ΑΝΩΤΑΤΗ
ΣΧΟΛΗ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ	ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ
ΦΥΣΙΚΗ	**Ηλεκτρολόγων – Ηλεκτρονικών Μηχανικών**
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ	**Μηχανολόγων Μηχανικών**
ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ	**Πολιτικών Μηχανικών**

Καθηγητής Σιδερής Ευστάθιος

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

Δυναμική της Εξαναγκασμένης Ταλάντωσης.

Συντονισμός – Καμπύλη Συντονισμού.

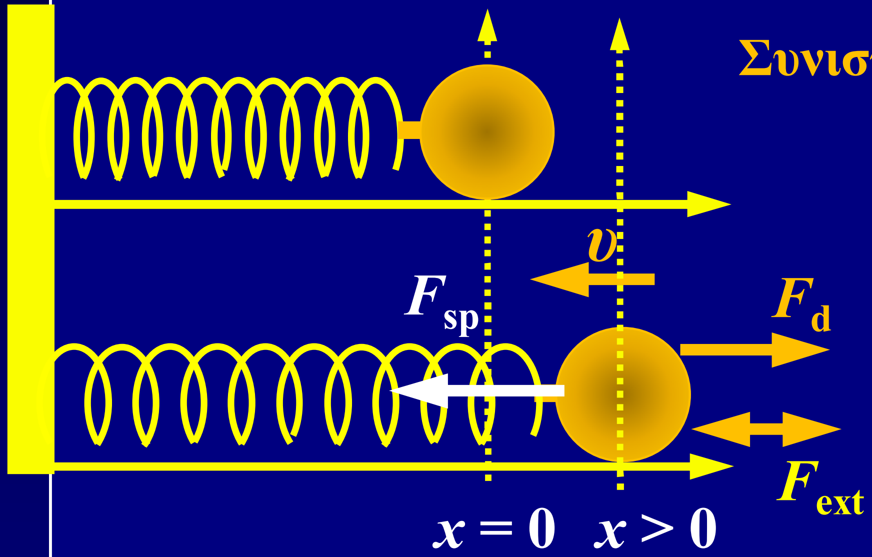
Ισχύς Εξαναγκασμένης Ταλάντωσης.

Συντελεστής Ποιότητας Q.

Παραδείγματα Συντονισμού.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΗΣ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

Πάνω στη μάζα που ταλαντώνεται δρα και μια περιοδική δύναμη, πέρα από τη δύναμη της απόσβεσης και τη δύναμη επαναφοράς.



Συνισταμένη Δύναμη: $F = F_{sp} + F_d + F_{ext}$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΣΤΗ ΜΑΖΑ:

Ελατηρίου: $F_{sp} = -k\,x$

Αντίστασης: $F_d = -b\upsilon = -b\dfrac{dx}{dt}$

Εξωτερική : $F_{ext} = F_0\sin(\omega t)$

$$F = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0\sin\omega t$$

2ος Νόμος Νεύτωνα: $F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0\sin\omega t$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0\sin\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$$

Όπου: $\tau = \dfrac{m}{b}$ **και:** $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

Η Γενική Λύση της παραπάνω Διαφορικής Εξίσωσης είναι:

$$x(t) = A\sin(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\ \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t - \varphi)$$

$$-A\omega^2\ \sin(\omega t - \varphi) + \frac{1}{\tau}A\omega\ \cos(\omega t - \varphi) + \omega_0^2 A\sin(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$$

$$A\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin(\omega t - \varphi) + A\frac{\omega}{\tau}\cos(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΜΕ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

$$\boxed{A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\sin(\omega t-\varphi)+\boxed{A\frac{\omega}{\tau}}\cos(\omega t-\varphi)=\frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

Τριγωνομετρική Ταυτότητα

$$\lambda\sin(\alpha)\pm\mu\cos(\alpha)=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\,\sin(\alpha\pm\theta)$$

$$\tan(\theta)=\frac{\mu}{\lambda}$$

$$\sqrt{A^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+A^2\frac{\omega^2}{\tau^2}}\sin(\omega t-\varphi+\theta)\equiv\frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

$$A\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}}\sin(\omega t-\varphi+\theta)\equiv\frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

$$\tan\theta=\frac{\cancel{A}\frac{\omega}{\tau}}{\cancel{A}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\Rightarrow\boxed{\tan\theta=\frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΜΕ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

$$\boxed{A\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}}}\,\boxed{\sin(\omega t-\varphi+\theta)}\equiv\boxed{\frac{F_0}{m}}\,\boxed{\sin\omega t}$$

$$\boxed{\tan\theta=\frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

$$A\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}}=\frac{F_0}{m}\Rightarrow\boxed{A=\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}}}}$$

$$\sin(\omega t-\varphi+\theta)=\sin\omega t\ \Rightarrow\ \omega t-\varphi+\theta=\omega t\ \Rightarrow\ \varphi=\theta\Rightarrow$$

$$\boxed{\tan\varphi=\tan\theta=\frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΜΕ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

Αποδείξαμε:

Πλάτος Ταλαντωτή

$$\boxed{A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}}$$

Σταθερά Φάση

$$\boxed{\tan\varphi = \tan\theta = \frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Οριακές Περιπτώσεις:

$$\omega \to 0 \quad \Rightarrow \quad A(0) \to \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2} = \frac{\frac{F_0}{\cancel{m}}}{\frac{k}{\cancel{m}}} \Rightarrow A(0) \to \frac{F_0}{k} \Rightarrow \boxed{A(0) \to x_0}$$

$x_0 =$ **πλατος ταλαντωσης διεγερτη**

$$\tan\varphi = \tan\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \theta = 0}$$

$$\omega = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad A(\omega_0) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{\omega_0}{\tau}} = \frac{\frac{F_0}{\cancel{m}}}{\omega_0 \frac{b}{\cancel{m}}} \Rightarrow \boxed{A(\omega_0) = \frac{F_0}{\omega_0 b}}$$

$$\tan\varphi = \tan\theta = \infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \theta = \frac{\pi}{2}}$$

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΜΕ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

Πλάτος Ταλαντωτή

$$\boxed{A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}}$$

Σταθερά Φάση

$$\boxed{\tan\varphi = \tan\theta = \frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Υπολογισμός τη συχνότητας συντονισμού: ω_r

Στη συχνότητας συντονισμού ω_r
το πλάτος της ταλάντωση είναι μέγιστο: $A(\omega_r) = A_{\max}$

Θα πρέπει: $\left.\frac{dA(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cancel{\frac{F_0}{m}}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}\right) = 0 \quad \Rightarrow$

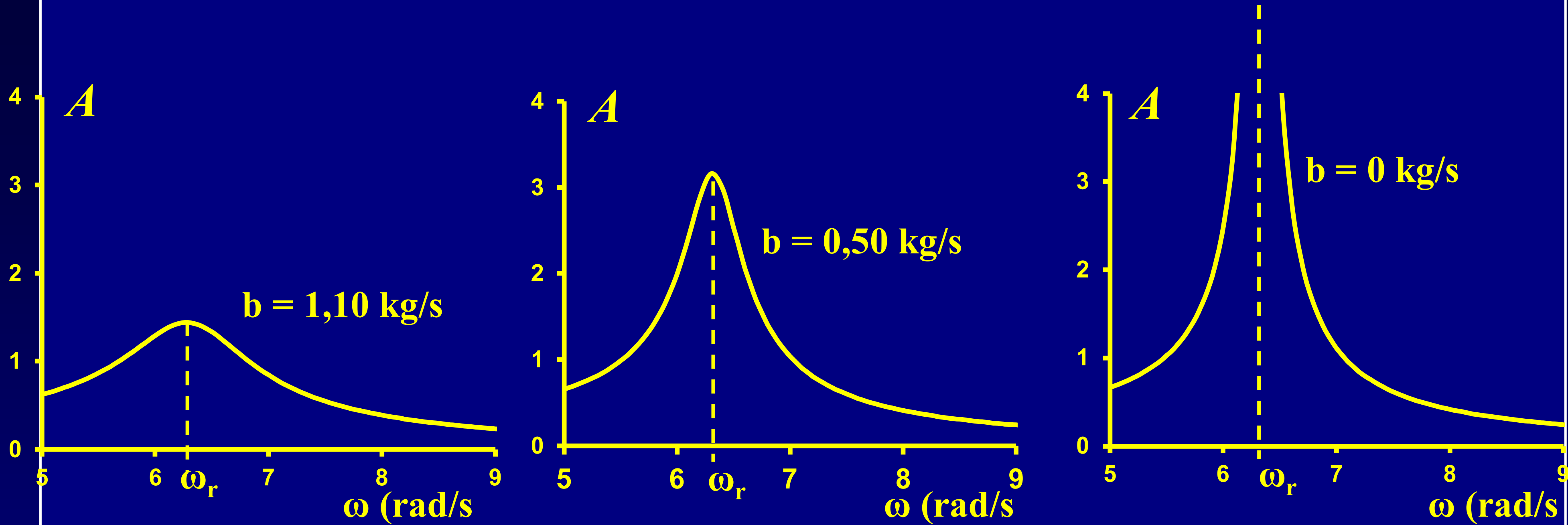
$$\frac{\cancel{-\frac{1}{2}\left[\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\right.}\left[2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)(-2\omega) + \frac{2\omega}{\tau^2}\right]\Bigg]}{\cancel{\left(\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}\right)^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cancel{2}\omega\left(-2\omega_0^2 + 2\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

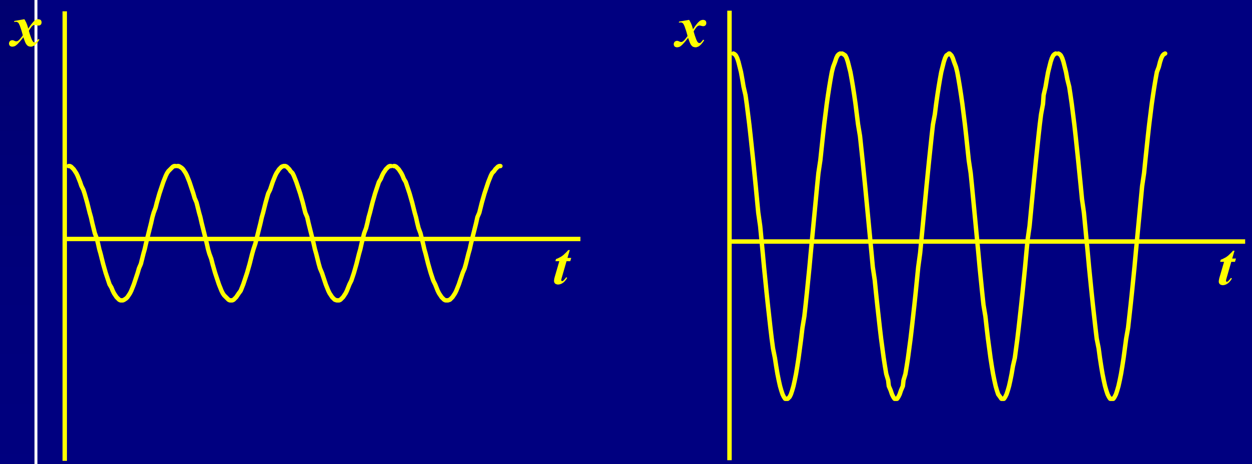
$$\left.\frac{dA(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_r} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\omega_0^2 + \omega_r^2 + \frac{1}{2\tau^2} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}}} \qquad \boxed{\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}}$$

Σε ταλαντωτές με μικρή απόσβεση: $\omega_r \approx \omega_0$

ΚΑΜΠΥΛΗ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Στοιχεία Ταλαντωτή: $k = 39,4\ \mathrm{N/m}$, $m = 1,00\mathrm{kg}$, $\omega_0 = 6,28\ \mathrm{rad/s}$





Καταστροφική ταλάντωση:

$A(\omega_r) \to \infty$

ΙΣΧΥΣ ΤΗΣ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

Στιγμιαία Ισχύς: $P(t) = F(t)\, \upsilon(t)$

Στιγμιαία Δύναμη: $\boxed{F(t) = F_0 \sin(\omega t)}$

Στιγμιαία Μετατόπιση: $x(t) = A(\omega) \sin(\omega t - \varphi)$

Στιγμιαία Ταχύτητα: $\upsilon(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{\upsilon(t) = \omega\, A(\omega)\, \cos(\omega t - \varphi)}$

$$P(t) = F_0\, \omega\, A(\omega) \sin(\omega t) \cos(\omega t - \varphi)$$

Τριγωνομετρική Ταυτότητα: $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{2} + \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{2}$

Όπου $\alpha = \omega t$ και $\alpha - \varphi = \omega t - \varphi$

$$P(t) = F_0\, \omega\, A(\omega) \left[\frac{\sin\varphi}{2} + \frac{\sin(2\omega t - \varphi)}{2}\right]$$

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

ΜΕΣΗ ΙΣΧΥΣ ΤΗΣ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

Αποδείξαμε: $P(t) = F_0\,\omega\,A(\omega)\left[\dfrac{\sin\varphi}{2} + \dfrac{\sin(2\omega t - \varphi)}{2}\right]$

Μέση Ισχύς σε χρόνο μιας περιόδου T: $\bar{P} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T P(t)dt \;\Rightarrow$

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T F_0\,\omega\,A(\omega)\left[\frac{\sin\varphi}{2} + \frac{\sin(2\omega t - \varphi)}{2}\right]dt \quad \Rightarrow$$

$$\bar{P} = \frac{1}{T}F_0\,\omega\,A(\omega)\int_0^T \left[\frac{\sin\varphi}{2} + \frac{\sin(2\omega t - \varphi)}{2}\right]dt \quad \Rightarrow$$

Η μέση τιμή μιας περιόδου ημιτονικής συνάρτησης είναι ίση με μηδέν

$$\bar{P} = \frac{F_0\,\omega\,A(\omega)}{T}\left[\int_0^T \frac{\sin\varphi}{2}dt + \cancel{\int_0^T \left[\frac{\sin(2\omega t - \varphi)}{2}\right]dt}\,\right] \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{P} = \frac{F_0\,\omega\,A(\omega)}{T}\left[\int_0^T \frac{\sin\varphi}{2}dt\right]}$$

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

ΜΕΣΗ ΙΣΧΥΣ ΤΗΣ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

Αποδείξαμε: $\bar{P} = \frac{F_0\,\omega\,A(\omega)}{T}\left[\int_0^T \frac{\sin\varphi}{2}\,dt\right] \Rightarrow \bar{P} = \frac{F_0\,\omega\,A(\omega)}{T}\frac{\sin\varphi}{2}\int_0^T dt \Rightarrow$

$$\bar{P} = \frac{F_0\,\omega\,A(\omega)}{\cancel{T}}\frac{\sin\varphi}{2}\cancel{T} \Rightarrow \bar{P}(\omega) = \frac{1}{2}F_0\,\omega\,A(\omega)\sin\varphi \Rightarrow$$

Αποδείξαμε:

$$\boxed{A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}}$$

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Τριγωνομετρική Ταυτότητα:

$$\sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1 + \tan^2\varphi}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b\tau}$$

$$\bar{P}(\omega) = \frac{1}{2}F_0\,\omega\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}\frac{\tan\varphi}{\sqrt{1 + \tan^2\varphi}} = \frac{1}{2}F_0\,\omega\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}\frac{\frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2}}{\sqrt{1 + \frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2}}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{P}(\omega) = \frac{F_0^2}{2b}\frac{\frac{\omega^2}{\tau^2}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}$$

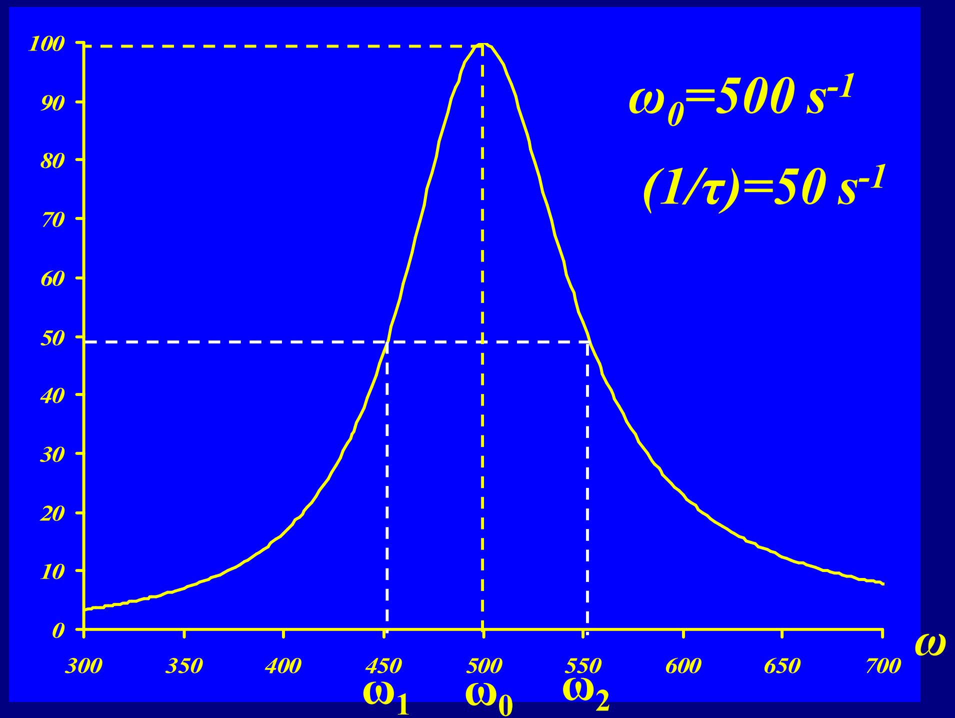
ΚΑΜΠΥΛΗ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ

Μέση Ισχύς: $$\boxed{\bar{P}(\omega) = \frac{F_0^2}{2b}\,\frac{\dfrac{\omega^2}{\tau^2}}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\dfrac{\omega^2}{\tau^2}}}$$

Μέγιστο Μέσης Ισχύος όταν $\omega = \omega_0 \;\Rightarrow\; \bar{P}_{\max} = \dfrac{F_0^2}{2b}$ **(θα αποδειχθεί σε άσκηση)**

$$\bar{P}_{\max} = \frac{F_0^2}{2b}$$

$$\frac{\bar{P}_{\max}}{2} = \frac{F_0^2}{4b}$$



ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ Q

Μέση Ισχύς: $$\boxed{\overline{P}(\omega) = \frac{F_0^2}{2b}\frac{\frac{\omega^2}{\tau^2}}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}}}$$

Μέγιστο Μέσης Ισχύος όταν $\omega = \omega_0 \;\Rightarrow\; \boxed{\overline{P}_{\max} = \frac{F_0^2}{2b}}$ **και** $\boxed{\frac{\overline{P}_{\max}}{2} = \frac{F_0^2}{4b}}$

Ο συντελεστής Ποιότητας Συντονισμού Q:

1. Ποσοτικοποιεί με ένα θετικό αριθμό την απόκριση ενός ταλαντωτή στους εξωτερικούς διεγέρτες.

2. Προσδιορίζει την περιοχή συχνοτήτων (ω_1, ω_2), γύρω από τη συχνότητα συντονισμού ω_0 , όπου ο ταλαντωτής αποκρίνεται ικανοποιητικά στον εξωτερικό διεγέρτη.

Ικανοποιητική είναι η απόκριση ενός ταλαντωτή όταν η μέση ισχύς που παρέχεται σε αυτόν από τον εξωτερικό διεγέρτη είναι ίση τουλάχιστον με το ήμισυ της μέγιστης μέσης ισχύος $\overline{P}_{\max}$

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ Q

Υπολογισμός της περιοχής συχνοτήτων συντονισμού (ω_1, ω_2)

Μέση Ισχύς:

$$\boxed{\bar{P}(\omega) = \frac{F_0^2}{2b}\frac{\frac{\omega^2}{\tau^2}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}$$

Εξισώνουμε τη μέση ισχύ με το μισό της μέγιστης μέσης ισχύος:

$$\bar{P}(\omega) = \frac{\bar{P}_{\max}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cancel{F_0^2}}{\cancel{2b}}\frac{\frac{\omega^2}{\tau^2}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} = \frac{\cancel{F_0^2}}{\cancel{4b}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{\omega^2}{\tau^2}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2} = 2\frac{\omega^2}{\tau^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 - \frac{\omega^2}{\tau^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega}{\tau}\right)\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega}{\tau}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\omega^2 + \frac{1}{\tau}\omega - \omega_0^2\right)\left(\omega^2 - \frac{1}{\tau}\omega - \omega_0^2\right) = 0 \quad \begin{cases} \omega^2 + \frac{1}{\tau}\omega - \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} + \omega_0^2} - \frac{1}{2\tau}} \\ \text{Θετική ρίζα} \\ \omega^2 - \frac{1}{\tau}\omega - \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} + \omega_0^2} + \frac{1}{2\tau}} \\ \text{Θετική ρίζα} \end{cases}$$

ΣΥΝΤΕΛΑΣΤΗΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ Q

Ποσοτικός ορισμός του Συντελεστή Ποιότητας Συντονισμού Q

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \quad \text{ή} \quad Q = \frac{2\pi f_0}{2\pi f_2 - 2\pi f_1} \Rightarrow Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$$

$$\boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} + \omega_0^2} + \frac{1}{2\tau}} \qquad \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} + \omega_0^2} - \frac{1}{2\tau}}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\cancel{\sqrt{\frac{1}{4\tau^2} + \omega_0^2}} + \frac{1}{2\tau} - \cancel{\sqrt{\frac{1}{4\tau^2} + \omega_0^2}} + \frac{1}{2\tau}} = \frac{\omega_0}{\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{2\tau}} = \frac{\omega_0}{\frac{1}{\tau}} = \omega_0\tau \quad \Rightarrow$$

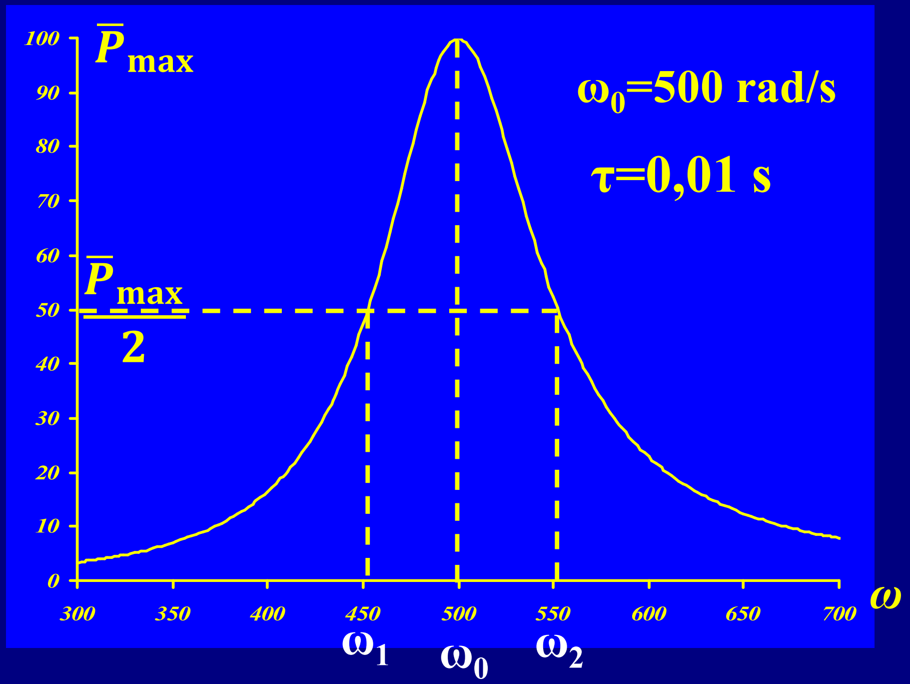
$$Q = \omega_0\tau$$

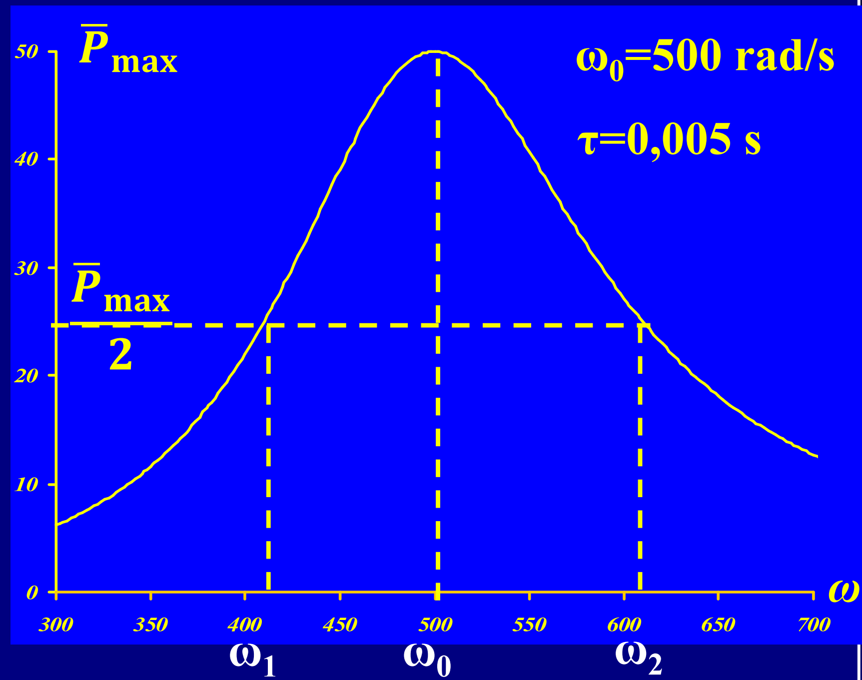
$\tau =$ σταθερά χρόνου στην ταλάντωση με απόσβεση

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \omega_0\tau = 2\pi\frac{E}{\Delta E}$$

Ο συντελεστής ποιότητα Q της ταλάντωσης με διέγερση είναι ίσος με το συντελεστή ποιότητας της ταλάντωσης με απόσβεση

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΥ Q





ω_0 = 500 rad/s

ω_1 = 450 rad/s ω_2 = 550 rad/s

ω_0 = 500 rad/s

ω_1 = 410 rad/s ω_2 = 610 rad/s

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{500 \text{ rad/s}}{550 \text{ rad/s} - 450 \text{rad/s}} = 5$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{500 \text{ rad/s}}{610 \text{ rad/s} - 410 \text{ rad/s}} = 2,5$$

ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗ ΜΙΑΣ ΓΕΦΥΡΑΣ (1)

ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗ ΜΙΑΣ ΓΕΦΥΡΑΣ (2)

ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗ ΜΙΑΣ ΓΕΦΥΡΑΣ (3)