

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΥΣ:

1.
  - α. Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η  $f'$  είναι πάντοτε συνεχής στο  $x_0$ .
  - β. Αν η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .
  - γ. Αν η  $f$  έχει δεύτερη παράγωγο στο  $x_0$ , τότε η  $f'$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .
  
2.
  - α. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $[a, b]$  και συνεχής στο  $(a, b]$ , τότε η  $f$  παίρνει πάντοτε στο  $[a, b]$  μία μέγιστη τιμή.
  - β. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.
  - γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .
  - δ. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .
  
3.
  - α. Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .
  - β. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.
  - γ. Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και  $f'(x_0) = 0$ , τότε η  $f$  παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο  $x_0$ .

4. α. Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , τότε η συνάρτηση  $f \cdot g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g'(x_0)$$

- β. Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\Delta$ .

- γ. Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[a, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[a, \beta]$ , τότε

$$\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$$

5. α. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  με  $f(a) < 0$  και υπάρχει  $\xi \in (a, \beta)$  ώστε  $f(\xi) = 0$ , τότε κατ' ανάγκη  $f(\beta) > 0$ .

- β. Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ , τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

- γ. Αν η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  και η γραφική παράσταση της  $f$  έχει κοινό σημείο  $A$  με την ευθεία  $y = x$ , τότε το σημείο  $A$  ανήκει και στη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ .

- δ. Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

- ε. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε  $x \in \Delta$  ή είναι αρνητική για κάθε  $x \in \Delta$ , δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .

6. α. Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

- β. Ισχύει ο τύπος  $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- γ. Ισχύει η σχέση

$$\int_a^\beta f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x) g(x) dx, \text{ όπου } f', g'$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $[a, \beta]$ .

7. α. Αν  $f$  συνάρτηση συνεχής στο διάστημα  $[a, \beta]$  και για κάθε  $x \in [a, \beta]$  ισχύει  $f(x) \geq 0$  τότε  $\int_a^\beta f(x) dx > 0$ .
- β. Έστω  $f$  μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$  τότε  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ .
- γ. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η σύνθεσή τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .
- δ. Αν  $a > 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ .

8. α. Αν μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  ισχύει:  
 $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$  και  $f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$
- β. Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
- γ. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει
- $$f''(x) > 0$$
- για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .
- δ. Αν η  $f$  είναι συνεχής σε διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$  τότε ισχύει

$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx + \int_\gamma^\beta f(x) dx$$

9. α. Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο  $x_0 \in A$ , όταν  $f(x) \geq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$ .

β.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

- γ. Κάθε συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- δ. Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$  και ισχύει  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ , τότε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τις ευθείες  $x=a, x=\beta$  και τον άξονα  $x'x$  είναι

$$E(\Omega) = \int_a^\beta f(x) dx$$

10. α) Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

β) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$ ,

$$\text{όπου } A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$$

γ)  $(\sin x)' = \eta \mu x, x \in \mathbb{R}$

δ) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$

11. α) Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή: αν  $x_1 \neq x_2$ , τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$

β) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\}$  ισχύει:  $(\epsilon \phi x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

γ) Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$

δ) Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y=x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

12. α) Μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της η εξίσωση  $f(x)=y$  έχει ακριβώς μία λύση ως προς  $x$

β) Αν είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$

γ)  $(\sigma \phi x)' = \frac{1}{\eta \mu^2 x}, x \in \mathbb{R} - \{x | \eta \mu x = 0\}$

δ)  $\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x)g(x)dx$ , όπου  $f', g'$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $[a, \beta]$

13. α) Ισχύει ότι:  $|\eta\mu x| \leq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

β) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ή  $-\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

γ) Αν μια συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

δ) Έστω συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

14. α) Αν για δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορίζονται οι συναρτήσεις  $fo g$  και  $gof$ , τότε ισχύει πάντοτε ότι  $fo g = gof$ .

β) Έστω  $f$  μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[a, b]$ . Αν ισχύει ότι  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [a, b]$  και η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .

γ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[a, b]$ , τότε το  $\int_a^b f(t) dt = G(a) - G(b)$ .

δ) Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

ε) Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[a, b]$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

15. α) Κάθε συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$ , είναι σταθερή στο  $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ .

β) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$ .

γ) Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A, B$  αντίστοιχα, τότε η  $g \circ f$  ορίζεται αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .

δ) Αν  $0 < \alpha < 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$ .

ε) Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

16. α) Για κάθε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- β) Η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  με  $x \in \mathbb{R}$  έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.
- γ) Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$ .
- δ) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ .
17. α)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^{2\nu+1}} \right) = +\infty$ , για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}$ .
- β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  έχει άξονα συμμετρίας τον  $y'y$ .
- γ) Δίνεται ότι η συνάρτηση  $f$  παραγωγίζεται στο  $\mathbb{R}$  και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα  $x'x$ . Αν υπάρχει κάποιο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  της  $C_f$ , του οποίου η απόσταση από τον άξονα  $x'x$  είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι οριζόντια.
18. α) Ισχύει  $|\eta\mu x| < |x|$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ .
- β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  ισχύει ότι  $f(f^{-1}(x)) = x$ , για κάθε  $x \in A$ .
- γ) Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .
- δ) Αν  $0 < \alpha < 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$ .
19. α) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$ , παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$  και  $f'(x) \neq 0$ , για όλα τα  $x \in (0,1)$ , τότε  $f(0) \neq f(1)$ .
- β) Η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\phi x$  είναι παραγωγίσιμη στο  $R_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$  και ισχύει  $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$ .
- γ) Αν  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

20. α) Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ .
- β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.
- γ) Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.
- δ) Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα είναι το ολικό της μέγιστο.
21. α) Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \eta\mu \frac{1}{x}) = 0$ .
- β) Η συνάρτηση  $f(x) = x^a$ ,  $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει ότι  $f'(x) = ax^{a-1}$ .
- γ) Εάν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $f(x_0)$ , τότε η σύνθεσή τους  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .
- δ) Αν η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[a, b]$ , με  $\int_a^b f(x)dx = 0$ , τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f(x) = 0$ , για κάθε  $x \in [a, b]$ .
- ε) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .
22. α) Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε  $f'(x_0) = 0$ .
- β) Η συνάρτηση  $f(x) = \ln|x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ , είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ισχύει:
- $$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$
- γ) Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$ .
- δ) Αν μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , παρουσιάζει στο σημείο  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  καμπή, τότε  $f''(x_0) = 0$ .
- ε) Αν  $f, g$  είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $\frac{f}{g}$  είναι το  $A \cap B$ .

23. α)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$

β)  $(\ln |x|)' = -\frac{1}{x}$ , για κάθε  $x < 0$ .

γ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης  $f$  μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της  $f$ .

δ) Μια πολυωνυμική συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

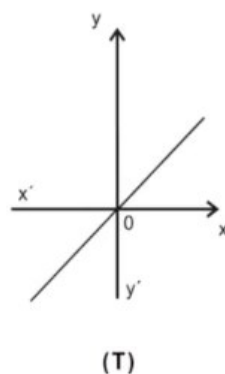
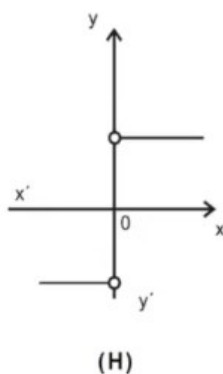
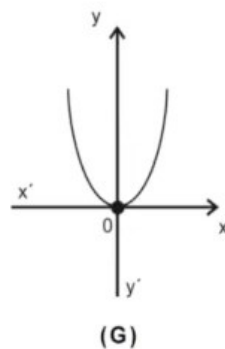
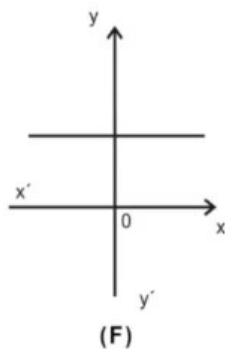
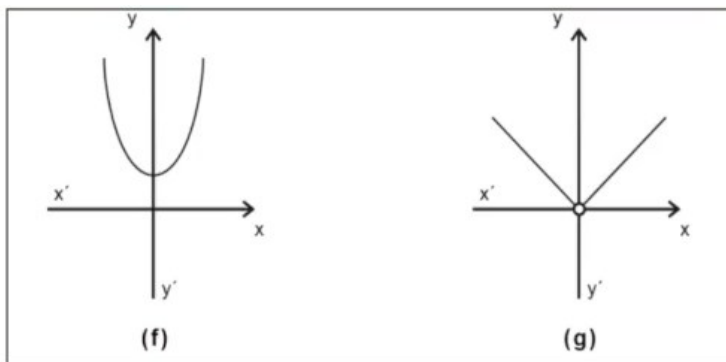
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ ΛΑΘΟΥΣ ΜΕ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ -  
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ:

1. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:  
«Κάθε συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής στο  $x_0$ , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»  
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)  
β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)  
**Μονάδες 4**

2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:  
Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ισχύει  $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ , τότε  
α) η εξίσωση  $f(x) = 0$  δεν έχει λύση στο  $(\alpha, \beta)$ .  
β) η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία λύση στο  $(\alpha, \beta)$ .  
γ) η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο  $(\alpha, \beta)$ .  
δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο  $(\alpha, \beta)$ .  
**Μονάδες 4**

3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:  
«Κάθε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι "1-1" είναι και γνησίως μονότονη.»  
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)  
β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)  
**Μονάδες 4**

4. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g, F, G, H, T$ .



Να γράψετε στο τετράδιό σας ποια από τις συναρτήσεις  $F, G, H, T$  μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης  $f$  και ποια της  $g$ .

**Μονάδες 4**

5. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθές**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδές**. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

6. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

α) Για κάθε συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  με  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in A$ , ισχύει ότι η  $f$  είναι σταθερή στο  $A$ .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος  
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

β) Για κάθε συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , όταν υπάρχει το όριο της  $f$  καθώς το  $x$  τείνει στο  $x_0 \in A$ , τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της  $f$  στο  $x_0$ .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος  
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

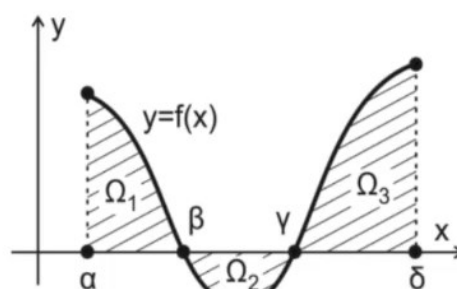
**Μονάδες 8**

7. Έστω η συνάρτηση  $f$  του διπλανού σχήματος.

Αν για τα εμβαδά των χωρίων  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  και  $\Omega_3$  ισχύει ότι

$E(\Omega_1) = 2$ ,  $E(\Omega_2) = 1$  και  $E(\Omega_3) = 3$ ,

τότε το  $\int_a^{\delta} f(x) dx$  είναι ίσο με:



α) 6

β) -4

γ) 4

δ) 0

ε) 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

**Μονάδες 2**

8. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση  $f$ , ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει  $f'(x) > 0$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

9. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση  $f$  με  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$  ή

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

↳

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(μονάδες 3)

10. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , αν για κάποιο  $x_0 \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f''(x_0) = 0$ , τότε το  $x_0$  είναι θέση σημείου καμπής της  $f$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ ΛΑΘΟΥΣ ΜΕ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ:**

1. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση στο  $A$  δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής.

β) Αν η πρόταση είναι αληθής (**A**) να την αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής (**Ψ**) να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα.

2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού και άνω που έχει ασύμπτωτη».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής.

β) Αν η πρόταση είναι αληθής (**A**) να την αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής (**Ψ**) να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα.

3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν  $f(x) \cdot g(x) = 0$  για κάθε  $x \in A$  τότε  $f(x) = 0$  κάθε  $x \in A$  ή  $g(x) = 0$  κάθε  $x \in A$  »

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής.

β) Αν η πρόταση είναι αληθής (**A**) να την αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής (**Ψ**) να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα.