Διαγώνισμα στα μαθηματικά

Θέμα Α

Α1. Έστω f συνεχής σε διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ . (**6 μονάδες**)

Α2. Να αποδείξετε ότι αν f παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0 . (**3 μονάδες**)

Α3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ ; (**3 μονάδες**)

Α4. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης ; (**3 μονάδες**)

Α5. Για κάθε μια πρόταση να γράψετε : Σωστό ή Λάθος

1) Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 .
2) Αν μια συνάρτηση δεν μηδενίζει τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο .
3) Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι 1-1 .
4) Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$
5) Αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 τότε $f'(x_0) = 0$

(**10 μονάδες**)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x-3} + x - 2$

Β1. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (**6 μονάδες**)

Β2. Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα . (**3 μονάδες**)

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f . (**6 μονάδες**)

Β4. Να σχεδιάσετε την C_f . (**6 μονάδες**)

Β5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , την πλάγια ασύμπτωτη

της C_f , την ευθεία x = 4 και την ευθεία x = 5 . (**4 μονάδες**)

Θέμα Γ

Γ1. Έστω $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(x) = \frac{x \cdot f(x)}{x+1}$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{(x+1)f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή

και στη συνέχεια να βρείτε την f . (**5 μονάδες**)

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα και την κυρτότητα. (**6 μονάδες**)

Γ3. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών

της εξίσωσης $e^{f(x)} = \mu$ (**5 μονάδες**)

Γ4. Έστω α, β με $-1 < \alpha < \beta$. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right) < \frac{2f(a)+f(\beta)}{3}$ (**5 μονάδες**)

Γ5. Αν $h(x) = 1 - (x-1)^{2024}$, να εξετάσετε αν οι C_f και C_h έχουν κοινά σημεία. (**4 μονάδες**)

Θέμα Δ

Δ1. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ και αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $-1 < \alpha < \beta$, $f(a) = \alpha$, $f(\beta) = \beta + 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία μεγαλύτερη από 45° . (**3 μονάδες**)

Δ2. Δίνεται $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(x) = \frac{x+2}{x+1}$ για κάθε $x > -1$.

i) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{-f(\xi)}{\xi - 1}$ (**3 μονάδες**)

ii) Να βρείτε την f . (**3 μονάδες**)

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ln(x+1) + x$

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα , το πρόσημο , την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (**5 μονάδες**)

Δ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 21$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , την (ε) και την ευθεία $x = e - 1$. (**5 μονάδες**)

Δ5. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το $\int_0^e f^{-1}(x)\,dx$. (**6 μονάδες**)

Καλή επιτυχία !!!

Απαντήσεις

Α5 1Λ , 2Λ , 3Σ , 4Λ , 5Σ

Β1 $f'(x) = \frac{(x-4)(x-2)}{(x-3)^2}$

Β2 $f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3}$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	‖	$+$
$f(x)$	↷	‖	↺

Β3 x = 3 κατακόρυφη ασύμπτωτη

$y = x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη

στο $-\infty$ και στο $+\infty$

Β5 Ε = ln2 τ.μ.

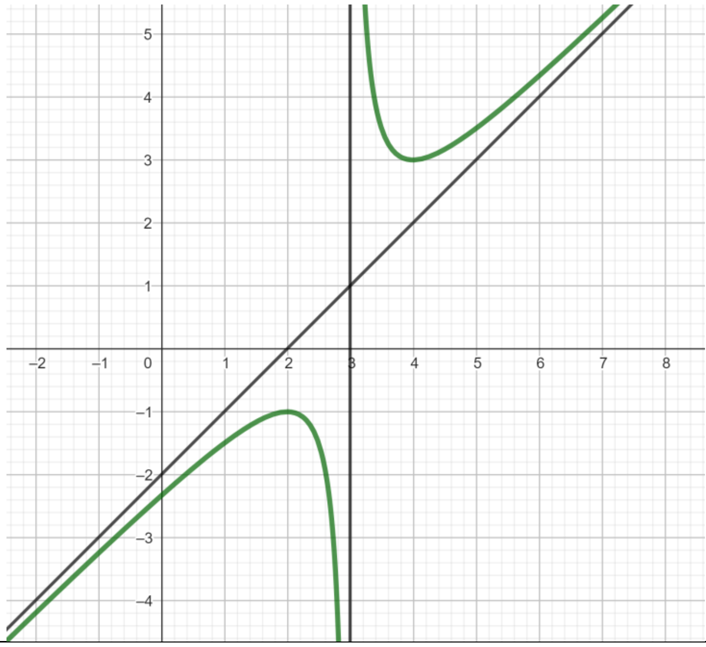
Β1

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	

τ.μ. $f(2) = -1$

τ.ε. $f(4) = 3$

Β4



Γ1 $g'(x) = 0$, $x \in (-1, +\infty)$ $\Rightarrow$ g σταθερή , $g(0) = 1$ $\Rightarrow$ $g(x) = 1$, $x \in (-1, +\infty)$

$\Rightarrow$ $\frac{(x+1)f(x)}{e^x} = 1$, $x \in (-1, +\infty)$ $\Rightarrow$ $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$

Γ2 $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

ο.ε. $f(0) = 1$

$$f''(x) = \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3}$$

x	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	
$f(x)$	↺	

Γ3 $\Delta_1 = (-1, 0]$ $f(\Delta_1) = [1, +\infty)$ $\Delta_2 = (0, +\infty)$ $f(\Delta_2) = (1, +\infty)$

Για $\mu \leq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη

Για $\mu > 0$ έχουμε :

$e^{f(x)} = \mu \Leftrightarrow f(x) = ln\,\mu$

Αν $ln\,\mu > 1 \Leftrightarrow \mu > e$ η εξίσωση έχει 2 ρίζες

Αν $ln\,\mu = 1 \Leftrightarrow \mu = e$ η εξίσωση έχει 1 ρίζα

Αν $ln\,\mu < 1 \Leftrightarrow \mu < e$ η εξίσωση είναι αδύνατη

Γ4 $3f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right) < 2f(a)+f(\beta) \Leftrightarrow \dots\dots\dots \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)-f(\alpha)}{\frac{2\alpha+\beta}{3}-\alpha} < \frac{f(\beta)-f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\beta-\frac{2\alpha+\beta}{3}} \overset{2\,\Theta MT}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \quad \underset{(=)}{f'\nearrow} \quad \xi_1 < \xi_2$ που ισχύει αφού $\xi_1 < \frac{2\alpha+\beta}{3} < \xi_2$

Γ5 $f(x) \geq 1$ (ισότητα για $x=0$) και $h(x) \leq 1$ (ισότητα για $x=1$)

Άρα $f(x) \neq h(x)$, $x \in (-1,+\infty)$ $\Rightarrow$ οι C_f και C_h έχουν κοινά σημεία .

Δ1 Από ΘΜΤ $f'(\xi) = 1+\frac{1}{\beta-\alpha} > 1 \Rightarrow \lambda > 1 \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta > 1 \Rightarrow \dots\dots$

Δ2 i) Θ Rolle για την $g(x) = f(x)\cdot(x-1)$

ii) $f'(x) = (x+ln(x+1))'$, $x\epsilon\ (-1,+\infty) \Rightarrow \dots\dots$

Δ3 $f\nearrow\ (-1,+\infty)$, δεν παρουσιάζει ακρότατα , f κοίλη , $f(D_f) = (-\infty,+\infty)$

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Δ4 $f'(x) = 2 \Leftrightarrow$ x = 0

(ε) : $y = 2x$ $\qquad E = \frac{e^2+2e-1}{2}$ τ.μ.

Δ5

(1ος τρόπος)

$E_1 = E_2 = \int_0^{e-1} (e-f(x))\,dx$

$= \dots\dots = \frac{e^2-3}{2}$

(2ος τρόπος)

$u = f^{-1}(x)$
$f(u) = x$
$f'(u)\,du = dx$
Για x=0 είναι u=0
Για x=e είναι u=e−1

$\int_0^{e-1} uf'(u)\,du = \dots\dots\dots = \frac{e^2-3}{2}$