ΑΝΩΤΑΤΗ
ΣΧΟΛΗ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ	ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ
ΦΥΣΙΚΗ	Ηλεκτρολόγων – Ηλεκτρονικών Μηχανικών
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ	Μηχανολόγων Μηχανικών

Καθηγητής Σιδερής Ευστάθιος

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Απλή Αρμονική Κίνηση (Ανακεφαλαίωση)

Δυναμική της Ταλάντωσης με Απόσβεση

Λύση της Δ.Ε. της Ταλάντωσης με Απόσβεση

Διερεύνηση της Εξίσωσης Κίνησης του Ταλαντωτή με Απόσβεση

Ενέργεια Ταλαντωτή με Απόσβεση

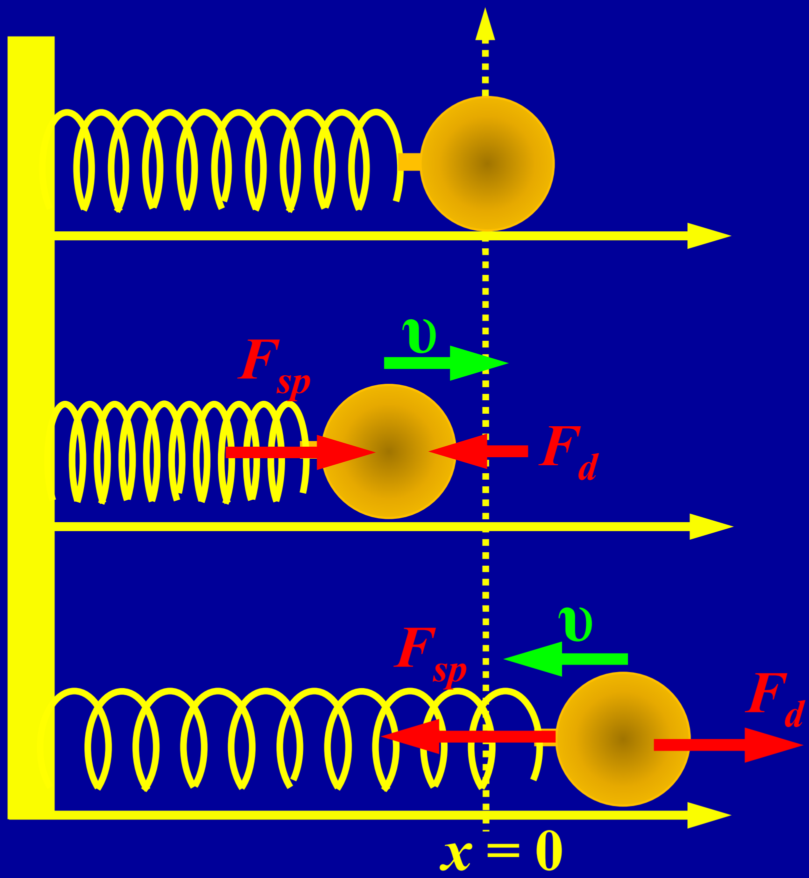
Παράμετροι Ταλάντωσης με Απόσβεσης

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ
(Ανακεφαλαίωση)

ΤΑΛΑΝΤΟΥΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ	ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ	ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ	ω_0^2
Ελατήριο – Μάζα	$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x=0$	$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$	$\frac{k}{m}$
Απλό Εκκρεμές	$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega_0^2\theta=0$	$\theta(t)=\theta_{max}\cos(\omega t+\varphi_0)$	$\frac{g}{l}$
Φυσικό Εκκρεμές			$\frac{mgL}{I}$
Στροφικό Εκκρεμές			$\frac{\kappa}{I}$
Πλωτήρας	$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2 y=0$	$y(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$	$\frac{\rho_f gS}{m}$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Η Συνισταμένη των δυνάμεων που προκαλούν την ταλάντωση προκύπτει από τη δύναμη επαναφοράς F_{sp} του ταλαντούμενου συστήματος και από τις δυνάμεις απόσβεσης F_d (π.χ. η αντίσταση σε ένα ρευστό) οι οποίες θεωρούνται ανάλογες με την ταχύτητα.



$$F_{\text{net}} = F_{sp} + F_d$$

Όπου: $\begin{cases} F_{sp} = -kx \\ F_d = -bv = -b\dfrac{dx}{dt} \end{cases}$

$$F_{\text{net}} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Αποδείξαμε: $F_{\text{net}} = -kx - b\dfrac{dx}{dt}$

Δεύτερος Νόμος Newton: $F_{\text{net}} = ma = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Διαφορική Εξίσωση Ταλάντωσης με Απόσβεση: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{b}{m}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{k}{m}x = 0$

Μια μερική Λύση της παραπάνω Διαφορικής Εξίσωσης είναι: $x(t) = ce^{\rho t}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(ce^{\rho t})}{dt} = c\rho e^{\rho t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(c\rho e^{\rho t})}{dt} = c\rho\frac{d(e^{\rho t})}{dt} = c\rho^2 e^{\rho t}$$

$$c\rho^2 e^{\rho t} + \frac{b}{m}c\rho e^{\rho t} + \frac{k}{m}ce^{\rho t} = 0$$

$$\cancel{ce^{\rho t}}\left(\rho^2 + \frac{b}{m}\rho + \frac{k}{m}\right) = 0$$

ΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ – ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 + \frac{b}{m}\rho + \frac{k}{m} = 0$$

Χαρακτηριστικό τριώνυμο Δ.Ε. Ταλαντωτή με απόσβεση

Διακρίνουσα Χαρακτηριστικού τριώνυμου Δ.Ε. Ταλαντωτή με απόσβεση: $\Delta = \frac{b^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$

Ρίζες χαρακτηριστικού τριώνυμου Δ.Ε. Ταλαντωτή με απόσβεση:

$$\begin{cases} \rho_1 = \dfrac{-\frac{b}{m} + \sqrt{\Delta}}{2} = -\dfrac{b}{2m} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2} \\[2ex] \rho_2 = \dfrac{-\frac{b}{m} - \sqrt{\Delta}}{2} = -\dfrac{b}{2m} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$

$\Delta \neq 0$

Γενική Λύση Δ.Ε. Ταλαντωτή με απόσβεση: $x(t) = c_1 e^{\rho_1 t} + c_2 e^{\rho_2 t} \quad \Rightarrow$

$$\boxed{x(t) = c_1 e^{\left(\frac{-b}{2m} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(\frac{-b}{2m} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)t}}$$

ΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ – ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 + \frac{b}{m}\rho + \frac{k}{m} = 0$$

Χαρακτηριστικό τριώνυμο
Δ.Ε. Ταλαντωτή με απόσβεση

$\Delta \neq 0$

Γενική Λύση Δ.Ε. Ταλαντωτή με απόσβεση: $x(t) = c_1 e^{\left(-\frac{b}{2m}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{b}{2m}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)t}$

1η Περίπτωση: Διακρίνουσα θετική: $\Delta = \frac{b^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} > 0$

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2m}t}\, e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t} + c_2 e^{-\frac{b}{2m}t}\, e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\left(c_1\, e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t} + c_2\, e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t}\right)}$$

Γραφική Παράσταση της εξίσωσης κίνησης ταλαντωτή με υπεραπόσβεση

Συνθήκη Ταλαντωτή με Υπεραπόσβεση

$$\frac{b^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b > 2\sqrt{km}}$$

ΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ – ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 + \frac{b}{m}\rho + \frac{k}{m} = 0$$

Χαρακτηριστικό τριώνυμο Δ.Ε. Ταλαντωτή με απόσβεση

$\Delta \neq 0$

Γενική Λύση Δ.Ε. Ταλαντωτή με απόσβεση: $x(t) = c_1 e^{\left(-\frac{b}{2m}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{b}{2m}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)t}$

2η Περίπτωση:

Διακρίνουσα αρνητική: $\Delta = \frac{b^2}{m^2} - 4\frac{k}{m} < 0$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = \sqrt{-\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)}$$

Θέτουμε: $\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} > 0$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \sqrt{-\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = i\omega$$

$$x(t) = c_1 e^{\left(-\frac{b}{2m}+i\omega\right)t} + c_2\, e^{\left(-\frac{b}{2m}-i\omega\right)t} \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\left(c_1\, e^{i\omega t} + c_2\, e^{-i\omega t}\right)$$

ΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ – ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0 \quad\Rightarrow\quad \rho^2+\frac{b}{m}\rho+\frac{k}{m}=0$$

Χαρακτηριστικό τριώνυμο Δ.Ε. Ταλαντωτή με απόσβεση

$$\Delta<0$$

Γενική Λύση Δ.Ε. Ταλαντωτή με απόσβεση: $x(t)=e^{-\frac{b}{2m}t}\left(c_1\, e^{i\omega t}+c_2\, e^{-i\omega t}\right)$

2η Περίπτωση:

Διακρίνουσα αρνητική: $\Delta=\frac{b^2}{m^2}-4\frac{k}{m}<0$

Ταυτότητα Euler: $e^{\pm ia}=\cos a\pm i\sin a$

$$c_1e^{i\omega t}+c_2\, e^{-i\omega t}=c_1\,(\cos\omega t+i\sin\omega t)+c_2(\cos\omega t-i\sin\omega t)=$$

$$=\boxed{c_1\cos\omega t}+ic_1\sin\omega t+\boxed{c_2\cos\omega t}-ic_2\sin\omega t \quad\Rightarrow$$

$$c_1e^{i\omega t}+c_2\, e^{-i\omega t}=(c_1+c_2)\cos\omega t+i(c_1-c_2)\sin\omega t$$

Για να είναι η παράσταση αυτή πραγματικός αριθμός θα πρέπει οι παράγοντες c_1 και c_2 να είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί

$$c_1=A+iB,\qquad c_2=A-iB \qquad \left\{\begin{array}{l} c_1+c_2=2A \\ c_1-c_2=2iB \end{array}\right.$$

$$c_1e^{i\omega t}+c_2\, e^{-i\omega t}=2A\cos\omega t+i(2iB)\sin\omega t=2A\cos\omega t-2B\sin\omega t \quad\Rightarrow$$

ΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ – ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0 \quad \Rightarrow \quad \rho^2+\frac{b}{m}\rho+\frac{k}{m}=0$$

Χαρακτηριστικό τριώνυμο Δ.Ε. Ταλαντωτή με απόσβεση

$\Delta < 0$

Γενική Λύση Δ.Ε. Ταλαντωτή με απόσβεση: $x(t)=e^{-\frac{b}{2m}t}\left(c_1\,e^{i\omega t}+c_2\,e^{-i\omega t}\right)$

2η Περίπτωση:

Διακρίνουσα αρνητική: $\Delta=\frac{b^2}{m^2}-4\frac{k}{m}<0 \quad \Rightarrow$

Αποδείξαμε: $c_1e^{i\omega t}+c_2\,e^{-i\omega t}=2A\cos\omega t-2B\sin\omega t$

Τριγωνομετρική Ταυτότητα: $\alpha\cos x\pm\beta\sin x=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(x\mp\varphi)$

$$c_1e^{i\omega t}+c_2\,e^{-i\omega t}=2\sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t+\varphi)$$

Θέτουμε: $2\sqrt{A^2+B^2}=A_0$

$$x(t)=e^{-\frac{b}{2m}t}\left(c_1\,e^{i\omega t}+c_2\,e^{-i\omega t}\right)$$

$$\boxed{x(t)=A_0\,e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t+\varphi)}$$

Εξίσωση κίνησης ταλαντωτή με απόσβεση:

ΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ – ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0 \quad \Rightarrow \quad \rho^2+\frac{b}{m}\rho+\frac{k}{m}=0$$

Χαρακτηριστικό τριώνυμο Δ.Ε. Ταλαντωτή με απόσβεση

$\Delta < 0$

Γενική Λύση Δ.Ε. Ταλαντωτή με απόσβεση: $x(t)=e^{-\frac{b}{2m}t}\left(c_1\, e^{i\omega t}+c_2\, e^{-i\omega t}\right)$

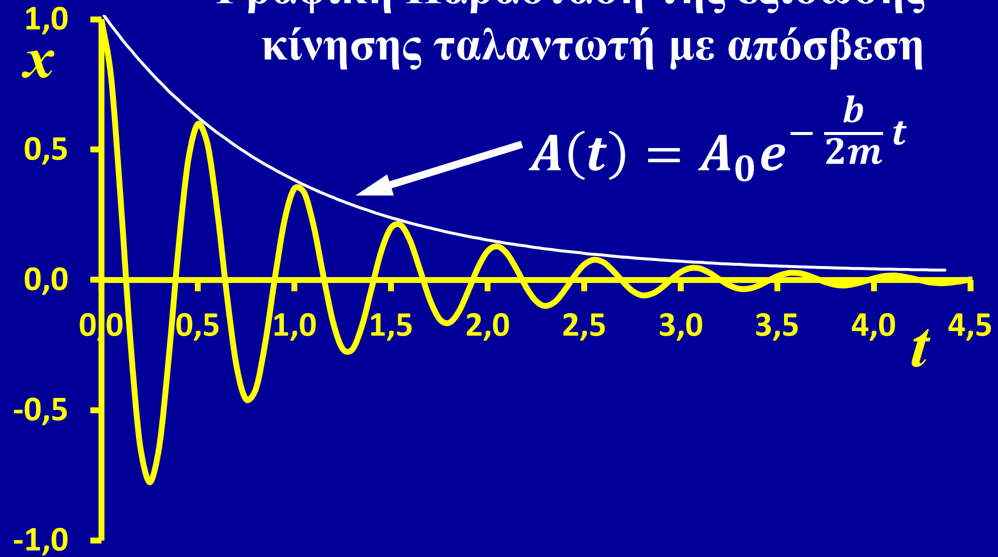
2η Περίπτωση:

Διακρίνουσα αρνητική: $\Delta=\frac{b^2}{m^2}-4\frac{k}{m}<0 \quad \Rightarrow$

Αποδείξαμε: $\boxed{x(t)=A_0\, e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t+\varphi)}$

Εξίσωση κίνησης ταλαντωτή με απόσβεση:

Γραφική Παράσταση της εξίσωσης κίνησης ταλαντωτή με απόσβεση



Συνθήκη Ταλαντωτή με Απόσβεση

$$\frac{b^2}{m^2}-4\frac{k}{m}<0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b<2\sqrt{km}}$$

ΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ – ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0 \quad \Rightarrow \quad \rho^2+\frac{b}{m}\rho+\frac{k}{m}=0$$

Χαρακτηριστικό τριώνυμο Δ.Ε. Ταλαντωτή με απόσβεση

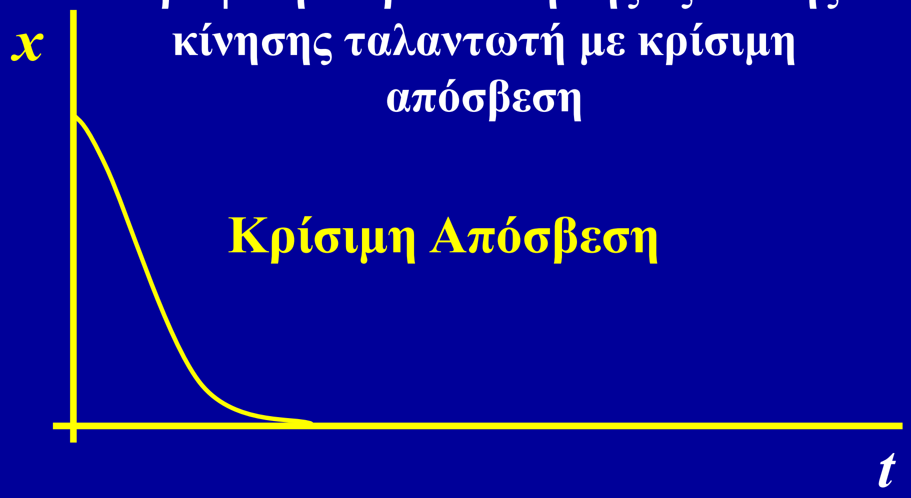
3η Περίπτωση:

Διακρίνουσα μηδέν: $\Delta=\frac{b^2}{m^2}-4\frac{k}{m}=0$

$\Delta=0$

Γενική Λύση Δ.Ε. Ταλαντωτή με απόσβεση: $x(t)=e^{-\frac{b}{2m}t}(A+Bt)$

Γραφική Παράσταση της εξίσωσης κίνησης ταλαντωτή με κρίσιμη απόσβεση



Συνθήκη Ταλαντωτή με Κρίσιμη Απόσβεση

$$\frac{b^2}{m^2}-4\frac{k}{m}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b=2\sqrt{km}}$$

ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Αποδείξαμε ότι : $x = A(t)\cos(\omega t + \varphi)$

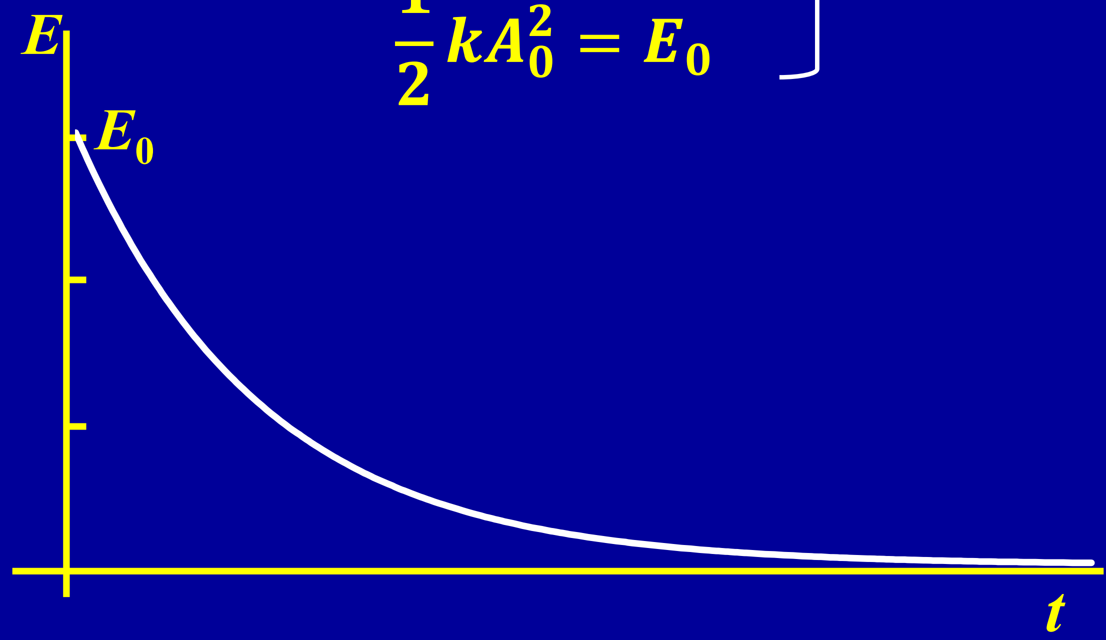
όπου : $A(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}$

Μέγιστη ενέργεια ταλαντωτή (π.χ. ελατηρίου) με απόσβεση συναρτήσει του χρόνου, σε μια τυχαία περίοδο :

$$E(t) = \frac{1}{2}k(A(t))^2 = \frac{1}{2}k\left(A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\right)^2 = \frac{1}{2}kA_0^2\left(e^{-\frac{b}{2m}t}\right)^2$$

$$\frac{1}{2}kA_0^2 = E_0$$

$$\boxed{E(t) = E_0 e^{-\frac{b}{m}t}}$$



E_0 = **Ενέργεια Ταλαντωτή τη χρονική στιγμή** $t = 0$ **s**

ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

Αποδείξαμε ότι : $x = A(t)\cos(\omega t + \varphi)$

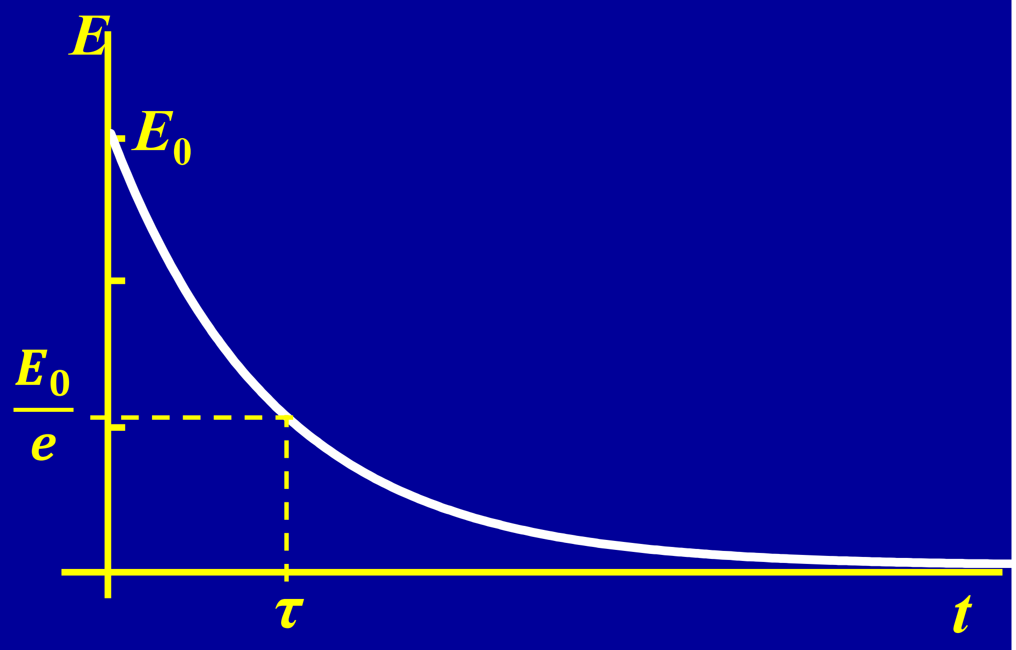
όπου : $A(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}$

Μέγιστη ενέργεια ταλαντωτή με απόσβεση συναρτήσει του χρόνου, σε μια τυχαία περίοδο :

$$\boxed{E(t) = E_0 e^{-\frac{b}{m}t}}$$

Σταθερά Χρόνου τ :

Είναι το χρονικό διάστημα τ που απαιτείται για να μειωθεί η ενέργεια του ταλαντωτή, από την αρχική του τιμή E_0 στην τιμή E_0/e:



$$\frac{\cancel{E_0}}{e} = \cancel{E_0} e^{-\frac{b}{m}\tau} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{e} = e^{-\frac{b}{m}\tau} \quad \Rightarrow \quad e = e^{\frac{b}{m}\tau} \quad \Rightarrow$$

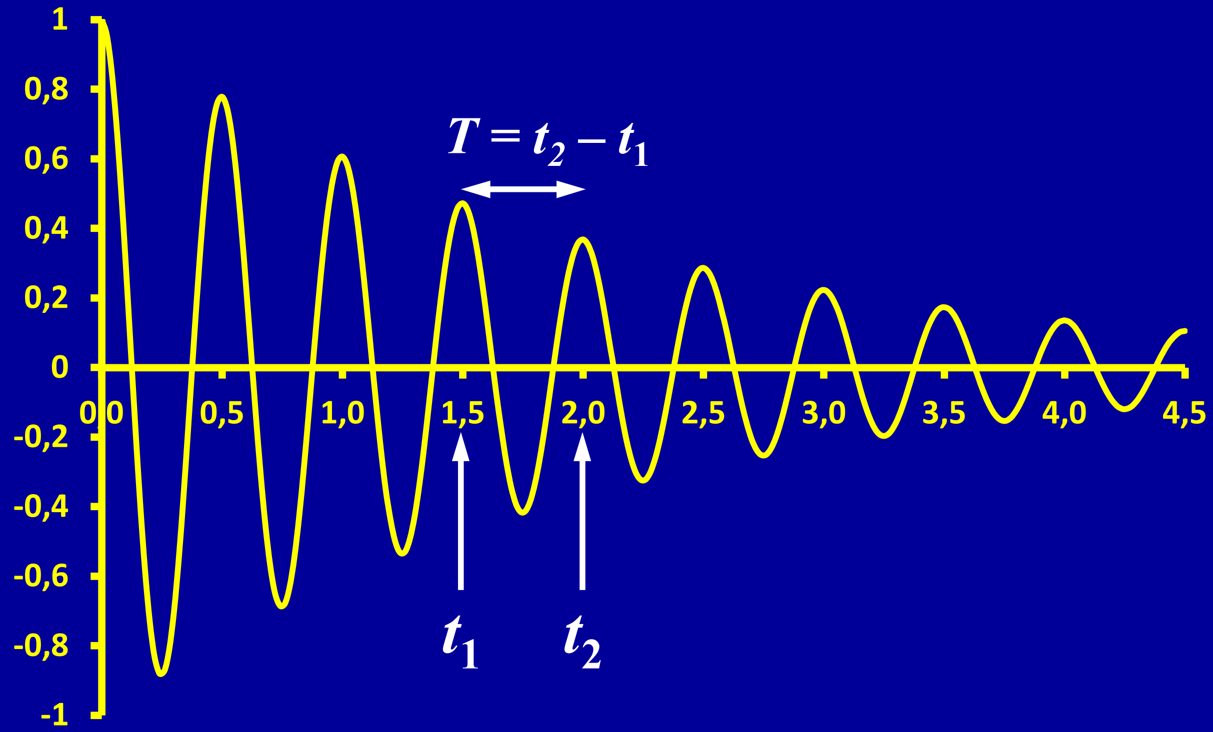
$$\ln e = \ln\left(e^{\frac{b}{m}\tau}\right) \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{b}{m}\tau \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{m}{b}}$$

Σταθερά χρόνου

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ Q ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ

t_1: $\quad E_1 = E_0\, e^{-\frac{t_1}{\tau}}$

t_2: $\quad E_2 = E_0\, e^{-\frac{t_2}{\tau}}$



Ποσοστό ενέργειας που χάνεται ανά περίοδο Τ :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_1 - E_2}{E_1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\cancel{E_0}\, e^{-\frac{t_1}{\tau}} - \cancel{E_0}\, e^{-\frac{t_2}{\tau}}}{\cancel{E_0}\, e^{-\frac{t_1}{\tau}}} = \frac{e^{-\frac{t_1}{\tau}} - e^{-\frac{t_2}{\tau}}}{e^{-\frac{t_1}{\tau}}} = \frac{e^{-\frac{t_1}{\tau}} - e^{-\frac{t_1+T}{\tau}}}{e^{-\frac{t_1}{\tau}}} = \frac{e^{-\frac{t_1}{\tau}} - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\, e^{-\frac{T}{\tau}}}{e^{-\frac{t_1}{\tau}}}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\cancel{e^{-\frac{t_1}{\tau}}}\left(1 - e^{\frac{-T}{\tau}}\right)}{\cancel{e^{-\frac{t_1}{\tau}}}} = 1 - e^{-\frac{T}{\tau}}$$

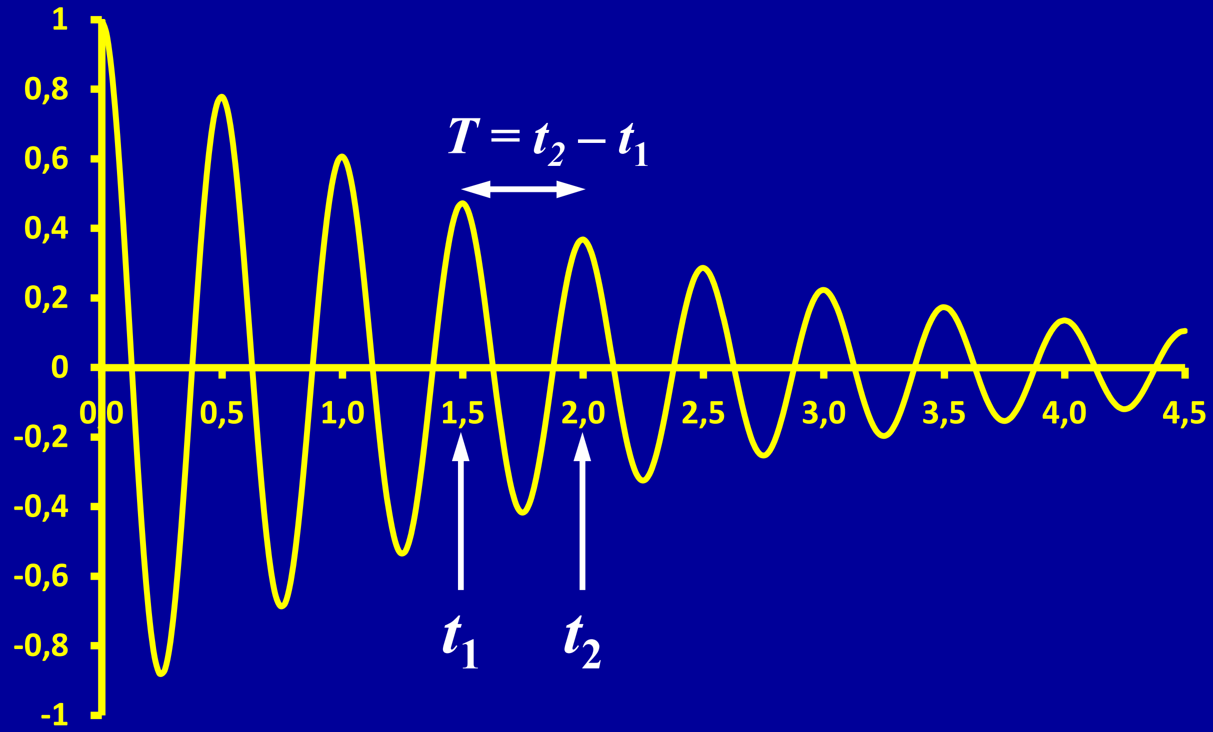
$$\frac{T}{\tau} < 1$$

$$\frac{\Delta E}{E} = 1 - \left(1 - \frac{T}{\tau}\right) = \frac{T}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\Delta E}{E} = \frac{T}{\tau}}$$

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ Q ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ

$$\boxed{\frac{\Delta E}{E} = \frac{T}{\tau}}$$

Το ποσοστό ενέργειας που χάνεται ανά περίοδο *T* είναι σταθερό!!!



Συντελεστής Ποιότητας Q:

Ορισμός: $$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$$

$$Q = 2\pi \frac{\tau}{T} = \omega\tau$$

$$\boxed{Q = \omega\tau}$$

Q = ∞ : Ταλαντωτής χωρίς απόσβεση

Q = Μεγάλο: Ταλαντωτής με μικρή απόσβεση

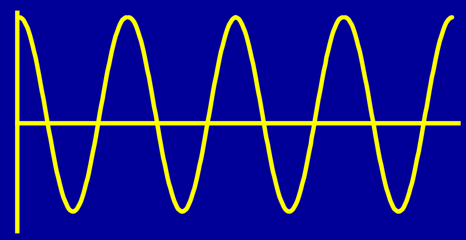
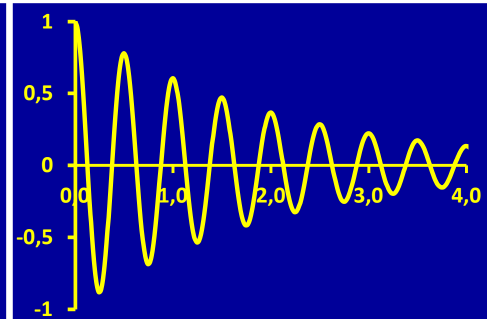
Q = Μικρό : Ταλαντωτής με μεγάλη απόσβεση

Q = πολύ μικρό ή πάρα πολύ μικρό :

Ταλαντωτής σε υπεραπόσβεση ή κρίσιμη απόσβεση.

Q = 0: Δεν υπάρχει ταλάντωση

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

<table>
<tr><th>ΔΥΝΑΜΗ</th><th>ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ</th><th>ΛΥΣΗ Δ.Ε.</th><th>ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ</th></tr>
<tr><td>$F_{\text{sp}} = -kx$</td><td>$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$</td><td>$x = A\cos(\omega t + \varphi)$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">$F_{\text{sp}} = -kx$
$F_{\text{d}} = -bv$
$F_d = -b\frac{dx}{xt}$
$\Sigma F = F_{\text{sp}} + F_d$</td><td rowspan="3">$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$
$\tau = \frac{m}{b}$
$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
$\gamma = \frac{b}{2m}$</td><td>$x(t) = e^{-\gamma t}(\alpha e^{\lambda t} + \beta e^{-\lambda t})$
$\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} > 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>$x(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt)$
$\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>$x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$
$\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m} < 0$</td><td></td></tr>
</table>