Θέματα εξετάσεων για επανάληψη

ΘΕΜΑ Β (2023)

Δίνεται η συνάρτηση g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \dfrac{4 - e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση

h : $(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο h(x) = lnx .

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f =goh. **Μονάδες 5**

Έστω $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x}$, x>0.

Β2. **i)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \dfrac{\pi}{e}$ (μονάδες 4). **Μονάδες 8**

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f . **Μονάδες 6**

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sigma\upsilon\nu(1 + x^2)}{f(x)}$. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Β (2022)

Δίνεται η συνάρτηση f : $(-\infty,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ και η συνάρτηση g : $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση h=fog. **Μονάδες 6**

Β2. Αν $h(x)=(x-1)^2$, $x \in [0,1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "1- 1" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6). **Μονάδες 9**

Β3. Έστω $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{h^{-1}(x)}{1 - x} & , \quad x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2} & , \quad x = 1 \end{cases}$

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο [0,1]. (μονάδες 6)

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)$ = ημα, όπου $\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. (μονάδες 4)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β (2021)

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=x\cdot e^{1-x}$ $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 3**

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 6**

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν. **Μονάδες 9**

Β4. Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (μονάδες 4).

(ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. (μονάδες 3).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Β (2020)

Δίνονται οι συναρτήσεις

f: $(1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ και g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = e^x$.

Β1. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση fog. **Μονάδες 5**

Β2. Αν $(fog)(x) = \dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, με x>0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fog είναι '1 – 1' και να βρείτε την αντίστροφή της. **Μονάδες 8**

Β3. Αν $\varphi(x) = (fog)^{-1}(x) = \ell n\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, με x>1, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς την μονοτονία. **Μονάδες 6**

Β4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Β3**, να βρεθούν τα όρια

$\lim\limits_{x\to 1^+} \varphi(x)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x)$ **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Β (2019)

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} + \lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία y=2.

Β1. Να αποδείξετε ότι λ=2. **Μονάδες 3**

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) – x = 0 έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα (2,3)

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4). **Μονάδες 6**

Β4. Έστω $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$, x>2. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6). **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ Β (2018)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Β1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα. **Μονάδες 8**

Β2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **Μονάδες 4**

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. **Μονάδες 6**

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δεν σβήνει)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Β (2017)

Δίνονται οι συναρτήσεις και $f(x)=\ell n x$, $x>0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$. **Μονάδες 5**

Β2. Αν $h(x)= (f \circ g)(x)= \ell n\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. **Μονάδες 6**

Β3. Αν $\varphi(x)= h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **Μονάδες 7**

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό) **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Β (2016)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in R$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα Β1,Β2,Β3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Η γραφική παράσταση α σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ (2018)

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \; x \in (0,8)$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με την διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με $5m^2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ (2019)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι α=1 και β=1.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ3. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα x_o, η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_of(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_o, +\infty)$.

(Μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Ένα σημείο M(x,y) κινείται κατά μήκος της καμπύλης y=f(x), x≥1.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο A(3,10), ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $M\overset{\Delta}{O}K$ τη χρονική στιγμή t_0, όπου K(x,0) και O(0,0).

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ (2021)

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\ell n x = \frac{1}{x} \quad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα, x_0, η οποία ανήκει στο $(1, e)$. **Μονάδες 4**

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ έχει τύπο $f(x)=(\ell n x_0)(x+1)-\ell n x-1$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0)=0$. **Μονάδες 6**

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x)=x\cdot e^{-x}, x\in R \quad \text{και} \quad h(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, x\in\mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη. **Μονάδες 8**

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x) > \varphi(x)$, για κάθε $x>0$. Θεωρούμε τα σημεία $A(x,f(x))$ και $B(x,\varphi(x))$, με $x>0$. Αν η απόσταση των σημείων Α και Β γίνεται ελάχιστη στο $x=x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ (2022)

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x - \ln(3x)$$

Δ1. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2, με $x_1 < 1 < x_2$.

(μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. (μονάδες 2)

Μονάδες 8

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1, x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

Δ2. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα x΄x, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2-x_1) < 0$.

Μονάδες 4

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ έχει λύση.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ (2021)

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^3-3x^2-x+1, & x\le 0\\ \sigma\upsilon\nu x, & 0<x\le\dfrac{3\pi}{2}\end{cases},\ \text{με}\ \alpha<-3.$$

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ (μονάδες 3). **Μονάδες 6**

Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$ (μονάδες 3). **Μονάδες 6**

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα x΄x. **Μονάδες 6**

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x)\ge -1$, για κάθε $x\in\left(-\infty,\dfrac{3\pi}{2}\right]$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Γ (2023)

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3x+3, & x<1\\ \dfrac{1}{x}+\alpha, & x\ge 1\end{cases}$$

όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 xf(x)\,dx=1.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι α=0. **Μονάδες 4**

Γ2. **i)** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x 'x (μονάδες 4). **Μονάδες 8**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» (“1-1”) (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3). **Μονάδες 6**

Γ4. Έστω (ε): y= -x+2 η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με x≥1, την ευθεία (ε), τον άξονα x ' x και την ευθεία x=e. **Μονάδες 7**