

1<sup>ο</sup> Διαγώνισμα στα Μαθηματικά**Θέμα Α**

**A1.** Πότε μια συνάρτηση ονομάζεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$ ; (5μ)

**A2.** Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0$  (ολικό) μέγιστο; (5μ)

**A3.** Πότε μια συνάρτηση ονομάζεται 1-1; (5μ)

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας τη λέξη

**Σωστό ή Λάθος.**

1) Ο κύκλος είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

2) Η  $f(x) = x^2 + 2$  είναι 1-1.

3) Οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x^2}$  και  $g(x) = x$  είναι ίσες.

4) Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ ,

τότε και η συνάρτηση  $\frac{f}{g}$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .

5) Η συνάρτηση  $f(x) = \ln(-x)$  είναι γνησίως αύξουσα. (10μ)

**Θέμα Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{-x} + \lambda$  και το  $A(0,3)$  που είναι ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 2$ . (3μ)

**B2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα. (6μ)

**B3.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. (6μ)

**B4.** Να λύσετε την ανίσωση  $f(e^x - 21) < 3$  (6μ)

**B5.** Εξετάστε αν η ευθεία  $y = 1$  τέμνει την  $C_f$ . (4μ)

## Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 + 2$  και  $g(x) = \sqrt{x-3}$ .

- Γ1. Μελετήστε την  $f$  ως προς τη μονοτονία. (5 μ)  
Γ2. Μελετήστε την  $f$  ως προς τα ακρότατα. (5 μ)  
Γ3. Να μελετήσετε την  $g$  ως προς τη μονοτονία. (4 μ)  
Γ4. Μελετήστε την  $g$  ως προς τα ακρότατα. (3 μ)  
Γ5. Να βρείτε τις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ . (8 μ)

## Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$

- Δ1. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1. (5 μ)  
Δ2. Να βρείτε την  $f^{-1}$ . (5 μ)  
Δ3. Αν  $g(x) = 1 + \frac{1}{e^x + 1}$  να δείξετε ότι  $f = g$ . (5 μ)  
Δ4. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία. (5 μ)  
Δ5. Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) - x^3 < \frac{3}{2}$  (5 μ)

Καλή επιτυχία !!!

## 2<sup>ο</sup> Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

### Θέμα Α

- A1.** Πότε δυο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες; (4 μ)
- A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1; (4 μ)
- A3.** Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση συνάρτησης; (3 μ)
- A4.** Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών της  $f$ ; (4 μ)
- A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις γράφοντας **Σωστό ή Λάθος**.
- α) Για κάθε συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , όταν υπάρχει το όριο της  $f$  καθώς το  $x$  τείνει στο  $x_0 \in A$ , τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της  $f$  στο  $x_0$ .
- β) Η συνάρτηση  $f(x) = |x+2|$  είναι 1-1.
- γ) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  τότε και η συνάρτηση  $g(x) = e^x - f(2-x)$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .
- δ) Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f$  έχει σημείο τομής με τον άξονα  $x'x$ .
- ε) Αν  $f$  1-1 τότε  $f$  γνησίως μονότονη. (10 μ)

### Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = -2\ln x + 1$ ,  $x > 0$ .

- B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται. (5 μ)
- B2.** Να βρείτε τη συνάρτηση  $f^{-1}$ . (5 μ)
- B3.** Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $g$  με τύπο  $g(x) = 1 - \ln x^2$ . Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f, g$  δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο ισχύει  $f = g$ . (5 μ)
- B4.** Δίνεται συνάρτηση  $h(x) = e^{1-x} + f(x)$ . Να δείξετε ότι η  $h$  αντιστρέφεται. (5 μ)
- B5.** Να λύσετε την εξίσωση  $h^{-1}(e^{x-5} + x - 4) = 1$  (5 μ)

### Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση  $f$  γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$  της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $A(3,0)$  και  $B(0,8)$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ . ( 5 μ )

**Γ2.** Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  η  $C_f$  είναι κάτω από τον άξονα  $xx'$  και για ποιες είναι πάνω από τον  $xx'$ . ( 5 μ )

**Γ3.** Να λύσετε την ανίσωση  $f(\ln x) > 0$  ( 5 μ )

**Γ4.** Να λύσετε την εξίσωση  $(f \circ f)(\ln x) = 8$  ( 5 μ )

**Γ5.** Δίνεται συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $(f \circ g)(x) = x^3 + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
Να δείξετε ότι η  $g$  αντιστρέφεται. ( 5 μ )

### Θέμα Δ

**Δ1.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $f(f(x)) = x + 6$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται. ( 5 μ )

**Δ2.** Αν  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και  $g$  γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ ,

να δείξετε ότι η  $h = f - g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . ( 5 μ )

Δίνονται οι συναρτήσεις :  $f(x) = x + 3$  και  $g(x) = e^{-2x+1} - e + 3$ .

**Δ3.** Να μελετήσετε την  $g$  ως προς τη μονοτονία. ( 5 μ )

**Δ4.** Να βρείτε την  $g^{-1}$ . ( 5 μ )

**Δ5.** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) - g(x) = 0$ . ( 5 μ )

Καλή επιτυχία !!!

### 3° Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

#### Θέμα Α

A1. Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ ; (Μονάδες 2)

β) i. Πότε μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  έχει αντίστροφη; (Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του (i), πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$ ; (Μονάδες 3)

**Μονάδες 6**

A2. Πότε δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες; **Μονάδες 2**

A3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. **Μονάδες 3**

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Αν  $f$  και  $g$  είναι δυο συναρτήσεις και ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις  $g \circ f$  και  $f \circ g$ , τότε οι  $g \circ f$  και  $f \circ g$  δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

2) Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$ .

3) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$  τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

4) Αν  $f, g$  είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $\frac{f}{g}$  είναι το  $A \cap B$ .

5) Ισχύει  $|\eta\mu x| < |x|$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ .

6) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  ισχύει ότι  $f(f^{-1}(x)) = x$ , για κάθε  $x \in A$ .

7) Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα, τότε η  $g \circ f$  ορίζεται, αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .

**Μονάδες 14**

#### Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $g, h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπους  $g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  και  $h(x) = \ln x$ .

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f$  με  $f = g \circ h$ . **Μονάδες 6**

B2. Αν  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ,  $x > 1$  να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι  $f^{-1} = f$  (όπου  $f^{-1}$  είναι η αντίστροφη της συνάρτησης  $f$ ). **Μονάδες 8**

B3. Υπολογίστε το όριο :  $\lim_{x \rightarrow 1} \eta\mu(3x - 3) \cdot f(x)$  **Μονάδες 5**

B4. Να λύσετε την εξίσωση :  $f(x) + e^{2-x} - 4 = 0$  **Μονάδες 6**

### Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x \in [-2,1] \\ (\beta + 1)x + 4\alpha, & x \in (1,2] \end{cases}$

Γ1. Αν  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$ ,

να υπολογίσετε τα  $\alpha, \beta$ .

**Μονάδες 6**

Αν  $\alpha = -1$  και  $\beta = 2$  τότε :

Γ2. Να υπολογίσετε το όριο :  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+x}{\sqrt{-x}-1}$

**Μονάδες 5**

Γ3. Εξετάστε αν η  $f$  είναι 1-1.

**Μονάδες 3**

Γ4. Αν  $|x^2 g(x) - \eta \mu^2 x| \leq 2x^4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να υπολογίσετε τα όρια :

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$       ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot g(x) - \eta \mu 4x}{x + \eta \mu x}$

**Μονάδες 8**

Γ5. Να δείξετε ότι  $f(x) > g(x)$  κοντά στο 0.

**Μονάδες 3**

### Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :

$$(f(x))^3 + e^{f(x)} - 1 = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.

**Μονάδες 5**

Δ2. Να βρείτε την αντίστροφη της  $f$ .

**Μονάδες 5**

Δ3. Αν  $f^{-1}(x) = x^3 + e^x - 1$  και  $g(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x}-1}{x-1} + \alpha x + \beta, & x > 1 \\ 2\alpha x - \beta + f(0), & x \leq 1 \end{cases}$

τότε :

i) να βρείτε το πρόσημο της  $f^{-1}$  για τις διάφορες τιμές του  $x$ .

**Μονάδες 5**

ii) να υπολογίσετε το όριο :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - e^x}{\eta \mu(x-1)}$

**Μονάδες 5**

iii) να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta$  ώστε να ισχύει :  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{7}{2}$

**Μονάδες 5**

## 4<sup>ο</sup> Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

### 1<sup>ο</sup> Θέμα

A1. Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  ολικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

A2. Πότε δύο συναρτήσεις  $f, g$  λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

A3. Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ ;

Μονάδες 4

A4. Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται 1 – 1;

Μονάδες 3

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) < g(x)$  κοντά στο  $x_0$ ,

$$\text{τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

β) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  τότε  $f(x) < g(x)$  κοντά στο  $x_0$

γ) Υπάρχουν συναρτήσεις  $f, g$  για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) < g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

δ) Υπάρχει 1-1 συνάρτηση που δεν είναι γνησίως μονότονη.

ε) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{[f(x)]^2} = +\infty$

Μονάδες 10

### 2<sup>ο</sup> Θέμα

Δίνονται οι συναρτήσεις  $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

και  $h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

B1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις  $f = \frac{g}{h}$  και  $r = g \cdot h$ .

Μονάδες 5

B2. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2}{h(x)}$

Μονάδες 5

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$  και  $r(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1$

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι  $f^{-1} = f$  (μονάδες 5), όπου  $f^{-1}$  είναι η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$ .

Μονάδες 7

B4. Να λύσετε την εξίσωση  $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$ .

Μονάδες 5

B5. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} [\eta\mu(2x - 2) \cdot f(x)]$

Μονάδες 3

### 3<sup>ο</sup> Θέμα

Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $(f \circ f)(x) - f(x) = 2x - 4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Γ1. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε το  $f(2)$ .

Μονάδες 3

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση  $f(4 - f(x^2 + x)) - 2 = 0$ .

Μονάδες 3

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται ότι  $f(x) = 2x - 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Γ4. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια :

i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$       ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^3}$       iii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{f(x)}$

Μονάδες 9

Γ5. Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) < 1 - x^5$

Μονάδες 5

### 4<sup>ο</sup> Θέμα

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

Δ1. Να βρείτε :

i) το πεδίο ορισμού της  $f$

Μονάδες 2

ii) το σύνολο τιμών της  $f$

Μονάδες 2

Δ2. Να βρείτε :

i) το πλήθος των ριζών της  $f$

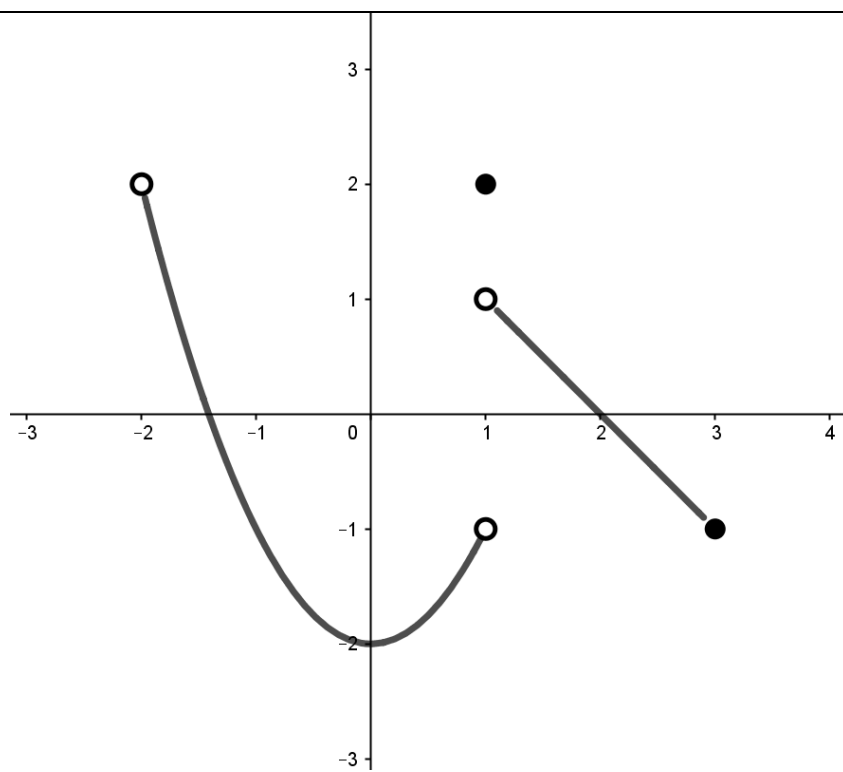
Μονάδες 2

ii) τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Μονάδες 4



Για τα επόμενα ερωτήματα δίνονται οι  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \in (-2, 1) \\ 2, & x = 1 \\ -x + 2, & x \in (1, 3] \end{cases}$  και  $g(x) = (x - 1)^2 + 2$

Δ3. Να μελετήσετε την  $g$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$

Μονάδες 5

Δ5. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια :

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$       ii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{g(x)}$       iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{2+f(x)}$

Μονάδες 6

Καλή επιτυχία !!!



## 5<sup>ο</sup> Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

### 1<sup>ο</sup> Θέμα

- A1.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano. **Μονάδες 2**
- A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι συνεχής στο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της ; **Μονάδες 2**
- A3.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$  ; **Μονάδες 2**
- A4.** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. **Μονάδες 9**
- A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α) Κάθε συνάρτηση που ορίζεται σε κλειστό διάστημα έχει μέγιστη τιμή.
- β) Αν η  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  έχει ελάχιστη τιμή το  $f(\alpha)$  τότε είναι γνησίως αύξουσα.
- γ) Αν η  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής τότε παρουσιάζει μέγιστο στο  $\alpha$ .
- δ) Υπάρχει συνάρτηση που είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, δεν μηδενίζει και δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο.
- ε) Αν η  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δεν μηδενίζει και δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο, τότε δεν είναι συνεχής.

**Μονάδες 10**

### 2<sup>ο</sup> Θέμα

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = e^x$$

- B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ . **Μονάδες 4**
- B2.** Αν  $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ ,  $x > 0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι '1-1' και να βρείτε την αντίστροφή της. **Μονάδες 7**
- B3.** Αν  $\phi(x) = (f \circ g)^{-1} = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ , με  $x > 1$ , να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\phi$  ως προς τη μονotonία. **Μονάδες 5**
- B4.** Αν  $\phi$  είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B3**, να βρεθούν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \phi(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x)$  **Μονάδες 6**
- B5.** Αν  $\phi$  είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B3**, να δείξετε ότι για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ , η εξίσωση  $\phi(x) = e^\alpha$  έχει ακριβώς μια ρίζα. **Μονάδες 3**

### 3<sup>ο</sup> Θέμα

Δίνεται η συνάρτηση  $g$  με  $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $x \in [-1,1]$  και η συνεχής συνάρτηση  $f$ , ορισμένη στο  $[0, \pi]$ , με  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ , τέτοιες ώστε:  $(g \circ f)(x) = |\sin x|$ , για κάθε  $x \in [0, \pi]$ .

**Γ1.**

- i. Να αποδείξετε ότι  $|f(x)| = |\eta\mu x|$ . **Μονάδες 3**
- ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ . **Μονάδες 3**

**Γ2.** Να βρείτε την συνάρτηση  $f$ . **Μονάδες 4**

**Γ3.** Δίνεται η συνάρτηση  $h: (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $h(x) = \frac{1}{f(x)-x}$ , όπου  $f$  είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  **Μονάδες 3**

**Γ4.** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $k(x) = (x-1) \cdot f(x) + g(x) - \frac{1}{4}$  έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τον άξονα  $x'x$ . **Μονάδες 8**

**Γ5.** Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $m: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $m\left(\frac{1}{2}\right) < 0$  για την οποία ισχύει :

$x^2 + m^2(x) = 1$ . Να βρείτε τη συνάρτηση  $m$ . Ποια η σχέση της με την  $g$ ; **Μονάδες 4**

### 4<sup>ο</sup> Θέμα

Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , συνεχής και γνησίως αύξουσα με  $f(0) = 1$  και  $f(1) = 2 + \sqrt{5}$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x + f(x) = e^{-x} + 1$  έχει ακριβώς μια ρίζα στο  $(0,1)$ . **Μονάδες 7**

**Δ2.** Για τις διάφορες τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+1} + \mu x)$  **Μονάδες 5**

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{4x^2+1} + 2x$

**Δ3.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ . **Μονάδες 4**

**Δ4.** Δίνεται η  $h(x) = -x^4$ . Εξετάστε αν έχουν κοινά σημεία οι  $C_f$  και  $C_h$ . **Μονάδες 3**

**Δ5.** Για τις διάφορες τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  να υπολογίσετε το όριο :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\alpha x^2 + \beta x + 1}$  **Μονάδες 6**

Καλή επιτυχία !!!