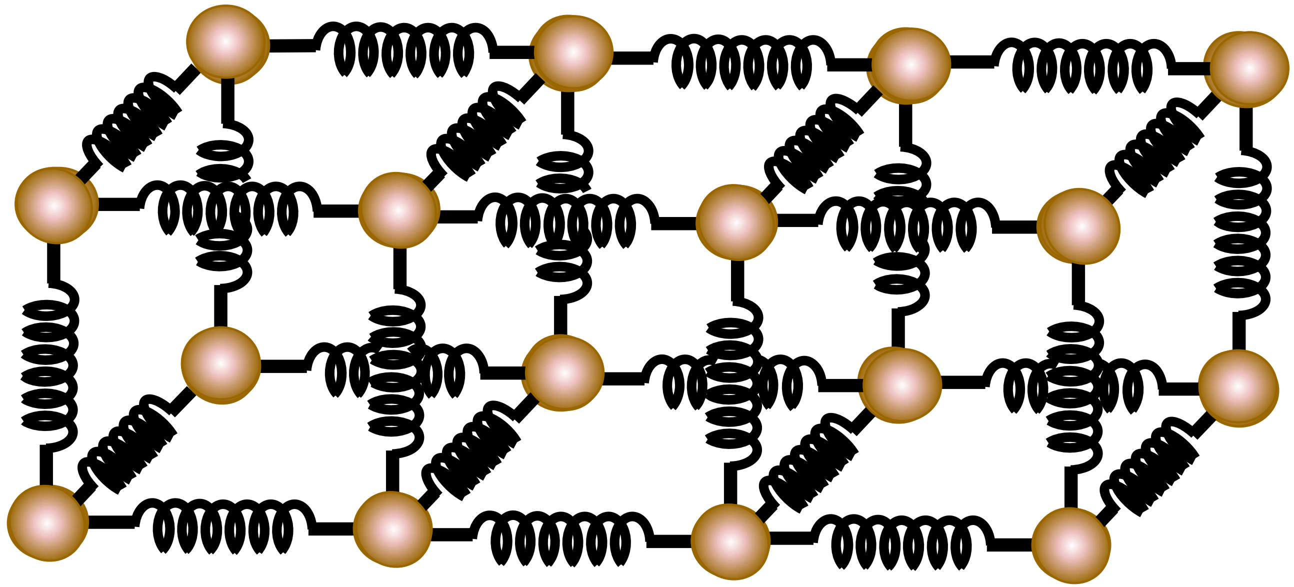
2003 Thomson – Brooks/Cole



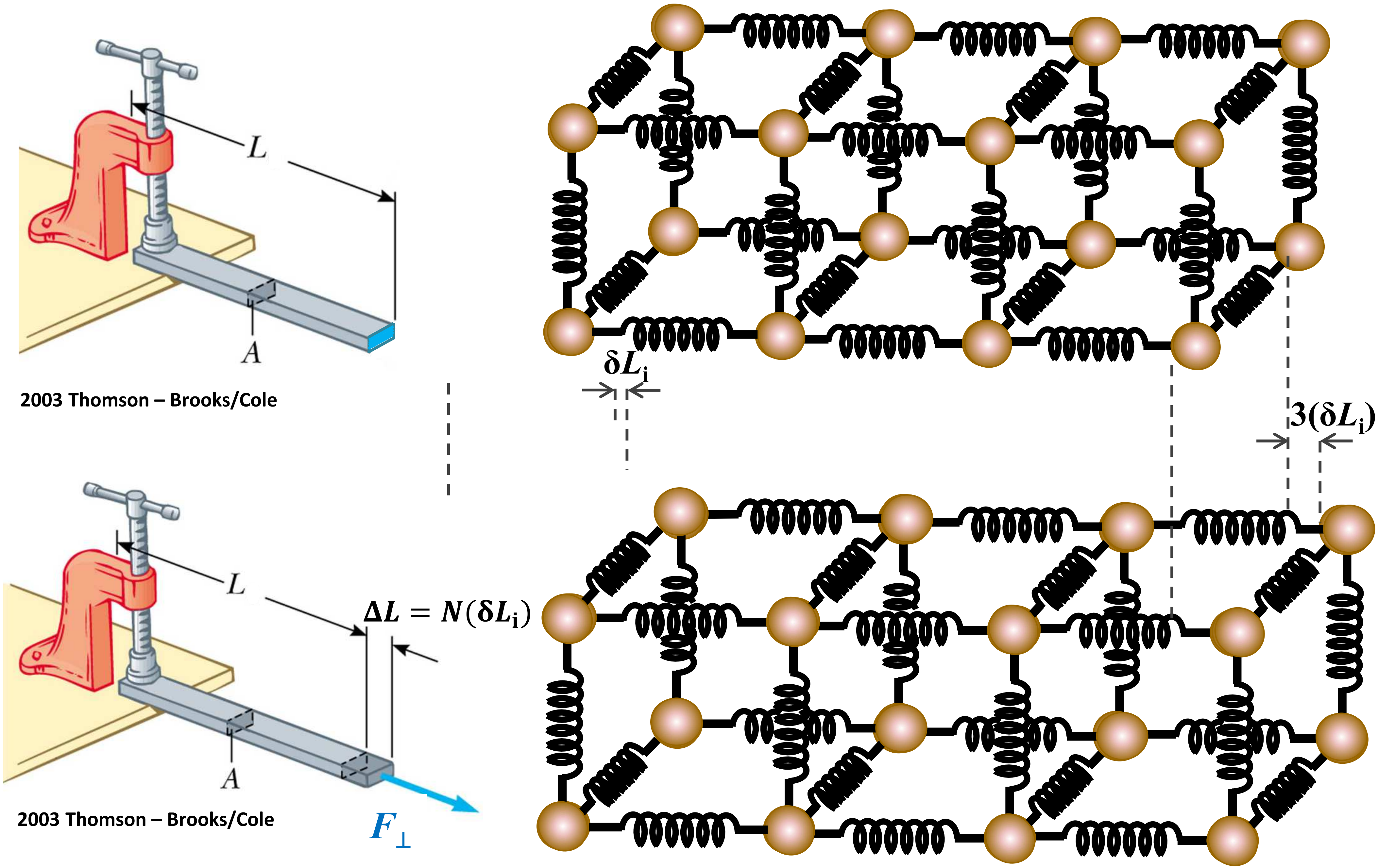
Κάθε μοριακός δεσμός αντιστοιχεί σε στοιχειώδες ελατήριο με σταθερά k_i



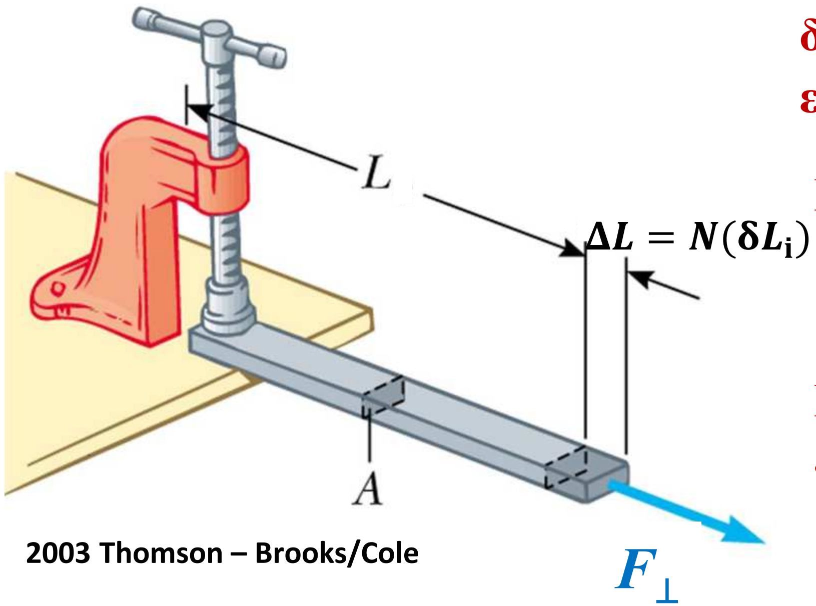
2003 Thomson – Brooks/Cole



Ερμηνεία του Νόμου του Hook



Ερμηνεία του Νόμου του Hook



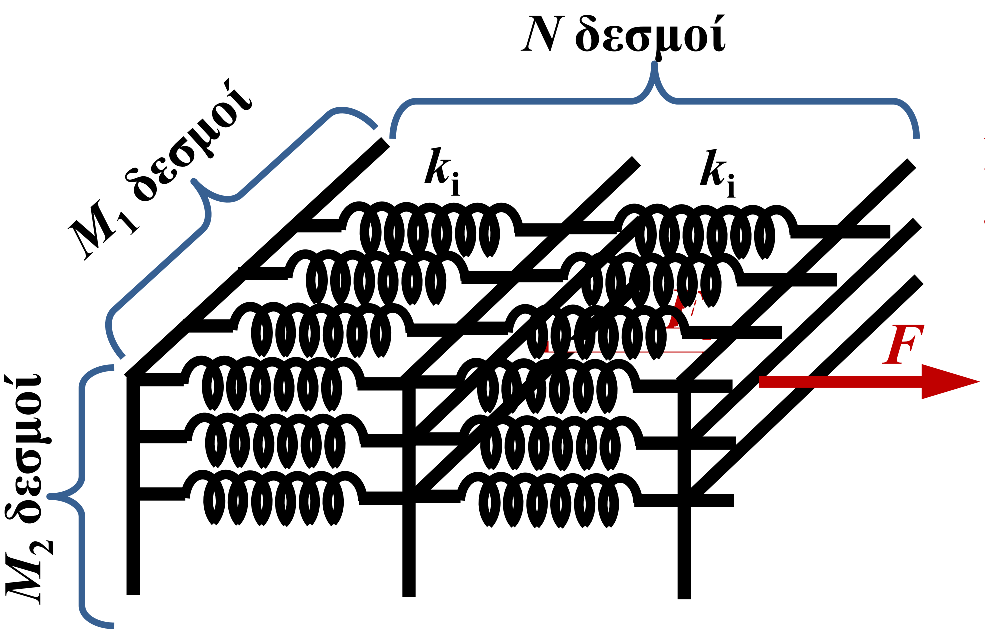
Σε μια εγκάρσια διατομή της ράβδου υπάρχουν M_1M_2 ατομικοί δεσμοί που ισοδυναμούν με M_1M_2 παράλληλα στοιχειώδη ελατήρια με σταθερά k_i το κάθε ένα.

Η συνολική σταθερά ελατηρίου των M_1M_2 ελατηρίων είναι:

$$k_2 = M_1M_2k_i$$

Η δύναμη F που εφελκύει τη ράβδο είναι ίδια σε όλες τις εγκάρσιες διατομές της ράβδου.

Η δύναμη F προκαλεί στοιχειώδη επιμήκυνση (δL_i) στα M_1M_2 ελατήρια για την οποία ισχύει ο νόμος του Hook:



$$F = k_2(\delta L_i) \Rightarrow F = M_1M_2k_i(\delta L_i)$$

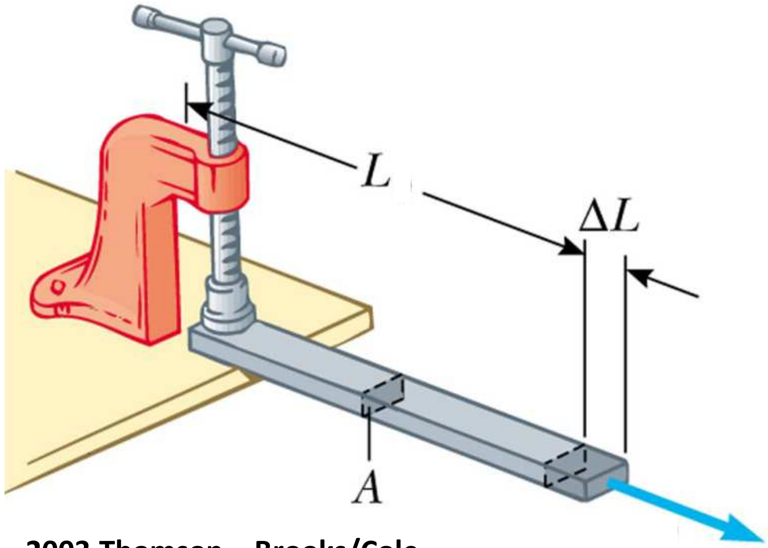
Κατά μήκος της ράβδου υπάρχουν N δέσμες M_1M_2 ελατηρίων.

Η συνολική παραμόρφωση της ράβδου είναι:

$$\Delta L = N(\delta L_i)$$

$$F = \frac{M_1M_2}{N}k_i(\Delta L) \Rightarrow \boxed{F = k(\Delta L)}$$

Ερμηνεία του Νόμου του Hook



2003 Thomson – Brooks/Cole

$$F_{\perp} = k(\Delta L)$$

όπου $k = \dfrac{M_1 M_2}{N} k_{\mathrm{i}}$

$$F_{\perp} = \sigma A$$

$$\Delta L = \varepsilon L$$

$$F_{\perp} = \frac{M_1 M_2}{N} k_i \Delta L$$

$$\sigma A = \frac{M_1 M_2}{N} k_i \varepsilon L$$

$$\sigma = \frac{M_1 M_2}{A} \frac{L}{N} k_i \varepsilon$$

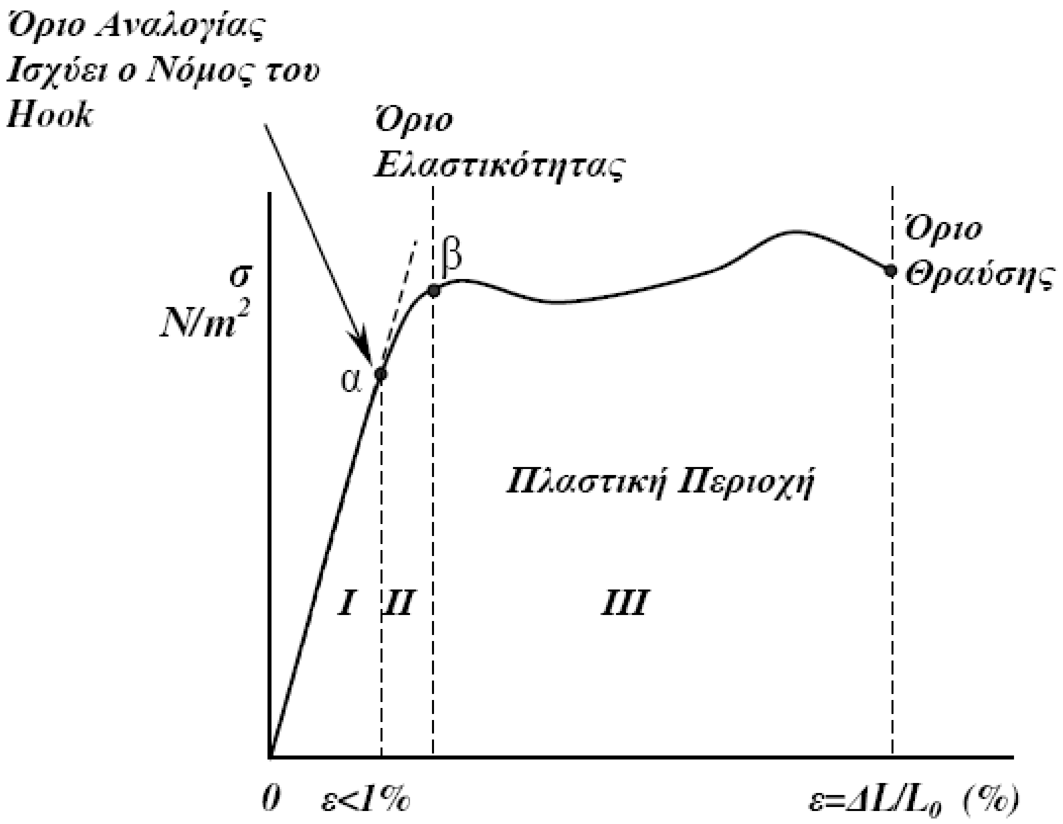
$$\sigma = Y\varepsilon$$

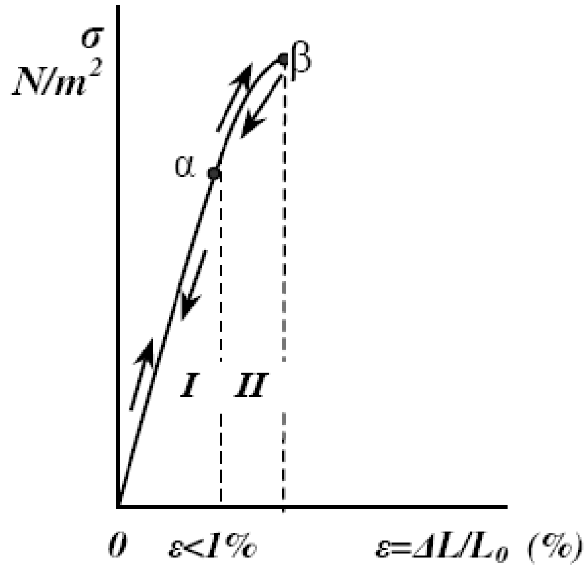
$$Y = \frac{M_1 M_2}{A} \frac{L}{N} k_i$$

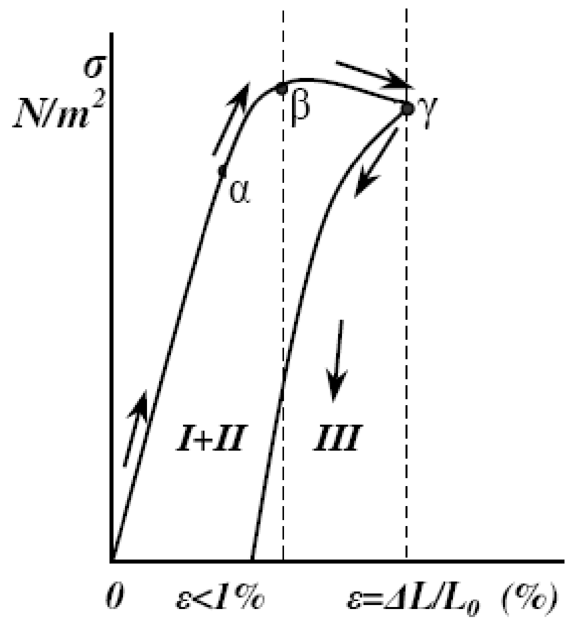
$$A \propto M_1 M_2$$
$$L \propto N$$

Μέτρο Ελαστικότητας Young είναι ανεξάρτητο των διαστάσεων της ράβδου

Ελαστικότητα και Πλαστικότητα







Ισοτροπική Παραμόρφωση

Ισοτροπική παραμόρφωση υφίσταται ένα σώμα όταν αυτό συμπιέζεται ομοιόμορφα σε όλες τις πλευρές του.

Στοιχειώδης μεταβολή της Πίεσης: dp

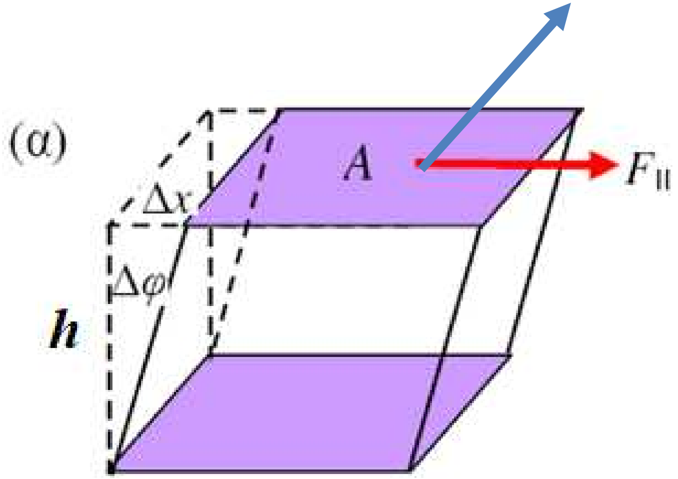
Στοιχειώδης μεταβολή του όγκου: dV

$$dp = -B\frac{dV}{V}$$

$B =$ **Μέτρο Ελαστικότητας Όγκου**

Αιτιολόγηση αρνητικού πρόσημου:
$$\begin{cases} dp > 0 \quad \Rightarrow \quad dV < 0 \\ dp < 0 \quad \Rightarrow \quad dV > 0 \end{cases}$$

Διατμητική Παραμόρφωση



$$\textbf{Μέτρο διάτμησης} \equiv S = \frac{\textbf{Διατμητικη Ταση}}{\textbf{Διατμητικη Παραμόρφωση}}$$

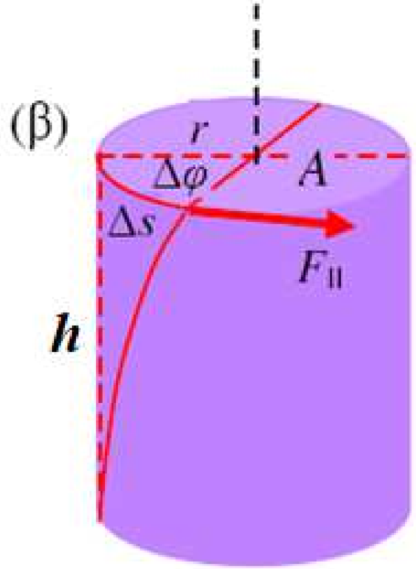
Διατμητική Τάση: $\sigma_s = \dfrac{F_{\parallel}}{A}$

Διατμητική Παραμόρφωση: $\varepsilon_s = \dfrac{\Delta x}{h} = \Delta\varphi \ (rad)$

Μέτρο διάτμησης: $S = \dfrac{\sigma_s}{\varepsilon_s}$

$$S = \frac{\frac{F_{\parallel}}{A}}{\frac{\Delta x}{h}} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_{\parallel}}{A} = S\frac{\Delta x}{h} \quad \Rightarrow \quad F_{\parallel} = S\frac{A}{h}\Delta x$$

Διατμητική Παραμόρφωση



Μέτρο διάτμησης $\equiv S = \dfrac{\textbf{Διατμητικη Ταση}}{\textbf{Διατμητικη Παραμόρφωση}}$

Μέτρο διάτμησης: $S = \dfrac{\sigma_s}{\varepsilon_s}$

Διατμητική Τάση: $\sigma_s = \dfrac{F_\parallel}{A}$

Διατμητική Παραμόρφωση: $\varepsilon_s = \dfrac{\Delta s}{h} = \dfrac{r}{h}\Delta\varphi \ (rad)$

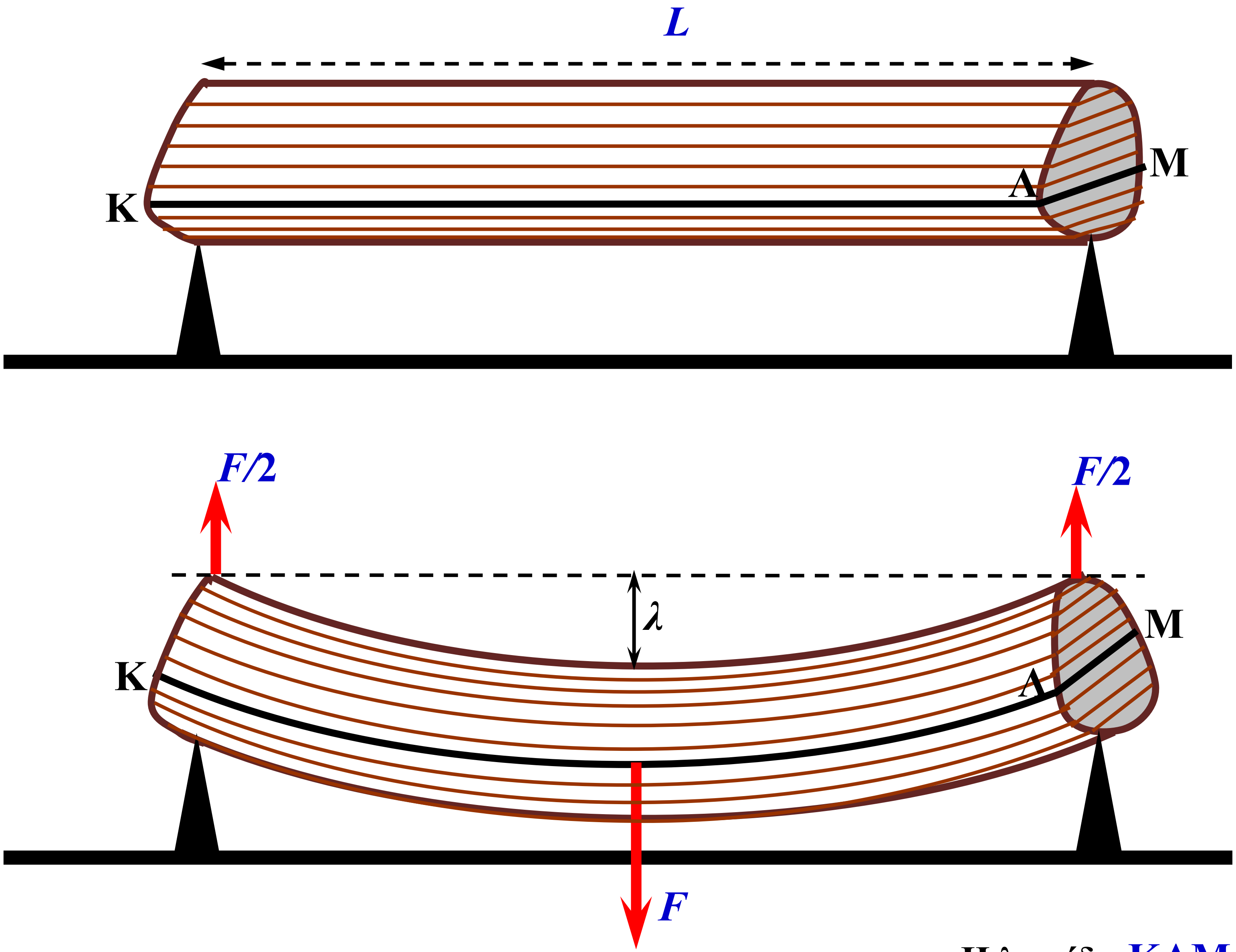
$$S = \frac{\frac{F_\parallel}{A}}{\frac{r}{h}\Delta\varphi} \Rightarrow$$

$$\frac{F_\parallel}{A} = S\frac{r}{h}\Delta\varphi \quad \Rightarrow \quad F_\parallel = S\frac{rA}{h}\Delta\varphi \quad \Rightarrow$$

$$F_\parallel r = S\frac{r^2 A}{h}\Delta\varphi \quad \Rightarrow \quad F_\parallel r = S\frac{\pi r^2 A}{\pi h}\Delta\varphi \quad \Rightarrow \quad \tau = S\frac{A^2}{\pi h}\Delta\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \kappa\,\Delta\varphi}$$

$\kappa = S\dfrac{A^2}{\pi h}$ **Σταθερά επαναφοράς στρέψης**

Παραμόρφωση Κάμψης



Διαιρούμε τη ράβδο σε παράλληλες λωρίδες πάχους *dy*.

Μια δύναμη *F* κάμπτει τη ράβδο κάμπτοντας παράλληλα και τις λωρίδες.

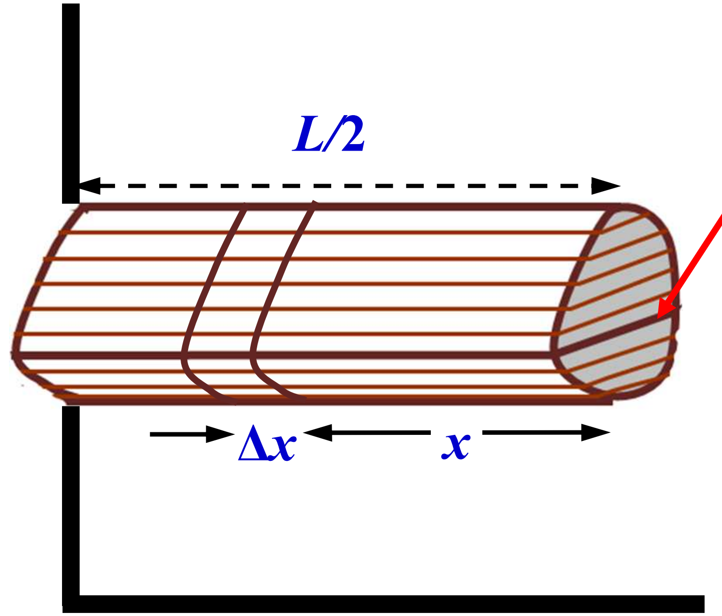
Ο λωρίδες που είναι πάνω από τη λωρίδα ΚΛΜ συνθλίβονται.

Ο λωρίδες που είναι κάτω από τη λωρίδα ΚΛΜ εφελκύονται.

Η λωρίδα ΚΛΜ ονομάζεται ουδέτερη.

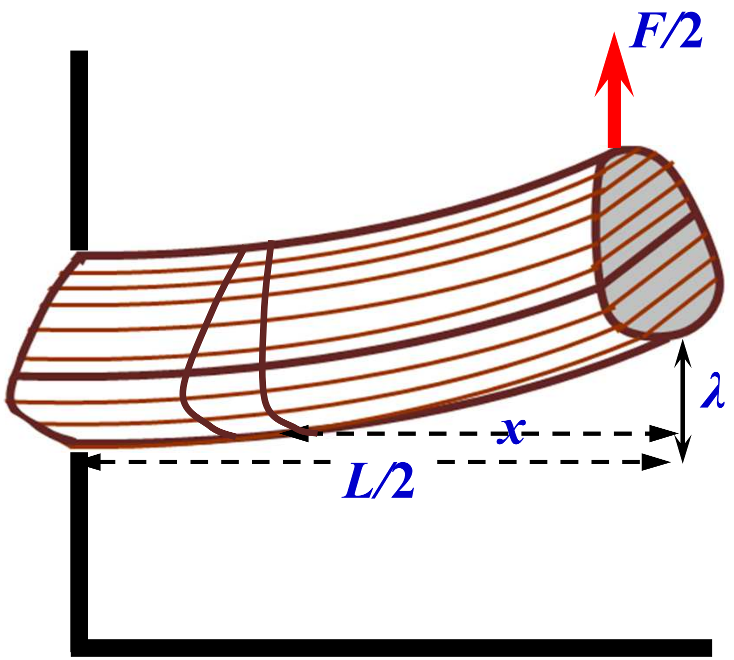
Η λωρίδα ΚΛΜ δεν συνθλίβεται ούτε εφελκύεται.

Παραμόρφωση Κάμψης



Εξετάζουμε το δεξιό ήμισυ της ράβδου δεχόμενοι ότι η ράβδος είναι στερεωμένη στο μέσο της.

Επιλέγουμε τμήμα της ράβδου με μήκος Δx που απέχει απόσταση x από το δεξιό άκρο της.

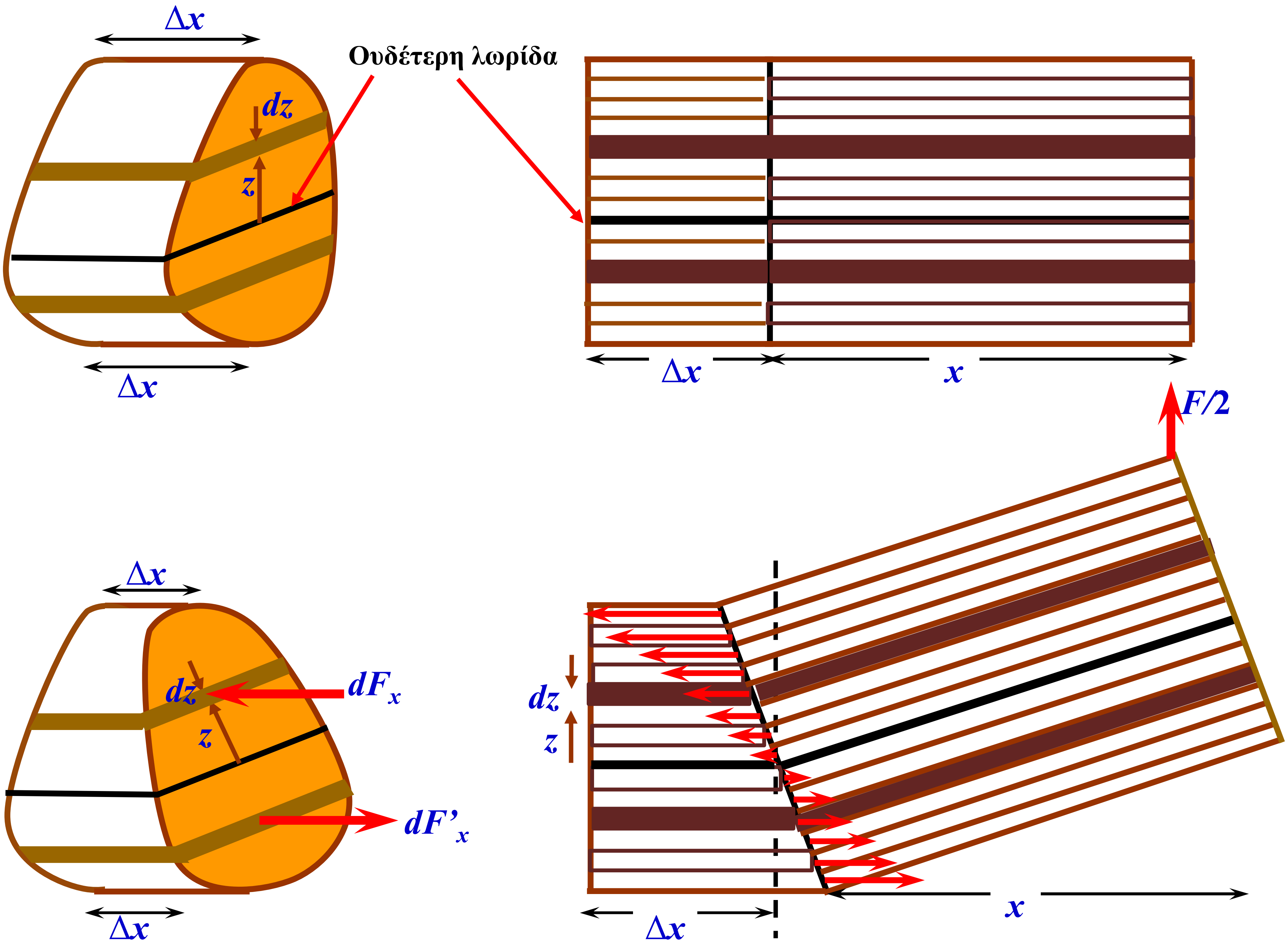


Η δύναμη $F/2$ κάμπτει προς τα πάνω το δεξιό άκρο της ράβδου κατά διάστημα λ.

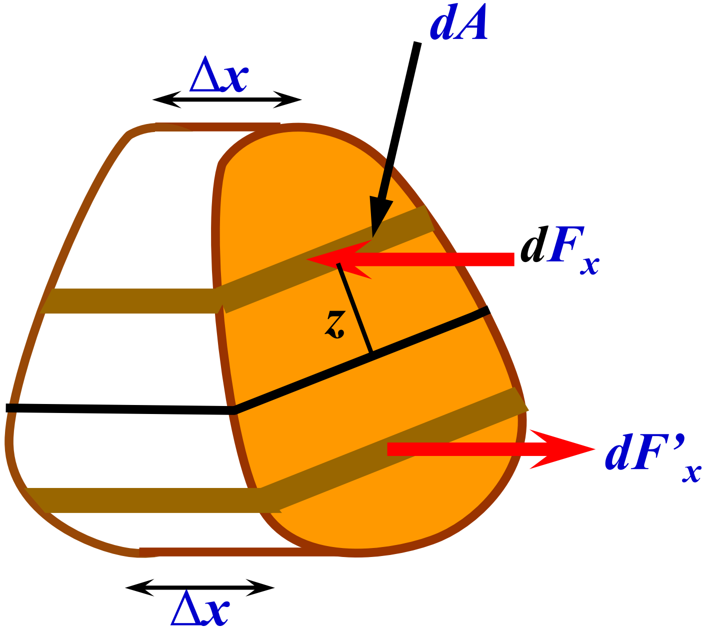
Το επιλεγμένο τμήμα της ράβδου παραμορφώνεται.

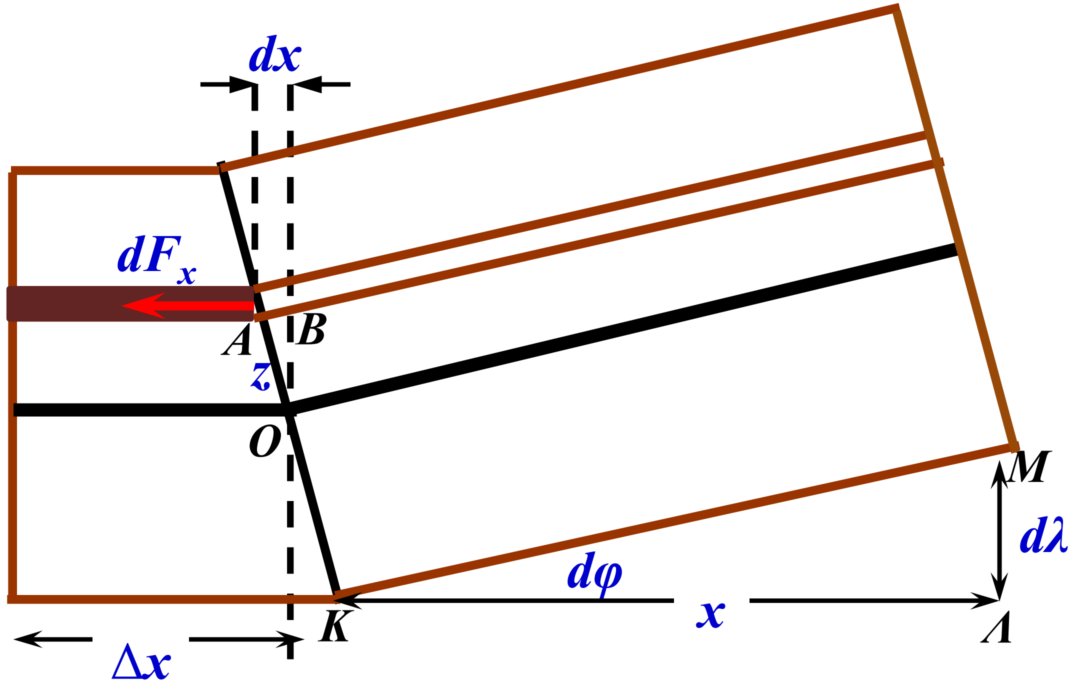
Συνολική ροπή στη θέση x: $\tau = \dfrac{F}{2}x$

Παραμόρφωση Κάμψης



Παραμόρφωση Κάμψης





Στοιχειώδη ροπή δύναμης dF_x ως προς σημείο O:

$$d\tau = z\, dF_x$$

Νόμος Hook στην επιλεγμένη λωρίδα:

$$\frac{dF_x}{dA} = Y\frac{dx}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad dF_x = Y\frac{dx}{\Delta x}dA$$

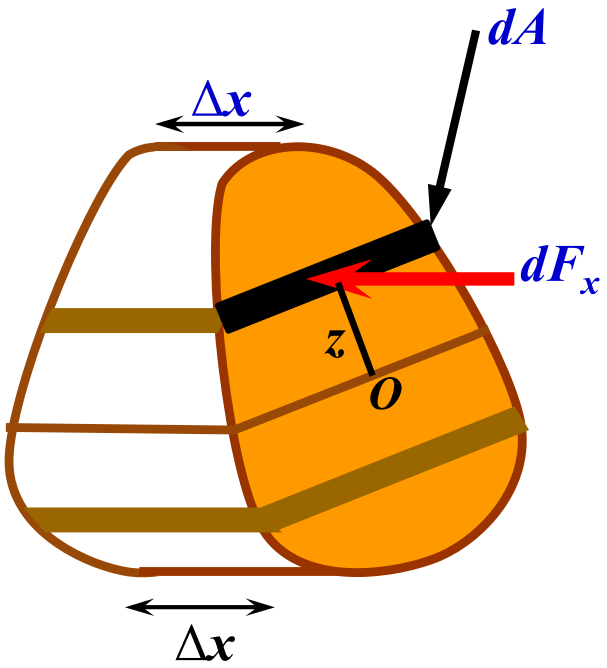
Τρίγωνα ΟΑΒ και ΚΛΜ είναι όμοια:

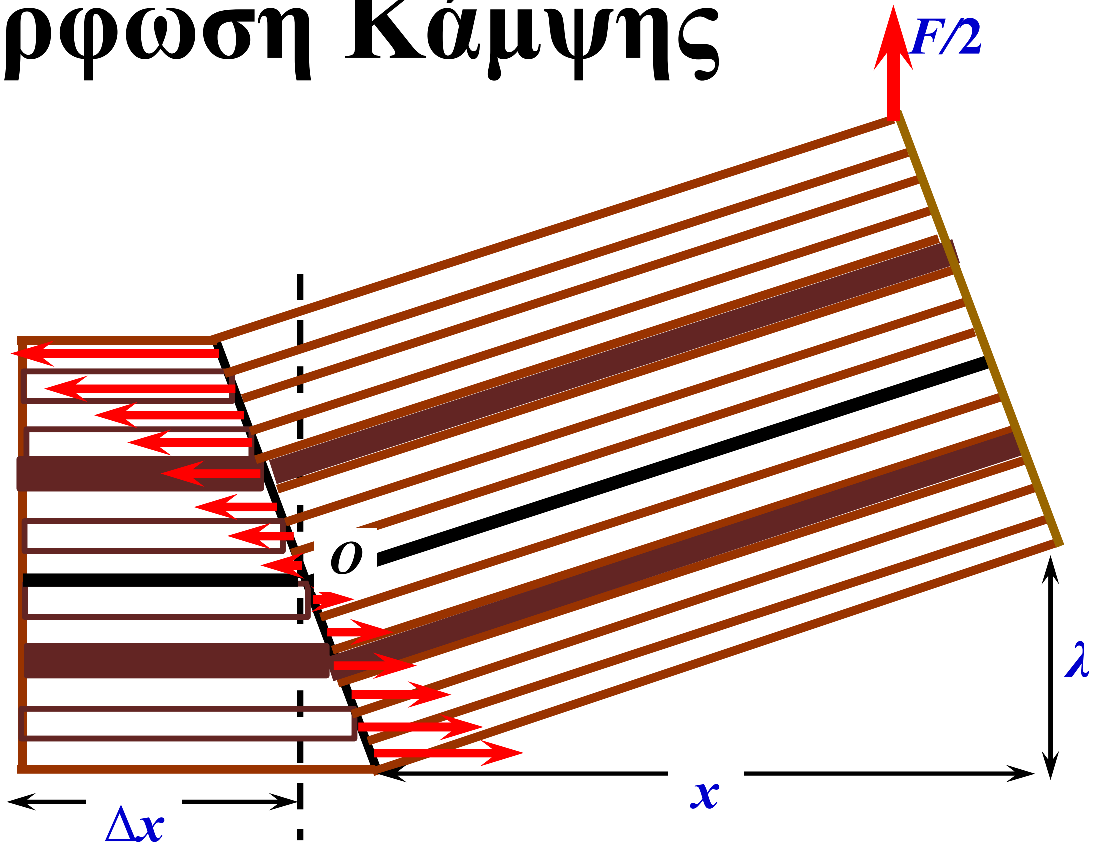
$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{z}{x} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{z}{x}d\lambda$$

$$d\tau = zY\frac{dx}{\Delta x}dA = zY\frac{\frac{z}{x}d\lambda}{\Delta x}dA \quad \Rightarrow$$

$$d\tau = \frac{Y}{x}\frac{d\lambda}{\Delta x}z^2 dA$$

Παραμόρφωση Κάμψης





Στοιχειώδη ροπή δύναμης dF_x ως προς σημείο Ο:

$$d\tau = \frac{Y}{x}\frac{d\lambda}{\Delta x} z^2 dA$$

Συνολική ροπή όλων των δυνάμεων dF_x ως προς σημείο Ο:

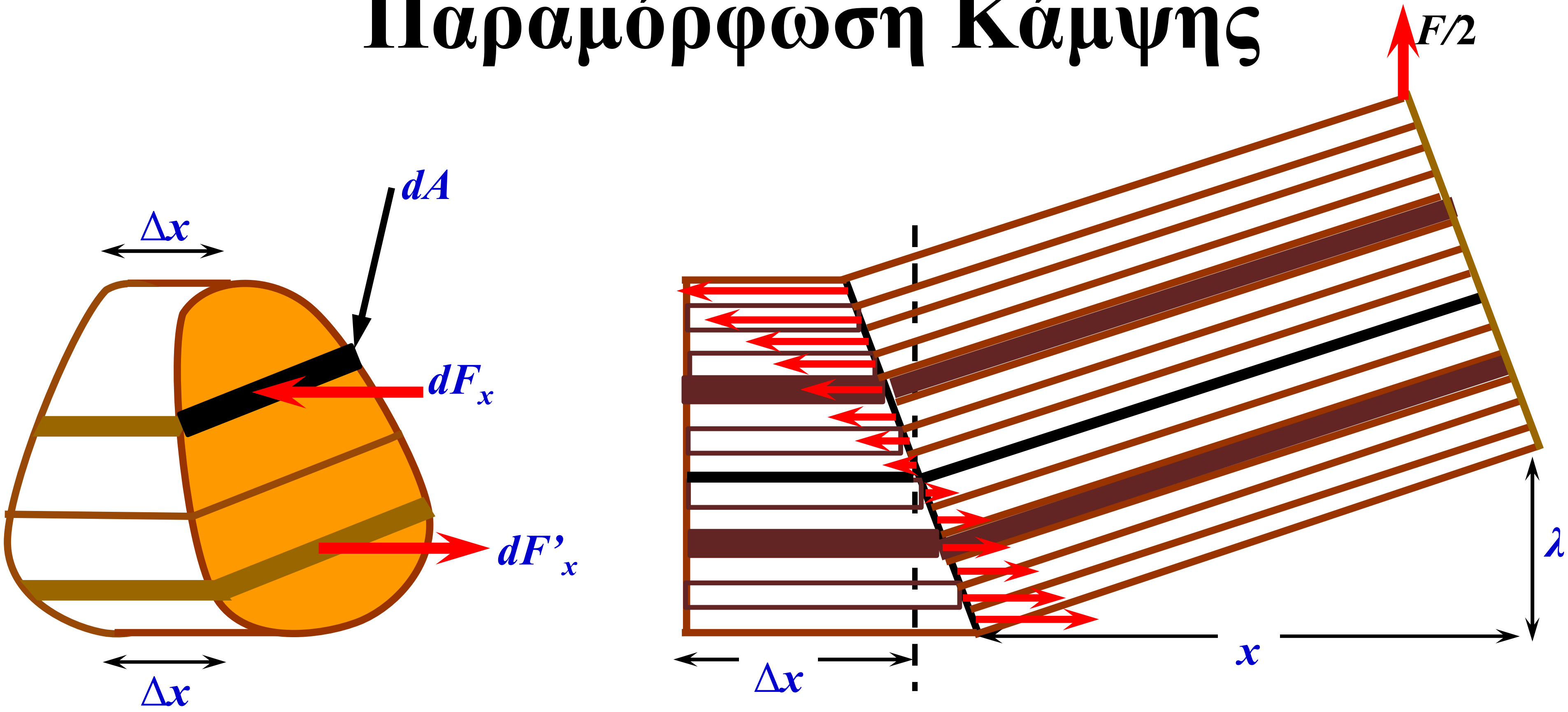
$$\tau = \frac{Y}{x}\frac{d\lambda}{\Delta x}\int_A z^2 dA$$

Επιφανειακή ροπή αδράνειας:

$$\boxed{I_A = \int_A z^2 dA}$$

$$\tau = \frac{Y}{x}\frac{d\lambda}{\Delta x} I_A$$

Παραμόρφωση Κάμψης

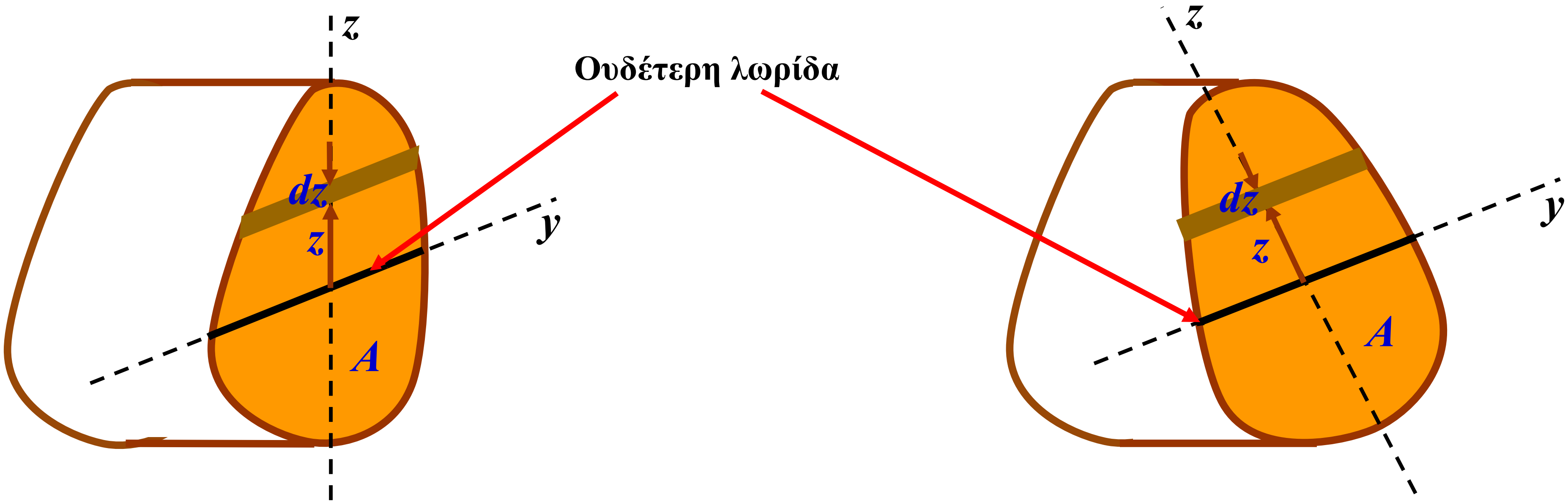


$$\left.\begin{aligned} \tau &= \frac{Y}{x}\frac{d\lambda}{\Delta x} I_A \\ \Delta x &\longrightarrow dx \\ \tau &= \frac{F}{2}x \end{aligned}\right\} \quad \frac{F}{2}x = \frac{Y}{x}\frac{d\lambda}{dx} I_A \quad \Rightarrow \quad d\lambda = \frac{F}{2YI_A}x^2 dx \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{F}{2YI_A}\int_0^{L/2} x^2 dx \quad \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{F}{2YI_A}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{L/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{L^3}{48YI_A}F}$$

Παραμόρφωση Κάμψης

Επιφανειακή Ροπή Αδράνειας I_A



Κατά την κάμψη, η εγκάρσια διατομή *A* σε κάθε σημείο μιας ράβδου ή μιας δοκού στρέφεται με άξονα περιστροφής την ουδέτερη λωρίδα (y-άξονας).

Η ικανότητα κάμψης μιας ράβδου ή μιας δοκού είναι ανάλογη της ικανότητας στροφής των εγκάρσιων διατομών της *A* με άξονα περιστροφής την ουδέτερη λωρίδα (y-άξονας).

Η ικανότητα στροφής των εγκάρσιων διατομών *A*, και συνεπώς η ικανότητα κάμψης μιας ράβδου ή μιας δοκού, ποσοτικοποιείται με την Επιφανειακή Ροπή Αδράνειας I_A.

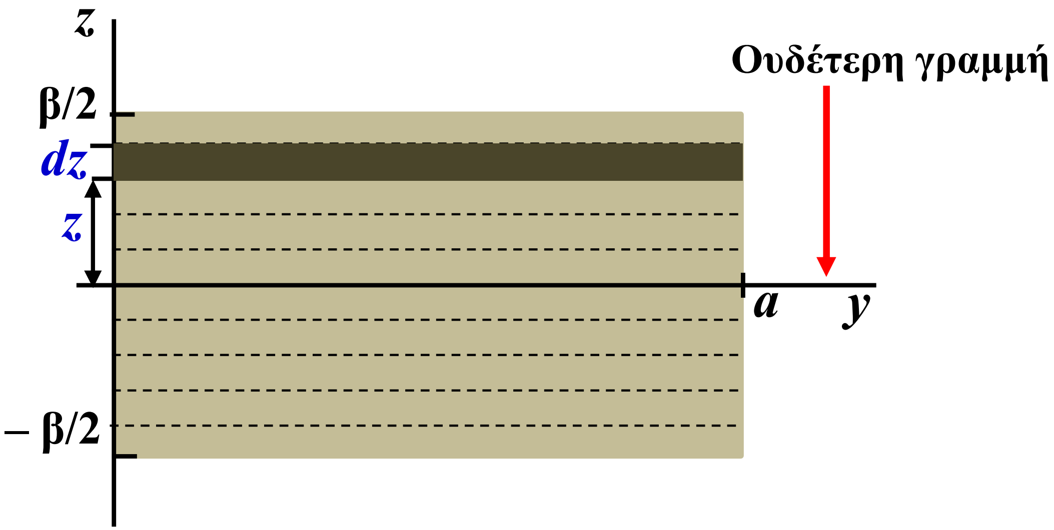
$$\boxed{I_A = \int_A z^2 dA}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, διαιρούμε την εγκάρσια διατομή *A* σε στοιχειώδη λωρίδες εμβαδού *dA* πλάτους *dz* και παράλληλες με την ουδέτερη λωρίδα οι οποίες απέχουν από την ουδέτερη λωρίδα απόσταση *z*

Παραμόρφωση Κάμψης

Παράδειγμα Επιφανειακή Ροπή Αδράνειας I_A

Η εγκάρσια διατομή μιας πρισματικής ράβδου είναι παραλληλόγραμμο πλάτους α και ύψους (πάχους) β. Να υπολογίσετε την επιφανειακή ροπή αδράνειας για την εγκάρσια αυτή διατομή.



Επιλογή συστήματος συντεταγμένων (Ο y-άξονας ταυτίζεται με την ουδέτερη γραμμή)

Διαιρούμε τη διατομή σε λωρίδες πλάτους dz παράλληλες με την ουδέτερη γραμμή (y-άξονα)

Κάθε λωρίδα έχει εμβαδό: $dA = a\,dz$

Επιλέγουμε μια τυχαία λωρίδα που απέχει απόσταση z από την ουδέτερη γραμμή (y-άξονα)

Επιφανειακή ροπή αδράνειας: $I_A = \int_A z^2 dA \;\Rightarrow\; I_A = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} z^2 \alpha\, dz \;\Rightarrow\; I_A = \alpha \int_{-\beta/2}^{\beta/2} z^2\, dz \;\Rightarrow$

$$I_A = \alpha\,\frac{1}{3} z^3 \Big|_{-\beta/2}^{\beta/2} = \alpha \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\beta}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\beta}{2}\right)^3\right] = \frac{\alpha}{3}\left[\frac{\beta^3}{8} + \frac{\beta^3}{8}\right] \;\Rightarrow\; \boxed{I_A = \frac{\alpha\,\beta^3}{12}}$$