

11^ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$\text{ισχύει } f'(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ δηλαδή } (x)' = 1 \quad (5 \mu)$$

A2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο

$$\text{ορισμού της και ισχύει } f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \text{ δηλαδή } (\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad (5 \mu)$$

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου

ορισμού της; (5 μ)

A4. Σωστό ή Λάθος; (χωρίς αιτιολόγηση)

α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε σίγουρα είναι και συνεχής στο x_0 .

β) Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η C_f δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Αν $f(x) = e^{4x}$ τότε $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Αν $f(x) = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x$ τότε $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε σίγουρα $f'(x) > 0$

(10 μ)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3$

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

B3. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο, το οποίο έχει αρνητική τετμημένη.

B4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην $y = \frac{1}{11}x + 21$

B5. Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη.

(5x5 = 25 μ)

Θέμα Γ

Γ1. Αν f παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{R}$ και $f(x^2 - 1) = x^4 - 2x^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(3, f(3))$. (10 μ)

Γ2. Αν $f(x) = x^2 + 1$ τότε :

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -8x + 21$ (5 μ)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f οι οποίες διέρχονται από το σημείο $E(0, -3)$ (5 μ)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{f(x^3) - 1}$ (5 μ)

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x - h) - f(x) = -2h$ για κάθε $x, h \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (6 μ)

Δ2. Να δείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = 4$ (6 μ)

Δ3. Αν g συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 42$, να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 και στη συνέχεια ότι ισχύει $g'(0) = 21 \cdot f'(21)$ (6 μ)

Δ4. Αν $f(x) = 2x + 21$ και $g(x) = 42e^x - 42$ να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$. (3 μ)

Δ5. Αν $f(x) = 2x + 21$ να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

$$\lim_{x \rightarrow -11} \frac{1}{f(x) + 1} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) + 1} \quad (4 \mu)$$

Καλή επιτυχία !

12° Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

Θέμα Α

A1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

$$\text{και ισχύει } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ δηλαδή } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad (5 \mu)$$

A2. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$f + g \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 \text{ και ισχύει: } (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad (5 \mu)$$

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle. (3 μ)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας **Σωστό ή Λάθος**
και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της.

β) Μεταξύ δυο ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης υπάρχει ρίζα της παραγώγου της.

γ) Αν υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ τότε $f(\alpha) = f(\beta)$.

(12 μ)

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = 21 - e^x$.

B1. Να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ g$. (5 μ)

B2. Να δείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο. (7 μ)

B3. Να δείξετε ότι οι C_f και C_g δεν έχουν παράλληλες εφαπτόμενες. (3 μ)

B4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη

$$\text{στην ευθεία } 4y - x - 21 = 0. \quad (4 \mu)$$

B5. Ένα κινητό ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της C_f .

Τη στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A(4, 2)$ ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι 1 cm/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του όταν διέρχεται από το $A(4, 2)$. (6 μ)

Θέμα Γ

Γ1. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $f(-3) = 5$, $f(-3) \cdot f(-1) < 0$, $f(21) > 21$, να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς 2 κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$. (8 μ)

Γ2. Αν $1 \leq g'(x) \leq 2$ για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ και $g(1) = 0$,

να δείξετε ότι $-1 \leq g\left(\frac{1}{2}\right) \leq -\frac{1}{2}$ (7 μ)

Γ3. Αν $f(x) = x^2 - 4$ και $g(x) = \ln x$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη με την εφαπτομένη της C_g στο σημείο τομής της με τον $x'x$. (5 μ)

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)g(\xi) = -f(\xi)g'(\xi)$ (5 μ)

Θέμα Δ

Δ1. Αν η παράγωγος της f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και $\alpha < \beta < \gamma < 0$

α) Να δείξετε ότι $(\gamma - \beta)(f(\beta) - f(\alpha)) < (\beta - \alpha)(f(\gamma) - f(\beta))$ (5 μ)

β) Να δείξετε ότι $f'(\alpha) - f'(\beta) < \beta^3 - \alpha^3$ (7 μ)

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{1}{x} - 21$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (7 μ)

β) Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς δυο κοινά σημεία με τον $x'x$. (3 μ)

γ) Είναι η f 1-1; (3 μ)

Καλή επιτυχία !!!

13^ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ για $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $x \in (0, +\infty)$ **(5 μ)**

A2. Να αποδείξετε ότι $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$ για $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$ **(5 μ)**

A3. Να αποδείξετε ότι $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ **(5 μ)**

A4. Σωστό ή Λάθος ;

- 1) Αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ τότε σίγουρα $f(\alpha) = f(\beta)$.
- 2) Αν $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε σίγουρα υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.
- 3) Αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε σίγουρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \alpha + 21)$ τέτοιο ώστε $21f'(\xi) = f(\alpha + 21) - f(\alpha)$.
- 4) Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f = g$.
- 5) Αν f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(10 μ)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 1$

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(5 μ)**

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . **(5 μ)**

B3. Να δείξετε ότι η f έχει μια αρνητική και δυο θετικές ρίζες. **(5 μ)**

B4. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που είναι

παράλληλες στην ευθεία $y = 9x$. **(5 μ)**

B5. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 21} \frac{f(x-21)-1}{x-21}$ **(5 μ)**

Θέμα Γ

Δίνεται η $f(x) = e^{x-1} - 2 \ln x + x$ και συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $g^3(x) + g(x) = -x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (6 μ)

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι

παράλληλη στην ευθεία $y = ex + 21$. (6 μ)

Γ3. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα. (6 μ)

Γ4. Να δείξετε ότι οι C_f και C_g δεν έχουν κοινά σημεία. (3 μ)

Γ5. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^{-1}(x)}{\eta \mu x}$ (4 μ)

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x f'(x) = f(x) + x \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty) \quad \text{και} \quad f(1) = 0$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. (5 μ)

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 21$. (5 μ)

Δ4. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f(x+3) + f(x+1) > 2f(x+2)$ (5 μ)

Δ5. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 21)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)(\xi - 21)^4 + 4f(\xi)(\xi - 21)^3 = 0 \quad (5 \mu)$$

Καλή επιτυχία !!!

14^ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

Θέμα Α

A1. Έστω f ορισμένη σε διάστημα Δ , συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το Δ . (6 μ)

A2. Έστω f ορισμένη σε διάστημα Δ , συνεχής στο Δ και $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ . (6 μ)

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού λογισμού. (3 μ)

A4. Σωστό ή Λάθος ;

α) Αν $f'(x) = e^x (x^2 + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε f γνησίως αύξουσα.

β) Αν f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Αν $f'(x) = 2x$ τότε $f(x) = x^2$.

δ) Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = 0$

τότε $f(\alpha)f(\beta) < 0$

ε) Αν $f(\alpha)f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = 0$

(10 μ)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x-1}$

B1. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία. (5 μ)

B2. Βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μ)

B3. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$

για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$. (5 μ)

B4. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f

που είναι παράλληλες στην ευθεία $16y + x + 21 = 0$ (5 μ)

B5. Αν $1 < \alpha < \beta$ να δείξετε ότι $\alpha\beta f'(\alpha) - \beta < \alpha\beta f'(\beta) - \alpha$ (5 μ)

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2 + \ln x}{x+1}$ και $g(x) = e^x - x + 1$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (8 μ)

Γ2. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

Γ3. Έχουν οι C_f και C_g κοινό σημείο; (2 μ)

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $2g(x_0) = 5 - 2x_0$ (5 μ)

Γ5. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = \frac{1-2x_0}{2x_0}$ (5 μ)

Θέμα Δ

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(21) > 21$ και

$$f^2(x) - 2xf(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (7 μ)

Δ2. Να δείξετε ότι f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (5 μ)

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μ)

Δ4. Να δείξετε ότι $f'(x) < f'(x+1) + e^x(e-1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5 μ)

Δ5. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{21} + 21 \cdot x}$ (3 μ)

Καλή επιτυχία !!!

Θέμα Α

A1. Έστω f, g ορισμένες σε διάστημα Δ , συνεχείς στο Δ και

$$f'(x) = g'(x) \text{ για κάθε εσωτερικό σημείο του } \Delta.$$

Να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά c ώστε $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$. **(5 μ)**

A2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat. **(8 μ)**

A3. Σωστό ή Λάθος (να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας)

- 1) Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 .
- 2) Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 τότε $f'(x_0) = 0$.
- 3) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.
- 4) Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

(12 μ)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(1-x)\ln x}{x}$

B1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1-x-\ln x}{x^2}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. **(3 μ)**

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(7 μ)**

B3. Να δείξετε ότι η $h(x) = x^3 + x - 2$ είναι 1-1. **(4 μ)**

B4. Δίνεται συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$$\text{με } g^3(x) + g(x) = e^x - x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε το ακρότατο της g . **(7 μ)**
- ii) Να εξετάσετε αν έχουν κοινό σημείο οι C_f και C_g . **(4 μ)**

Θέμα Γ

Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $g(x) = xf(x) - 5x$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$ έχει εξίσωση $y = 18x - 31$.

Γ1. Να υπολογίσετε τα $f(2)$ και $f'(2)$. (3 μ)

Γ2. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$. (5 μ)

Γ3. Αν $f''(x) = 12x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε τον τύπο της f . (6 μ)

Γ4. Δίνεται ότι $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$.

i) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f . (4 μ)

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 21$. (2 μ)

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 2e^x + x^2 + \alpha x - 6$ για την οποία ισχύει

$$f(x) + 4 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Δείξτε ότι $\alpha = -2$. (5 μ)

Δ2. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (6 μ)

Δ3. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς 2 ρίζες. (6 μ)

Δ4. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x+3) + 2f(x) > 3f(x+1)$. (5 μ)

Δ5. Να δείξετε ότι $f(x) + x^{2020} + 21 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (3 μ)

Καλή επιτυχία !!!

16^ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

Θέμα Α

A1. Αν f συνεχής σε διάστημα Δ και $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ,
να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ . (9 μ)

A2. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης; (6 μ)

A3. Σωστό ή Λάθος ;

α) Αν $f' = g'$ τότε $f = g$.

β) Αν f γνησίως αύξουσα τότε $f'(x) > 0$ για κάθε x .

γ) Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε f κυρτή.

δ) Αν $f'(x) = (x - 21)^{22}$ τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο 21.

ε) Κάθε συνεχής συνάρτηση που ορίζεται σε κλειστό διάστημα έχει ακρότατα.

(10 μ)

Θέμα Β

Δίνεται η $f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x^2}$ και η ευθεία $y = 9x - 12$ που είναι η εφαπτομένη της C_f
στο σημείο της $A(1, f(1))$.

B1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -4$. (5 μ)

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

B3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (5 μ)

B4. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. (5 μ)

B5. Αν $g(x) = (x^2 - 3x + 2)f(x)$ να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$

τέτοιο ώστε $g''(\xi) = 0$. (5 μ)

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και

$$(x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5 μ)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

Γ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μ)

Γ4. Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|4f(\alpha)f(\beta)| \leq 1$. (5 μ)

Γ5. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (5 μ)

Θέμα Δ

Δ1. Αν $f'(x)f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

να δείξετε ότι η f έχει ακρότατο. (5 μ)

Δ2. Αν $f'(x)f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$,

να βρείτε τον τύπο της f . (5 μ)

Δ3. Αν $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ και $g(x) = x - f(x)$ τότε :

i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα. (5 μ)

ii) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία. (5 μ)

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g . (5 μ)

Καλή επιτυχία !!!

17^ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

Θέμα Α

A1. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$

ολικό μέγιστο; (3 μ)

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$

τοπικό μέγιστο; (3 μ)

A3. Αν f συνεχής σε διάστημα Δ και $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ,

να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ . (9 μ)

A4. Σωστό ή Λάθος ;

1. Αν $f'(x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τότε f σταθερή.
2. Αν $f'(x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τότε $f(\alpha) = f(\beta)$.
3. Αν $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε $f'(x_0) = 0$ για τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$.
4. Αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε $f'(x_0) = 0$ για τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$.
5. Αν $f'(x) = (x + f(x))^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι 1-1.

(10 μ)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x}$ και η ευθεία (ε): $y = -3x + 8$ η οποία εφάπτεται της C_f στο $A(1, f(1))$.

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = x + \frac{4}{x}$ (4 μ)

B2. Να μελετήσετε την f ως προς :

τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα. (9 μ)

B3. Έστω $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 3$.

Να δείξετε ότι $|f(x)| \geq 4$ και $|f(x)| > g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (4 μ)

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f . (4 μ)

B5. Να σχεδιάσετε την C_f . (4 μ)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + \alpha x + \beta$ και η ευθεία $y = x$ που είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$. (5 μ)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (4 μ)

Γ3. Δίνεται η $g(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$.

i) Μελετήστε την g ως προς τη μονοτονία. (4 μ)

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g . (4 μ)

iii) Να δείξετε ότι η g έχει ακριβώς μια ρίζα x_0 για την οποία ισχύει $0 < x_0^{21} < 1$. (4 μ)

iv) Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (4 μ)

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = f(x) + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) - f(x)}{x - 1} = 2e$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5 μ)

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα. (5 μ)

Δ4. Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες η C_f . (5 μ)

Δ5. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $\sqrt{f(\xi)} - e = 0$. (5 μ)

Καλή επιτυχία !!!

18^ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

Θέμα Α

A1. Έστω f ορισμένη σε διάστημα Δ .

Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f ; (5 μ)

A2. Έστω f ορισμένη σε διάστημα Δ . Αν F μια παράγουσα της f στο Δ , να δείξετε ότι:

i) Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$
είναι παράγουσες της f (5 μ)

ii) Κάθε παράγουσα G της f στο Δ ,
παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ (5 μ)

A3. Σωστό ή Λάθος ;

1) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ τότε σίγουρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

2) Αν $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε σίγουρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

3) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

4) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) + 21 dx = 0$ τότε σίγουρα $\alpha = \beta$.

5) $\int_1^{21} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^{21} f(x) dx$

(10 μ)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+10}{x+3}$

B1. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία. (4 μ)

B2. Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα. (4 μ)

B3. Βρείτε (αν υπάρχουν) τις ασύμπτωτες της C_f . (5 μ)

B4. Σχεδιάστε την C_f . (6 μ)

B5. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από

την C_f , τον x και τις ευθείες $x=0$, $x=1$. (6 μ)

Θέμα Γ

Δίνεται η $f(x) = x \cdot \ln(9 + x^2)$

Γ1. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και βρείτε το σύνολο τιμών της. (5 μ)

Γ2. Βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $(f(x) - 21)(f(x) + 2020) = 0$ (5 μ)

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O(0,0)$. (5 μ)

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x) > \ln 9^x$ για κάθε $x > 0$ και στη συνέχεια αν E το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=21$, να δείξετε ότι

$$E > \left(\frac{21^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \cdot \ln 9 \quad (5 \mu)$$

Γ5. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$. (5 μ)

Θέμα Δ

Έστω f, g με $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1) + 1$ και $f'''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = g(x) + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5 μ)

Δ2. Αν η g έχει δυο ρίζες α, β με $\alpha < 0 < \beta$, να δείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α, β) . (5 μ)

Δ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. (5 μ)

Δ4. Αν $g(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ τότε :

i) Να δείξετε ότι $g(x) \geq -\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5 μ)

ii) Αν E το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g και τον $x'x$ να δείξετε ότι $E < \frac{(\beta-\alpha)^3}{4}$ (5 μ)

Καλή επιτυχία !!!

Θέμα Α

A1. Έστω f συνεχής σε διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$

να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha)$. (5 μ)

A2. Να γράψετε τους 3 ορισμούς ασύμπτωτης της C_f . (3 μ)

A3. Σ ή Λ με αιτιολόγηση !

Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ τότε σίγουρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ (4 μ)

A4. Σ ή Λ

- 1) Αν f συνεχής σε διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- 2) Αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f'(x_0) = 0$.
- 3) Αν $f'(x_0) = 0$ τότε σίγουρα η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 .
- 4) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ τότε σίγουρα $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- 5) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ τότε σίγουρα $\alpha = \beta$.

(10 μ)

A5. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1 ;

(3 μ)

Θέμα Β

Δίνεται η $f(x) = x \ln x$.

B1. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

B2. Βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μ)

B3. Βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $3f(x) + 1 = 0$. (5 μ)

B4. Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα και σχεδιάστε την C_f . (5 μ)

B5. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από

την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$. (5 μ)

Θέμα Γ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Γ1. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$. (5 μ)

Γ2. Αν f παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και η εξίσωση $f(x) = x$ έχει δυο ρίζες α, β με $\alpha < \beta$

να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην $y = x + 21$. (5 μ)

Γ3. Αν $f(x) = x \cdot \eta\mu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τότε :

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο. (5 μ)

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον $x'x$ και την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$. (5 μ)

iii) Αν g συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} g(x) < 0$

και $f^2(x) + g^2(x) = x^2$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

να βρείτε την g . (5 μ)

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) + f(x) = e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $f(0) + (f(0))^{21} = 0$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = xe^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5 μ)

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα. (5 μ)

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των ριζών

της εξίσωσης $2ef(x) - 1 = 0$. (5 μ)

Δ4. Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες η C_f και να τη σχεδιάσετε. (5 μ)

Δ5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από

την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$. (5 μ)

Καλή επιτυχία !!!

20° Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

Θέμα Α

A1. Έστω f συνεχής σε διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ,

να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ . (6 μ)

A2. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (5 μ)

A3. Σ ή Λ με αιτιολόγηση !

Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$

τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. (4 μ)

A4. Σ ή Λ

1) Αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε f σταθερή σε όλο το $\mathbb{R}$.

2) Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

3) $(e^{2x})' = e^{2x}$

4) $(\ln 2)' = \frac{1}{2}$

5) $\int_1^{21} \frac{1}{x} dx = \ln 21$

(10 μ)

Θέμα Β

Δίνεται η $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{4 \ln x}{x}$

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (5 μ)

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f . (4 μ)

B4. Να σχεδιάσετε την C_f . (5 μ)

B5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα x'

και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$. (6 μ)

Θέμα Γ

Δίνεται η $f(x) = e^x + x - 1$

Γ1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μ)

Γ2. Να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} , να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να την μελετήσετε ως προς το πρόσημο. (5 μ)

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=e$. (5 μ)

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $2f(x_0) = e^2 + e + 1$ (5 μ)

Γ5. Για κάθε $x > 0$ να δείξετε ότι $20f(2x) < f(21x) + 19f(x)$ (5 μ)

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x \cdot (\ln x - 1)$ και συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$xf'(x) = \ln x - f(x) \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0.$$

Δ1. Να δείξετε ότι η g είναι παράγουσα της $h(x) = \ln x$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g . (5 μ)

Δ2. Αν $\theta \in (\pi, 2\pi)$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $g(x) = \eta\mu\theta$. (5 μ)

Δ3. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$ (5 μ)

Δ4. Να δείξετε ότι $x^x \geq e^{x-1}$ για κάθε $x > 0$. (5 μ)

Δ5. Να δείξετε ότι $\int_1^2 x^x dx > e - 1$ (5 μ)

Καλή επιτυχία !!!

Θέμα Α

Α1

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

(8 μονάδες)

Α2

- i. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;
- ii. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
- iii. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα A και $x_0 \in A$. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

(12 μονάδες)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε κατ'ανάγκη $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

β) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ «κοντά» στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

δ) Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε η f παίρνει μέγιστο και ελάχιστο στο $[a, \beta]$.

ε) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

(5 μονάδες)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2\ln(\sqrt{x-1}+1) + 3$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1-1”.

iii. Να ορίσετε την f^{-1} .

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1+x) = 2$.

v. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{(e-1)^2+1} \frac{f(x)}{4\sqrt{x-1}} dx$
(5 x 5 = 25 μονάδες)

Θέμα Γ

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με $f'(0)=1$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) \cdot e^y + f(y) \cdot e^x \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

i. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.

iii. Δείξτε ότι $f(x) = xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iv. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

v. Εξετάστε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της C_f

(5 x 5 = 25 μονάδες)

Θέμα Δ

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

1. η $g(x) = 3f(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$
2. $f(2) - f(1) < 3$
3. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 3$.

4. Δείξτε ότι $\int_0^1 f'(x) e^x dx < e - \int_0^1 2xe^x dx$

5. Αν $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, να υπολογίσετε

το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον x και την ευθεία $x=1$.

(5 x 5 = 25 μονάδες)

Θέμα Α

Α1

i. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$;

ii. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano

iii. Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

(12 μονάδες)

Α2

ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ

1. Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε

$$f(a) \cdot f(\beta) < 0$$

2. Αν f συνεχής στο Δ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .

3. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα.

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ «κοντά» στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

ε) Για οποιοδήποτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(5 μονάδες)

Α3

Να αποδείξετε ότι η αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(8 μονάδες)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^{2011} + 2x - 5, x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα τη $x = 1$.
- iii. Να βρείτε το πρόσημο της f .
- iv. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τον άξονα $y'y$.
- v. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0)\eta\mu x_0 + f(x_0)\sigma\upsilon\nu x_0 = 0$$

(5 x 5 = 25 μονάδες)

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(2) = 0$, $f'(0) = 0$ και

$$f''(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + 1) < 0$
 - iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,3)$, ώστε : $f(\xi) + 4\xi = \xi^2 + 3$.
- iv. Αν $f(x) = -x^2 + 4$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ τότε :

α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^x f(x) dx$

β) Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} f(x)$

(5 x 5 = 25 μονάδες)

Θέμα Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
 $f'(x) - f(x) = -4e^{-3x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Η συνάρτηση $h(x) = e^{-x}f(x) - e^{-4x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = e^x + \frac{1}{e^{3x}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .
- iv. Να εξετάσετε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της C_f .
- v. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο της C_f
με την ευθεία $y = 4x$ το οποίο έχει τετμημένη στο διάστημα $(0, 1)$.

(5 x 5 = 25 μονάδες)

Θέμα Α

A1

Να αποδείξετε την παρακάτω πρόταση :

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- f συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι σταθερή στο Δ .

(9 μονάδες)

A2

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x, \alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = \alpha^x \cdot \ln \alpha.$$

(7 μονάδες)

A3

Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

(4 μονάδες)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

β) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ με $f(a) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ'ανάγκη $f(\beta) > 0$.

γ. Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον $x'x$) τέμνει τη γραφική παράστασή της σε ένα τουλάχιστον σημείο.

δ. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε υποχρεωτικά $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)dx + \int_\beta^a f(x)dx = 0$$

(5 μονάδες)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + k \cdot x - 1$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

- i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 5$, να βρείτε την τιμή του k .
- ii. Αν $k = 2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$.
- iii. Αν $k = 2$ να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.
- iv. Αν $k = 2$ να δείξετε ότι υπάρχει αρνητικός αριθμός x_0 για τον οποίο ισχύει $f(x_0) = -2019$.
- v. Αν $k = 2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο $A(0, f(0))$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , την (ε) και την ευθεία $x = 1$.

(5 x 5 = 25 μονάδες)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x - 2$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- iv. Αν η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-1}^e f^{-1}(x)dx$
- v. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^3 f(x^2 + 1) dx$.

(5 x 5 = 25 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f'(x) = x \eta \mu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ και } f(0) = 0$$

Δ1. i. Να δείξετε ότι:

$$f(x) = \eta \mu x - x \sigma \upsilon \nu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(Μονάδες 3)

ii. Να δείξετε ότι:

$$\eta \mu x > x \sigma \upsilon \nu x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

(Μονάδες 2)

Δ2. Έστω επίσης η συνάρτηση:

$$g(x) = |x \epsilon \phi x - x^2|, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 4)

Δ3. i. Αν $\alpha > 0$, να δείξετε ότι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $g(x) = \alpha$ είναι μηδέν.

(Μονάδες 4)

ii. Έστω x_1, x_2, x_3 οι θετικές ρίζες των εξισώσεων $g(x) = 1$, $g(x) = 2$, $g(x) = 3$

αντίστοιχα. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια, ώστε:

$$(x_2 - x_1)g'(\xi_1) + (x_3 - x_2)g'(\xi_2) = 2$$

(Μονάδες 4)

Δ4. i. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[\eta \mu x - f(x)] - \ln x + x^2}{\eta \mu^2 x - x \sigma \upsilon \nu x + x}$$

(Μονάδες 3)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές

παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f'$ και την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$.

(Μονάδες 5)

Θέμα Α

A1

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$

(μονάδες 8)

A2

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να δείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

(μονάδες 8)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο $x_0 \in \Delta$ είναι «κάτω» από τη C_f εκτός από το κοινό τους σημείο.

β. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx.$$

γ. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ «κοντά» στο x_0 .

δ) Μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ δεν έχει ασύμπτωτες.

ε. Αν f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) g'(x) dx = \left[f(x) g(x) \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) g(x) dx.$$

(μονάδες 5)

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- «Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ τότε κατά ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ».

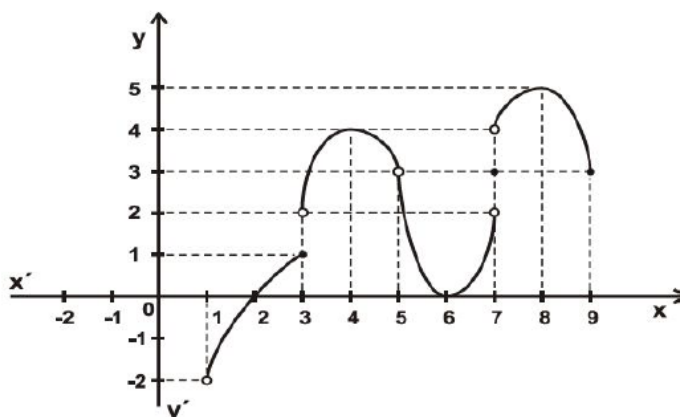
1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

(μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 2)

B2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

- α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$
 δ) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

- α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ β) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

B4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 3)

B5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

Θέμα Γ

Γ1. Αν η ευθεία $y = 2x + 2$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + \alpha x + \beta \quad \text{στο σημείο } A(0, f(0)) \quad \text{να βρείτε τα } \alpha, \beta .$$

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

- i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .
- ii) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα η οποία είναι αρνητική .
- iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2x - 1}{x^2}$
- iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f , τον x και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$.

(5 x 5 = 25 μονάδες)

Θέμα Δ

Δ1. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$x f'(x) + f(x) = 2x \quad \text{για κάθε } x \neq 0 \quad , \quad (f(1))^{2019} + f(1) = 2^{2019} + 2$$

$$\text{και } e^{f(-1)} + f(-1) = \frac{1}{e^2} - 2 .$$

Να βρείτε τη συνάρτηση f . (9 μονάδες)

Δ2. Δίνεται η $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

- i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .
- ii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα .
- iii) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες .
- iv) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

(4 x 4 = 16 μονάδες)

Θέμα Α

A1.

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

(6 μονάδες)

A2.

Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε.

(6 μονάδες)

A3.

Τι ονομάζουμε οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

(3 μονάδες)

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$ ».

- Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθές, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδές. (μονάδα 1)
- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.
- β) Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι '1-1', τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \leq 1 \end{cases}$.

B1. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Μονάδες 3

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha = 1$.

B2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 4]$.

Μονάδες 6

B3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 7

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

Μονάδες 9

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0)=0$, $f(3)=18$ και

$$f'(x) \neq 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

Γ1. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα κοινό σημείο της C_f

$$\text{με την ευθεία } y = 2x + 4 . \quad (10 \text{ μονάδες})$$

Γ2. Αν $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x$ και $h(x) = e^x f(x)$ τότε :

α) Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες η C_h . (5 μονάδες)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_h ,
τον x και την ευθεία $x=1$. (5 μονάδες)

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε

$$h'(x_0) = e^2 f'(x_0) \quad (5 \text{ μονάδες})$$

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(x) - f'(x) = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο της $O(0,0)$.

Δ1. Να υπολογίσετε τα $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$ (4 μονάδες)

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (7 μονάδες)

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μονάδες)

Δ4. Να εξετάσετε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της C_f . (3 μονάδες)

Δ5. Δίνεται η $g(x) = x f'(x) + x^2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου
που ορίζεται από την C_g , τον x και την ευθεία $x = -1$. (6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 1^ο

A1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$;

(Μονάδες 4)

A2. Τι ονομάζουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f ;

(Μονάδες 4)

A3. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (a, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

(Μονάδες 7)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν f συνεχής με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε ισχύει πάντοτε

$$\int_a^\beta f(x)dx \neq 0.$$

β. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου:

$$A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

γ. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ «κοντά» στο x_0 .

δ. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

ε. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ . Στα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, η γραφική παράσταση C_f της f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

(Μονάδες 5x2=10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \kappa\eta\mu x}{x - x^2}, & \text{αν } x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

B1. Να δείξετε ότι $\kappa = 2$ και $\lambda = 4$.

(Μονάδες 8)

B2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(Μονάδες 5)

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(Μονάδες 5)

B4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2 \ln(8x+1)$ έχει μία,

τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x^2 + 1) \cdot \ln x, \quad x > 0.$$

Γ1. Να δείξετε ότι:

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

(Μονάδες 5)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την

$$\text{εξίσωση } f(x) = 0.$$

(Μονάδες 5)

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε το

$$\text{σημείο } A(x_0, f(x_0)) \text{ να είναι σημείο καμπής της } C_f.$$

(Μονάδες 6)

Γ4. i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

(Μονάδες 4)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη

γραφική παράσταση της C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$,

$$x = e.$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $(1, +\infty)$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 1$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1+x \ln x}{x \ln x}, \text{ για κάθε } x > 1 \text{ με } f(e) = e^e$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x \cdot \ln x$, $x > 1$ καθώς και ότι οι συναρτήσεις $g(x) = e^x$, $h(x) = \ln x$ δεν έχουν κοινό σημείο στο $(1, +\infty)$.

(Μονάδες 4)

Δ2. i). Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία της και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 4)

ii). Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{\lambda}{x}$ με

$$\lambda \in \mathbb{R}, x > 1.$$

(Μονάδες 4)

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της $A(e, f(e))$.

(Μονάδες 4)

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{f(x)}{e^{x-1}} \geq (1+e)x - e^2$, για κάθε $x > 1$

(Μονάδες 3)

ii. $\int_2^3 f(x) dx \geq e^{-1} \cdot \frac{5+5e-2e^2}{2}$

(Μονάδες 3)

Δ5. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in (1, +\infty) \text{ με } x_1 < x_2$$

(Μονάδες 3)

Διαγώνισμα 27

Θέμα Α

A1 Να αποδείξετε ότι : $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (5 μονάδες)

A2 Να αποδείξετε ότι : $(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\nu^2 x}$ (4 μονάδες)

A3 Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$;
(3 μονάδες)

A4 Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ; (3 μονάδες)

A5 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας **Σωστό** ή **Λάθος** .

α) Αν η f είναι 1-1 τότε είναι γνησίως μονότονη .

β) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) > 0$.

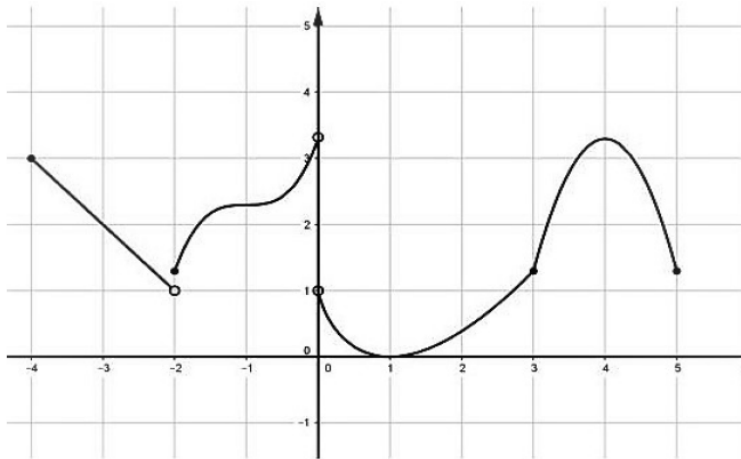
γ) Αν $f(\alpha)f(\beta) > 0$, $\alpha < \beta$ και f συνεχής τότε δεν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$
τέτοιο ώστε : $f(x_0) = 0$.

δ) Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
τότε $f(x_1)f(x_2) > 0$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

ε) $\int_{\alpha}^{\beta} 2f(x)f'(x)dx = [f(\beta)]^2 - [f(\alpha)]^2$ (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: [-4, 0) \cup (0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.

(Μονάδες 3)

B2. Να βρείτε το όριο: i. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ και ii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(Μονάδες 4)

B3. i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα $(0, 5]$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε την παράγωγο της f , όταν $x \in (-4, -2)$.

(Μονάδες 2)

B4. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα ορίζονται;

$$I = \int_2^4 f(x) dx, \quad J = \int_{-1}^0 f(x) dx$$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

B5. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x+1$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$.

(Μονάδες 4)

ii. Να εξηγήσετε πως με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f μπορείτε να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f \circ g$.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 5)

Γ2. i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 0.$$

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 5)

Γ3. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$,

ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha + \beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha + 2\beta - 1) \leq 2$$

να υπολογίσετε τους α, β .

(Μονάδες 5)

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη

γραφική παράσταση της f , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την

ευθεία $x=1$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) + f(1-x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$f'(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να βρείτε την μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$

(Μονάδες 4)

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 2f(1)$

(Μονάδες 3)

Δ3. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x' , σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .

(Μονάδες 4)

Δ4. i) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx = 0$

(Μονάδες 3)

Δίνεται επιπλέον ότι $\int_0^1 f'(x) dx = 1$ καθώς και ότι η συνάρτηση

f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} και τις ευθείες $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 4)

Δ5. i) Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$K(\lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x) dx + \int_0^{f(\lambda)} f^{-1}(x) dx, \text{ όπου } \lambda > \frac{1}{2}$$

(Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{K(\lambda) \cdot \ln \lambda}{f(\lambda) \cdot e^\lambda}$$

(Μονάδες 3)

Θέμα Α

A1. Έστω f ορισμένη σε διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι : $f'(x_0) = 0$.

A2. Θεωρήστε τον ισχυρισμό : Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0

α) Χαρακτηρίστε τον ισχυρισμό γράφοντας Α (αληθής) ή Ψ (ψευδής)

β) Αιτιολογήστε την απάντησή σας .

A3. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1 ;

A4. Σωστό ή Λάθος

α) Αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (1,5) \cup (6,21)$ τότε f σταθερή .

β) Αν f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Αν $f'(x) = x^{2019}$ τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 .

δ) Η $f(x) = (x-3)^2 + 21$ έχει ελάχιστη τιμή το 21 .

ε) Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι 1-1 .

Θέμα Β

B1. Αν f συνεχής στο 3 και $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 1$, να βρείτε την εξίσωση της

εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(3, f(3))$.

B2. Αν $f(x) = \frac{\ln(x-2)}{x-2}$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες .

γ) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο .

δ) Αν E το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις

ευθείες $x = 4$ και $x = 5$, να δείξετε ότι $E < \frac{1}{e}$.

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) - f(x) = x^2 - 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $e^{f(0)} + f(0) = e^2 + 2$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(0) = 2$.

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) + x^2 - 1}{e^x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - x^2 + 1$

Γ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική.

Γ5. Αν x_0 η ρίζα της f , να αποδείξετε ότι $\int_{x_0}^0 f(x) dx < 4$.

Θέμα Δ

Δίνεται f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

και $f^3(x) + f(x) = x + 10$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

Δ3. Να βρείτε το $f'(0)$ και να δείξετε ότι για κάθε $x > -10$ ισχύει $f(x) \leq \frac{1}{13}x + 2$.

Δ4. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις

ευθείες $x=0$ και $x=1$, να δείξετε ότι $E < \frac{53}{26}$.

Δ5. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια :

α) να βρείτε την f^{-1}

β) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-10}^{f^{-1}(1)} f(x) dx$

Καλή επιτυχία !!!!

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν ισχύουν:

- ♦ οι f, g είναι συνεχείς στο Δ ,
- ♦ $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c$$

(Μονάδες 6)

A2. i. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

(Μονάδες 3)

ii. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού; (Να κάνετε πρόχειρο σχήμα).

(Μονάδες 6)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1», αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 = x_2, \text{ τότε } f(x_1) = f(x_2).$$

β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f .

γ. Αν $f(x) = a^x$, $a > 0$, τότε $f'(x) = a^x$.

δ. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε:

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

(Μονάδες 5x2= 10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$ και $g(x) = \frac{1}{x^2} + 2$.

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f καθώς και το πλήθος των ριζών της.

(Μονάδες 6)

B3. Να ορίσετε την f^{-1} .

(Μονάδες 5)

B4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι αντιστρέψιμη.

(Μονάδες 4)

B5. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = e^x + x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $\alpha \in (-1, 0)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει: $e^\alpha + 2\alpha + 1 = 0$.

(Μονάδες 5)

Γ2. Να δείξετε ότι: $f(x) \geq \alpha^2 - \alpha - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου α ο αριθμός του ερωτήματος Γ1.

(Μονάδες 5)

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{2017}{2016}$.

(Μονάδες 5)

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x^2+1)+f(x^2+2) < f(x^2)+f(x^2+3), \text{ για κάθε } x > 0$$

(Μονάδες 5)

Γ5. Έστω ένα σημείο $M(x(t), y(t))$, όπου t ο χρόνος, το οποίο διατρέχει τη γραφική παράσταση της f με $x'(t) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0 , με $x(t_0) \in (-1, 0)$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M , ως προς τον χρόνο, να μηδενίζεται.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) = -f(2-x) \text{ και } f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 8

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .

Μονάδες 9

30^ο Διαγώνισμα

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

- B. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 5

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν f συνεχής στο x_0 τότε f παραγωγίσιμη στο x_0 .

β) Αν $f(x) = e^{2x}$ τότε $f'(x) = e^{2x}$

γ) Αν $f(x) = x^3 + x$ τότε η C_f δεν έχει εφαπτομένη την $y = -2x$

δ) Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι 1-1.

ε) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f με 2 ρίζες υπάρχει ξ με $f'(\xi) = 0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2^ο

1. Αν η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η C_f έχει 2 σημεία τομής με τον $x'x$, να δείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον $x'x$. **(7 μονάδες)**
2. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η C_f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον $x'x$. **(8 μονάδες)**
3. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και α, β με $\alpha < \beta$ και $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$.
Να δείξετε ότι υπάρχουν x_0 και ξ με $\alpha < x_0 < \xi < \beta$ τέτοιοι ώστε
 $(\beta - x_0)f'(\xi) = f(\beta)$ **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x > 2 \\ \alpha x^2 + \beta x & , \quad x \leq 2 \end{cases}$

A) Να βρείτε τα α , β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 2 .

(10 μονάδες)

B) Αν $\alpha = 4$, $\beta = -4$ τότε :

i) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $\gamma = 4x + 2018$ (7 μονάδες)

ii) να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,4)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0)(x_0^2 - 16) + f(x_0) \cdot 2x_0 = 0 \quad (8 \text{ μονάδες })$$

ΘΕΜΑ 4°

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g για τις οποίες ισχύει

$$f'(x) = e^x + g(-x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} . \text{ Αν } g \text{ γνησίως φθίνουσα τότε :}$$

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι γνησίως αύξουσα .

(4 μονάδες)

β) Για τους αριθμούς α , β , γ με $\alpha < \beta < \gamma$ και $\beta - \alpha = \gamma - \beta$ να αποδείξετε ότι

$$2f(\beta) < f(\alpha) + f(\gamma) \quad (7 \text{ μονάδες })$$

γ) Για οποιουδήποτε αριθμούς α , β με $\alpha < \beta$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$

$$\text{τέτοιο ώστε } (e^\xi + g(-\xi)) \cdot (\beta - \alpha) = f(\beta) - f(\alpha)$$

(7 μονάδες)

δ) Αν g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $g(-4) - g(-2) = e^2 - e^4$

να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,4)$ τέτοιο ώστε $g'(-x_0) = e^{x_0}$

(7 μονάδες)

Καλή επιτυχία !