ΑΝΩΤΑΤΗ
ΣΧΟΛΗ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ	ΤΜΗΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ
ΦΥΣΙΚΗ	**Μηχανολόγων Μηχανικών**
	Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Καθηγητής Σιδερής Ευστάθιος

ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΚΥΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΑΜΗΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Ταχύτητα Εγκάρσιου Μηχανικού Κύματος.

Ταχύτητα Διαμήκους Κύματος σε Αέριο Μέσο.

Η Διαταραχή της Πίεσης του Μέσου στα Διαμήκη Κύματα.

Εξάρτηση της Ταχύτητας του Ήχου από τη Θερμοκρασία

Ταχύτητα Εγκάρσιου Μηχανικού Κύματος σε Τεντωμένο Νήμα, Χορδή ή Σκοινί

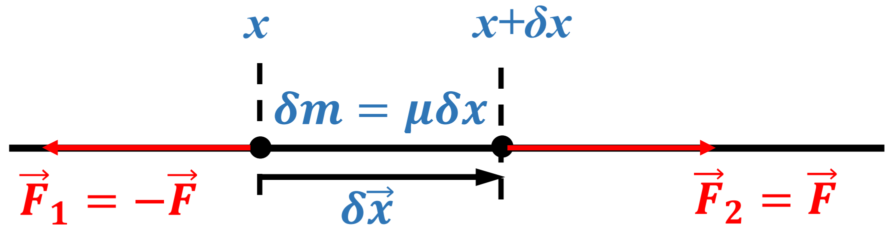
$$\upsilon = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

F = **Δύναμη που τεντώνει το νήμα ή τη χορδή ή το σκοινί**

$$\mu(x) = \frac{dm}{dx} =$$ **Γραμμική πυκνότητα νήματος**

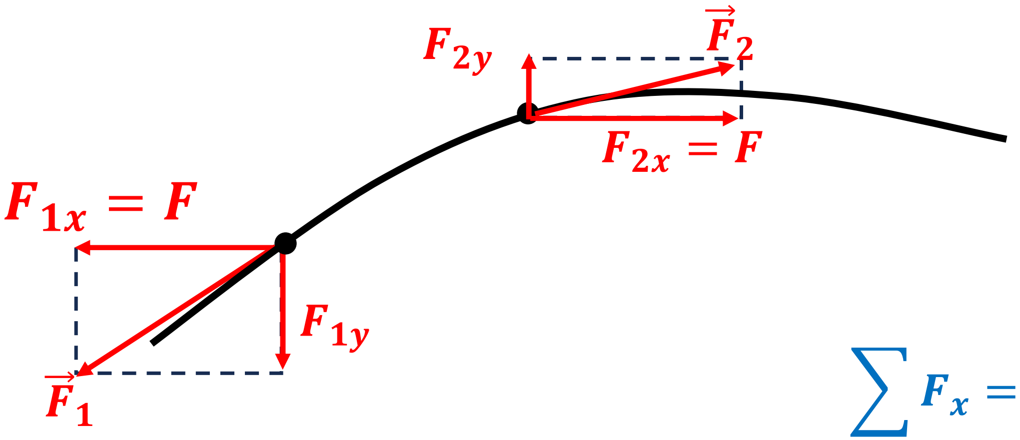
$$\mu = \frac{m}{L} =$$ **Γραμμική πυκνότητα ομογενούς νήματος μάζας** m **και μήκους** L

Ταχύτητα Εγκάρσιου Μηχανικού Κύματος σε Τεντωμένο Νήμα, Χορδή ή Σκοινί



Ένα Τμήμα χορδής μήκους δx σε ισορροπία στην περιοχή (x, $x+\delta x$) που τεντώνεται με δύναμη F

$$\mu = \frac{\delta m}{\delta x} = \text{Γραμμική πυκνότητα νήματος}$$

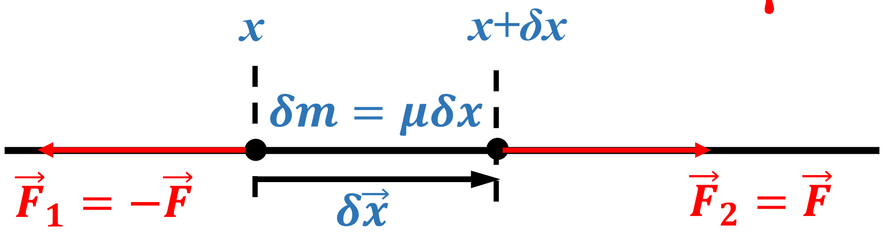


Στιγμιότυπο τμήματος χορδής σε ταλάντωση πολύ μικρού πλάτους (σε μεγέθυνση)

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{2x} - F_{1x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_{2x} = F_{1x}}$$

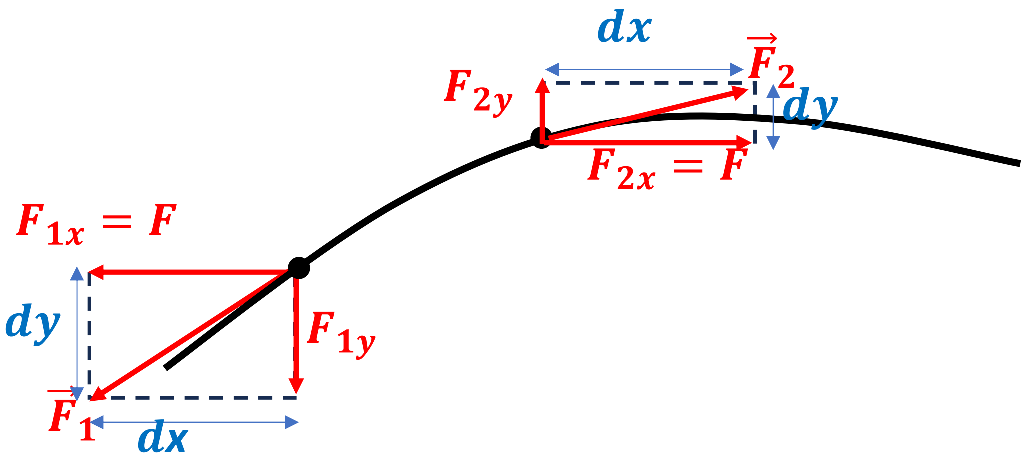
$$\left.\begin{aligned} &\sum F_y = F_{2y} - F_{1y} \\ &\sum F_y = \delta m\, a_y = \mu\, \delta x\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{F_{2y} - F_{1y} = \mu\, \delta x\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

Ταχύτητα Εγκάρσιου Μηχανικού Κύματος σε Τεντωμένο Νήμα, Χορδή ή Σκοινί



Ένα Τμήμα χορδής μήκους δx σε ισορροπία στην περιοχή $(x, x+\delta x)$ που τεντώνεται με δύναμη F

$$\mu = \frac{\delta m}{\delta x} = \text{Γραμμική πυκνότητα νήματος}$$



Στιγμιότυπο τμήματος χορδής σε ταλάντωση πολύ μικρού πλάτους (σε μεγέθυνση)

Αποδείξαμε: $$\boxed{F_{2y} - F_{1y} = \mu\, \delta x\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

Κλίση χορδής στη θέση x: $\dfrac{F_{1y}}{F} = \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_x \Rightarrow F_{1y} = F\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_x$

Κλίση χορδής στη θέση $x+\delta x$: $\dfrac{F_{1y}}{F} = \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\delta x} \Rightarrow F_{2y} = F\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\delta x}$

$$F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\delta x} - F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x = \mu\, \delta x\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Ταχύτητα Εγκάρσιου Μηχανικού Κύματος σε Τεντωμένο Νήμα, Χορδή ή Σκοινί

Αποδείξαμε:

$$F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\delta x} - F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x} = \mu\,\delta x\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad F\left(\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\delta x} - F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}\right) = \mu\,\delta x\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\delta x} - F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}}{\delta x} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\delta x} - F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}}{\delta x}\right] = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Δ.Ε. Κύματος: $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\upsilon^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\end{aligned}\right\} \frac{1}{\upsilon^2} = \frac{\mu}{F} \quad \Rightarrow$$

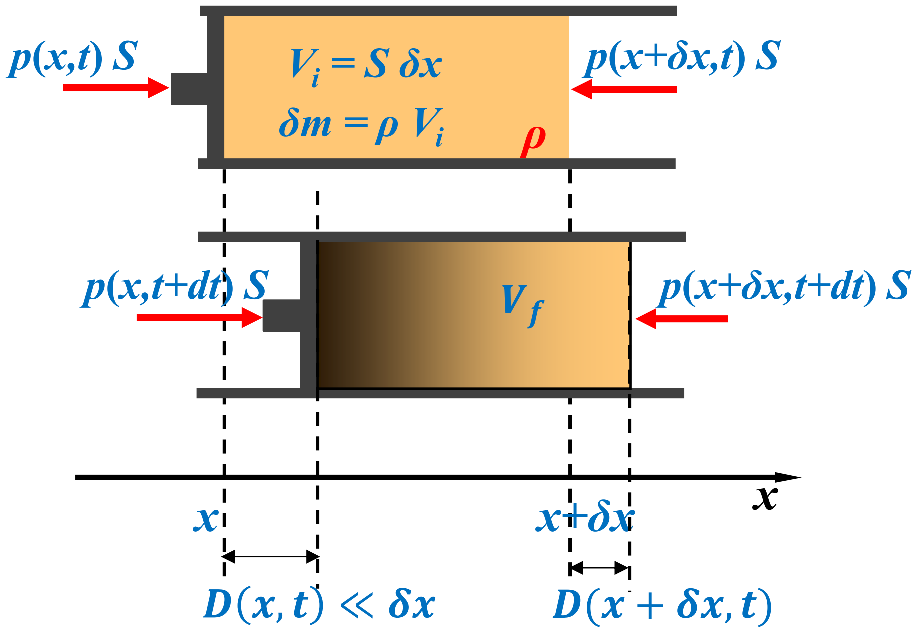
$$\upsilon^2 = \frac{F}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow}$$

Ταχύτητα Διαμήκους Κύματος σε Αέριο Μέσο

$$\boxed{p(x,t) = p(x+\delta x,t)}$$

$$\boxed{dp = -B\frac{dV}{V}}$$

$$\boxed{\delta V = S[D(x+\delta x,t) - D(x,t)]}$$



Κατάσταση Τμήματος Αέριας Στήλης τη Χρονική Στιγμή t

$$p(x,t)\,\cancel{S} = p(x+\delta x,t)\,\cancel{S} \;\Rightarrow\; p(x,t) = p(x+\delta x,t)$$

Κατάσταση Τμήματος Αέριας Στήλης τη Χρονική Στιγμή $t+dt$

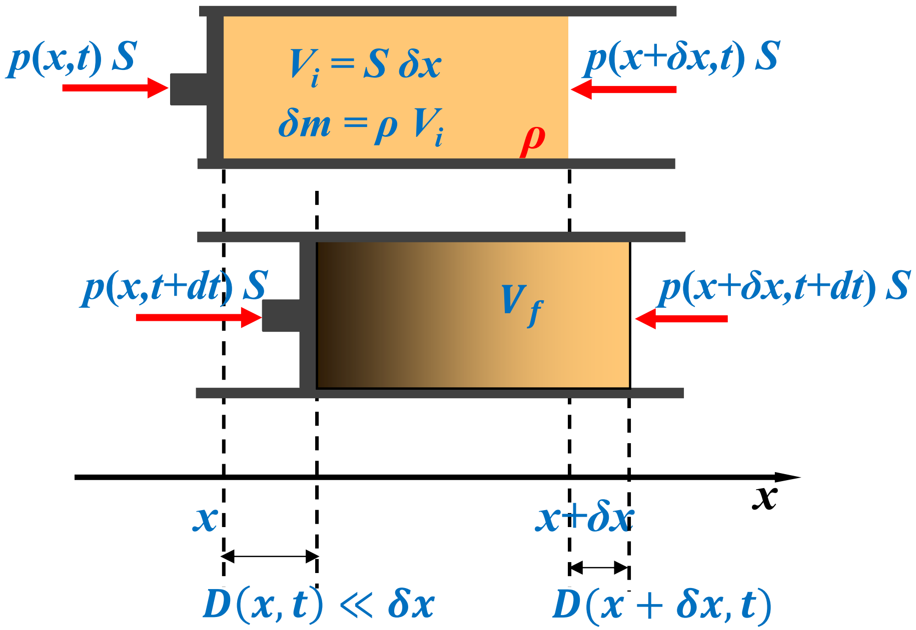
Νόμος Ελαστικότητας Όγκου: $dp = -B\dfrac{dV}{V}$

B = **μέτρο ελαστικότητας όγκου**

$$V_f = V_i - S\,D(x,t) + S\,D(x+\delta x,t) \;\Rightarrow\; V_f - V_i = -S\,D(x,t) + S\,D(x+\delta x,t)$$

Ταχύτητα Διαμήκους Κύματος σε Αέριο Μέσο

$\boxed{p(x,t) = p(x+\delta x,t)}$ $\boxed{dp = -B\dfrac{dV}{V}}$ $\boxed{\delta V = S[D(x+\delta x,t) - D(x,t)]}$ $\boxed{\dfrac{dV}{V} = \dfrac{\partial D(x,t)}{\partial x}}$



$$\left.\begin{aligned}&\frac{\delta V}{V} = \frac{\cancel{S}[D(x+\delta x,t) - D(x,t)]}{\cancel{S}\,\delta x}\\ &\delta x \to 0 \quad \Rightarrow \quad \delta V \to dV\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{dV}{V} = \lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{D(x+\delta x,t) - D(x,t)}{\delta x}\right) \quad \Rightarrow$$

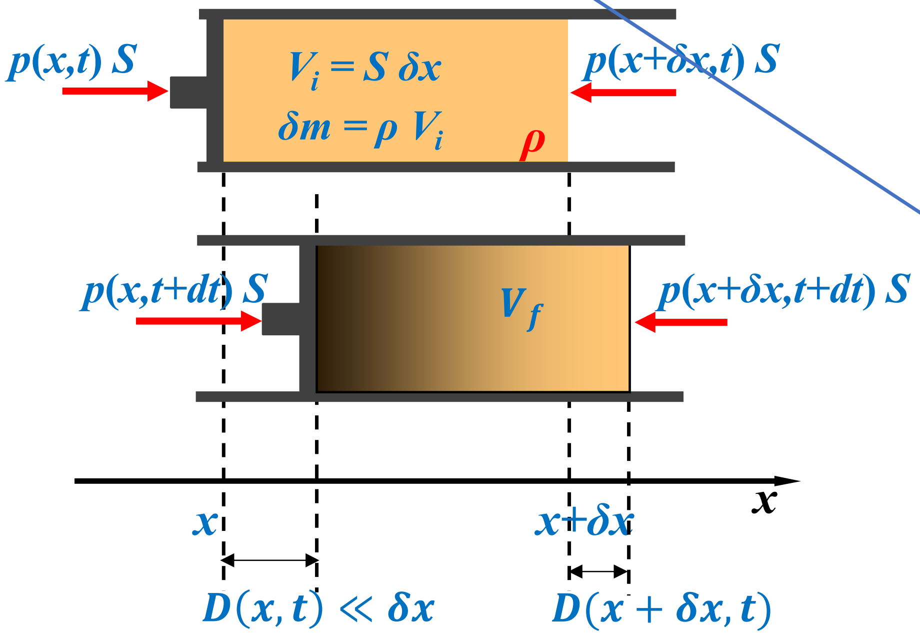
$$\frac{dV}{V} = \frac{\partial D(x,t)}{\partial x}$$

Ταχύτητα Διαμήκους Κύματος σε Αέριο Μέσο

$$\boxed{p(x,t) = p(x+\delta x,t)}$$

$$\boxed{dp = -B\frac{dV}{V}} \quad \boxed{\frac{dV}{V} = \frac{\partial D(x,t)}{\partial x}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{dp = -B\frac{\partial D(x,t)}{\partial x}}$$

$$\boxed{dp(x,t) - dp(x+\delta x,t) = p(x,t+dt) - p(x+\delta x,t+dt)}$$



<u>ΣΤΟ ΧΡΟΝΙΚΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ</u> dt

α) Μεταβολή της πίεσης στη θέση x**:**

$$dp(x,t) = p(x,t+dt) - p(x,t)$$

β) Μεταβολή της πίεσης στη θέση $x+\delta x$**:**

$$dp(x+\delta x,t) = p(x+\delta x,t+dt) - p(x+\delta x,t)$$

Αφαίρεση κατά μέλη

$$dp(x,t) - dp(x+\delta x,t) = p(x,t+dt) - \cancel{p(x,t)} - p(x+\delta x,t+dt) + \cancel{p(x+\delta x,t)}$$

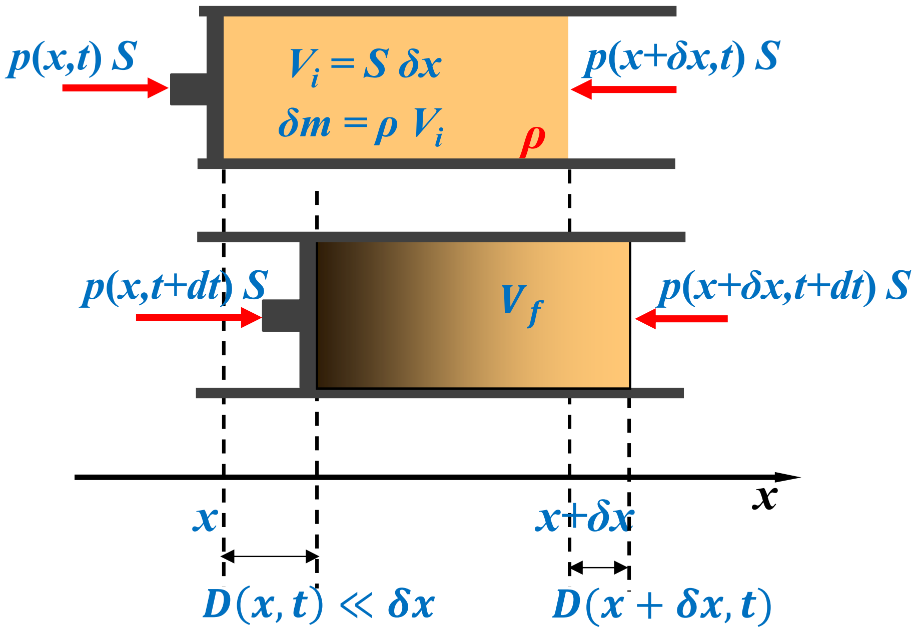
Ταχύτητα Διαμήκους Κύματος σε Αέριο Μέσο

$$p(x,t) = p(x+\delta x,t)$$

$$dp = -B\frac{dV}{V} \qquad \frac{dV}{V} = \frac{\partial D(x,t)}{\partial x}$$

$$dp = -B\frac{\partial D(x,t)}{\partial x}$$

$$dp(x,t) - dp(x+\delta x,t) = p(x,t+dt) - p(x+\delta x,t+dt)$$



Συνισταμένη δύναμη στα όρια του όγκου V_f:

$$F_{\text{net}} = [p(x,t+dt) - p(x+\delta x,t+dt)]S$$

2ος Νόμος Newton:

$$\left.\begin{aligned} F_{\text{net}} &= \delta m\,\alpha \\ \delta m &= \rho V_f \\ \alpha &= \frac{\partial^2 D(x,t)}{t^2} \\ V_f &= S\,\delta x \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_{\text{net}} = \rho S\,\delta x\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2}$$

$$[p(x,t+dt) - p(x+\delta x,t+dt)]\cancel{S} = \rho\cancel{S}\,\delta x\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2}$$

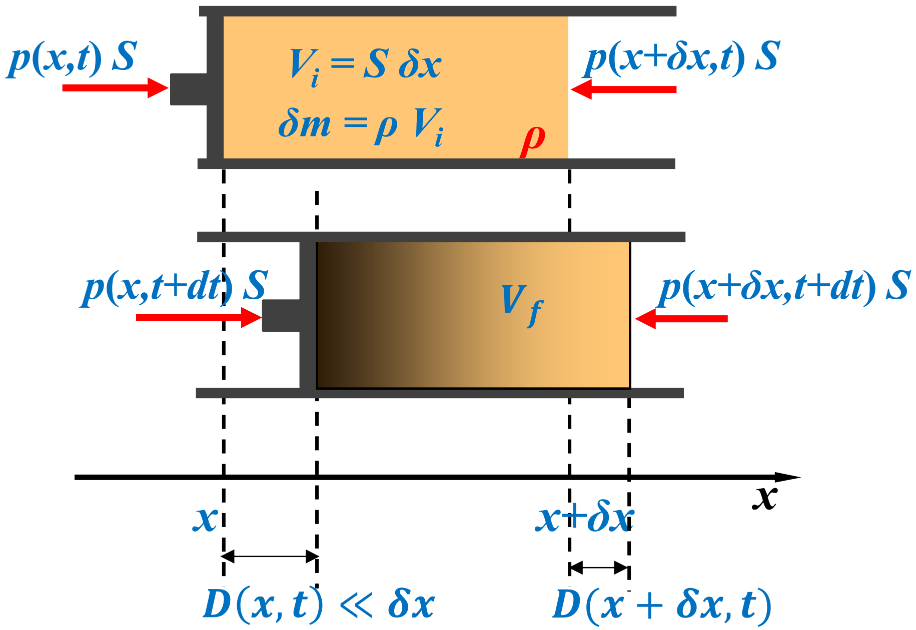
Ταχύτητα Διαμήκους Κύματος σε Αέριο Μέσο

$$p(x,t) = p(x+\delta x, t)$$

$$dp = -B\frac{dV}{V} \qquad \frac{dV}{V} = \frac{\partial D(x,t)}{\partial x}$$

$$dp = -B\frac{\partial D(x,t)}{\partial x}$$

$$dp(x,t) - dp(x+\delta x, t) = p(x, t+dt) - p(x+\delta x, t+dt)$$



Αποδείξαμε:

$$p(x, t+dt) - p(x+\delta x, t+dt) = \rho\,\delta x\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2}$$

$$dp(x,t) - dp(x+\delta x, t) = -B\frac{\partial D(x,t)}{\partial x} + B\frac{\partial D(x+\delta x,t)}{\partial x}$$

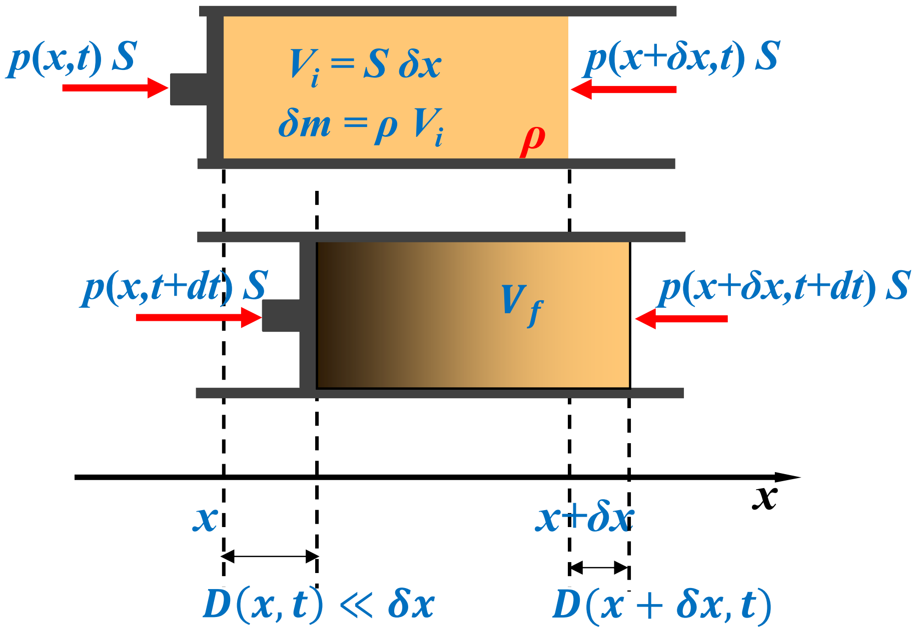
$$dp(x,t) - dp(x+\delta x, t) = B\left(\frac{\partial D(x+\delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial D(x,t)}{\partial x}\right)$$

Ταχύτητα Διαμήκους Κύματος σε Αέριο Μέσο

$$\boxed{p(x,t) = p(x+\delta x,t)}$$

$$\boxed{dp = -B\frac{dV}{V}} \quad \boxed{\frac{dV}{V} = \frac{\partial D(x,t)}{\partial x}} \Rightarrow \boxed{dp = -B\frac{\partial D(x,t)}{\partial x}}$$

$$\boxed{dp(x,t) - dp(x+\delta x,t) = p(x,t+dt) - p(x+\delta x,t+dt)}$$



Αποδείξαμε:

$$p(x,t+dt) - p(x+\delta x,t+dt) = \rho\,\delta x\,\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2}$$

$$dp(x,t) - dp(x+\delta x,t) = B\left(\frac{\partial D(x+\delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial D(x,t)}{\partial x}\right)$$

$$B\left(\frac{\partial D(x+\delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial D(x,t)}{\partial x}\right) = \rho\,\delta x\,\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2} \quad \Rightarrow$$

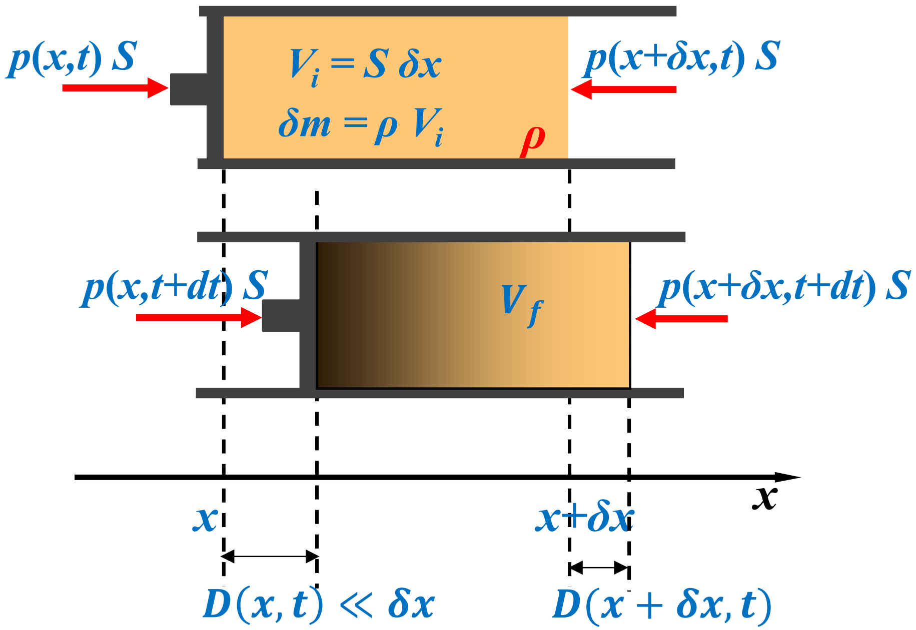
$$\frac{\left(\frac{\partial D(x+\delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial D(x,t)}{\partial x}\right)}{\delta x} = \frac{\rho}{B}\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2}$$

Ταχύτητα Διαμήκους Κύματος σε Αέριο Μέσο

$$\boxed{p(x,t) = p(x+\delta x,t)}$$

$$\boxed{dp = -B\frac{dV}{V}} \quad \boxed{\frac{dV}{V} = \frac{\partial D(x,t)}{\partial x}} \Rightarrow \boxed{dp = -B\frac{\partial D(x,t)}{\partial x}}$$

$$\boxed{dp(x,t) - dp(x+\delta x,t) = p(x,t+dt) - p(x+\delta x,t+dt)}$$



Αποδείξαμε:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\left(\frac{\partial D(x+\delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial D(x,t)}{\partial x}\right)}{\delta x} = \frac{\rho}{B}\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2} \\ &\lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{\left(\frac{\partial D(x+\delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial D(x,t)}{\partial x}\right)}{\delta x} = \frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{B}\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2} \\ &\text{Διαφορική Εξίσωση Κύματος: } \frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\upsilon^2} = \frac{\rho}{B} \Rightarrow \\ &\boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}}} \end{aligned}\right.$$

Ταχύτητα διάδοσης διαμήκους κύματος

Ταχύτητα Διαμήκους Κύματος

Ταχύτητα Διαμήκους Κύματος σε ρευστό: $\boldsymbol{\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}}}$

$\boldsymbol{B}$ = **Μέτρο ελαστικότητας όγκου**

$\boldsymbol{\rho}$ = **Πυκνότητα ρευστού**

Ταχύτητα Διαμήκους Κύματος σε στερεό: $\boldsymbol{\upsilon = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}}$

$\boldsymbol{Y}$ = **Μέτρο ελαστικότητας Young**

$\boldsymbol{\rho}$ = **Πυκνότητα στερεού**

Διαταραχή της Πίεσης του Μέσου Διάδοσης στα Διαμήκη Κύματα

$$\left.\begin{aligned} &\textbf{Εξίσωση Κύματος:}\quad \boldsymbol{D(x,t)} = \boldsymbol{A}\sin(kx-\omega t+\varphi_0) \\ &\textbf{Αποδείξαμε:}\quad \boldsymbol{dp} = -\boldsymbol{B}\frac{\boldsymbol{\partial D(x,t)}}{\boldsymbol{\partial x}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\delta p} = -\boldsymbol{B}\frac{\boldsymbol{\partial}(\boldsymbol{A}\sin(kx-\omega t+\varphi_0))}{\boldsymbol{\partial x}} \quad \Rightarrow$$

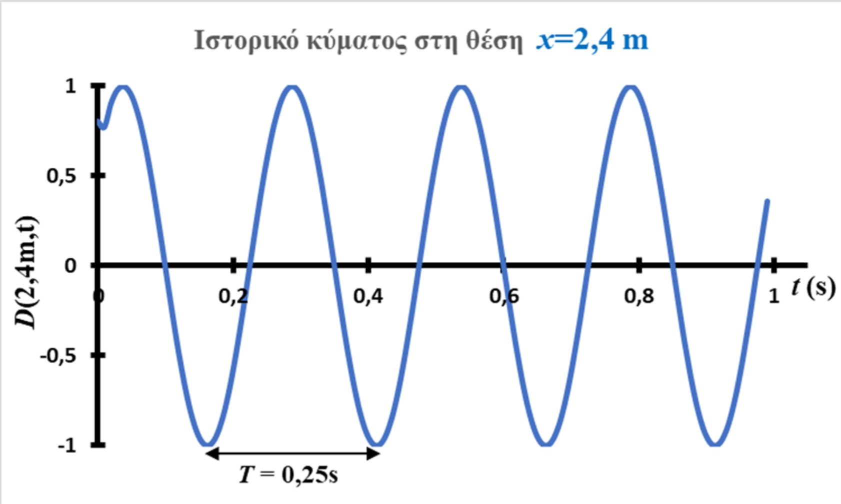
$$\boldsymbol{\delta p(x,t)} = -\boldsymbol{BAk}\cos(kx-\omega t+\varphi_0) \quad \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\delta p(x,t)} = -\boldsymbol{\delta p}_{\mathbf{max}}\cos(kx-\omega t+\varphi_0)$$

$$\boldsymbol{\delta p}_{\mathbf{max}} = \boldsymbol{BAk}$$

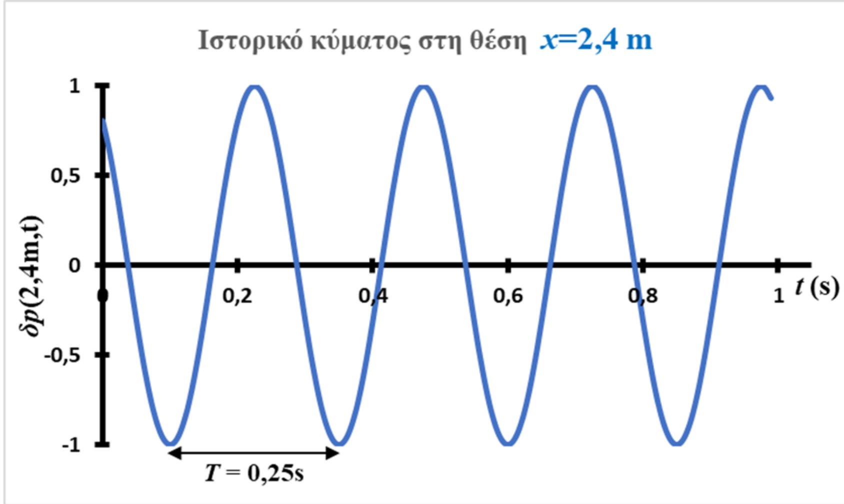
Μετατόπιση Διαμήκους Κύματος

$$D(x,t) = A\sin\left(2\pi\frac{x}{2{,}4m} - 2\pi\frac{t}{0{,}23s} + \frac{4\pi}{5}\right)$$



Διαταραχή πίεσης Διαμήκους Κύματος

$$\delta p(x,t) = -BAk\cos\left(2\pi\frac{x}{2{,}4m} - 2\pi\frac{t}{0{,}23s} + \frac{4\pi}{5}\right)$$



Εξάρτηση της Ταχύτητας του Ήχου από τη Θερμοκρασία

ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}}}$$

Ταχύτητα διαμήκους κύματος

$$\boxed{pV = \eta RT}$$

Καταστατική εξίσωση αερίων

$$\boxed{dp = -B\frac{dV}{V}}$$

Ελαστικότητα όγκου

$$\boxed{B = \gamma p}$$

Στη διάδοση του ήχου στον αέρα, οι μεταβολές της πίεσης p και του όγκου V είναι πολύ γρήγορες και ακολουθούν τον αδιαβατικό νόμο των αερίων:

$$\boxed{pV^{\gamma} = \text{σταθερό}}$$

γ = αδιαβατική σταθερά αερίου

$$\frac{d(pV^{\gamma})}{dV} = 0 \quad \Rightarrow \quad V^{\gamma}\frac{dp}{dV} + p\frac{dV^{\gamma}}{\delta V} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V^{\gamma}\frac{dp}{dV} + \gamma p V^{\gamma-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad V^{\gamma}\frac{dp}{dV} + \gamma p V^{\gamma}V^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cancel{V^{\gamma}}\left(\frac{dp}{dV} + \gamma p V^{-1}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{dV} + \gamma p V^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dV} = -\gamma p\frac{1}{V} \quad \Rightarrow \quad \boxed{dp = -\gamma p\frac{dV}{V}} \longrightarrow \boxed{B = \gamma p}$$

Εξάρτηση της Ταχύτητας του Ήχου από τη Θερμοκρασία

ΔΕΔΟΜΕΝΑ: $\boxed{\upsilon = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}}}$ Ταχύτητα διαμήκους κύματος

$\boxed{pV = \eta RT}$ Καταστατική εξίσωση αερίων

$\boxed{dp = -B\dfrac{dV}{V}}$ Ελαστικότητα όγκου

$\boxed{B = \gamma p}$

$$p = \eta\frac{RT}{V} \rightarrow B = \gamma\eta\frac{RT}{V}$$

Αριθμός Γραμμομορίων $\Big\}$ $\eta = \dfrac{\mu\alpha\zeta\alpha\ \alpha\varepsilon\rho\iota o\upsilon\ (m)}{\gamma\rho\alpha\mu\mu o\mu o\rho\iota\alpha\kappa\eta\ \mu\alpha\zeta\alpha\ (M)} \Rightarrow \eta = \dfrac{m}{M}$ $\Big\} \Rightarrow$

$$B = \gamma\frac{m}{M}\frac{RT}{V} = \gamma\frac{m}{V}\frac{RT}{M}$$

Πυκνότητα αερίου: $\rho = \dfrac{m}{V}$ $\Big\} \Rightarrow$ $B = \gamma\rho\dfrac{RT}{M} \Rightarrow \dfrac{B}{\rho} = \gamma\dfrac{RT}{M}$ $\boxed{\Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}}}$

Για τον ατμοσφαιρικό αέρα σε θερμοκρασία $\theta = 20\ ^{o}\mathrm{C}$:

$$\left\{\begin{array}{l} T = (273+20)\mathrm{K} = 293\ \mathrm{K} \\ \gamma = 1,4 \quad \text{και} \quad R = 8,31\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}}\mathrm{K} \\ M = 0,029\ \mathrm{kg} \end{array}\right\} \quad \boxed{\upsilon = 343\ \mathrm{m/s}}$$