

## Θέμα 1

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i.  $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{2-x}} + \sqrt{4 - |x-3|}$

ii.  $f(x) = \sqrt{1 - \eta\mu x} + \sqrt{x}$

## Θέμα 2

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i.  $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x + 4}$

ii.  $f(x) = 2^{\sqrt{|x|-x}}$

## Θέμα 3

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i.  $f(x) = \ln(-x^2 + 9)$

ii.  $f(x) = (2 + \sigma\upsilon\nu x)^x$

## Θέμα 4

Να εξετάσετε αν ο αριθμός 3 είναι τιμή των παρακάτω συναρτήσεων:

i.  $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1 \\ x^3 - 5, & x > 1 \end{cases}$

ii.  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x \geq 2 \\ x^2 - 6, & x < 2 \end{cases}$

### Θέμα 5

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με τύπους  $f(x) = x + 2$  και  $g(x) = \sqrt{-x + 4}$ .

- i. Εξετάστε αν η  $C_g$  τέμνει τους άξονες.
- ii. Εξετάστε αν η  $C_g$  και η  $C_f$  έχουν κοινά σημεία.

### Θέμα 6

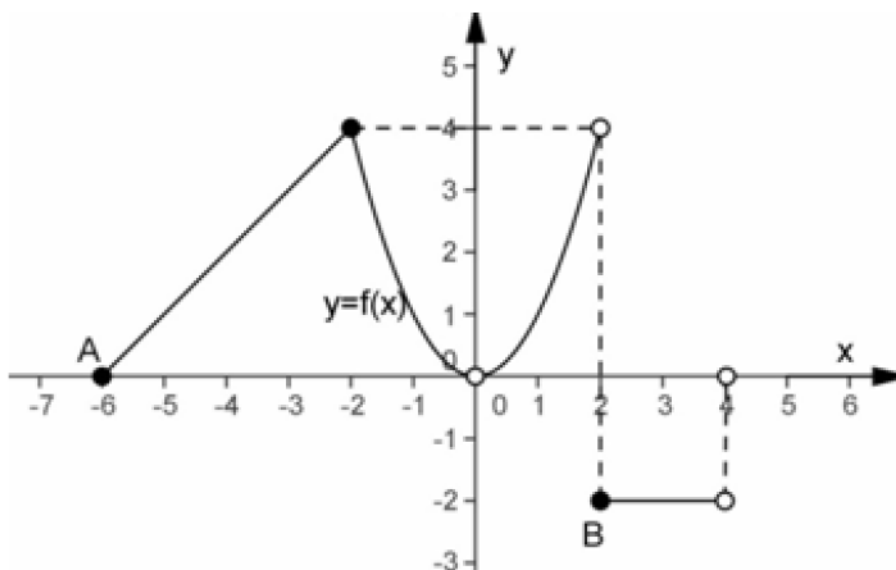
Για ποιες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$ , όταν  $f(x) = x^3 - 4x$ .

### Θέμα 7

Για ποιες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της  $g$ , όταν  $f(x) = e^{2x}$  και  $g(x) = e^x + 2$ .

### Θέμα 8

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  της οποίας η γραφική παράσταση είναι η παρακάτω.

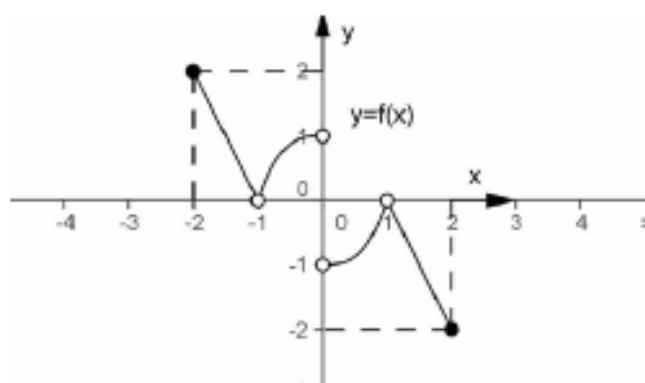


- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- ii. Να εξετάσετε αν το 0 είναι τιμή της  $f$ .
- iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .
- iv. Να βρείτε το  $f(2)$ .
- v. Να επιλύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .
- vi. Να επιλύσετε τις ανισώσεις  $f(x) > 0$  και  $f(x) < 0$ .

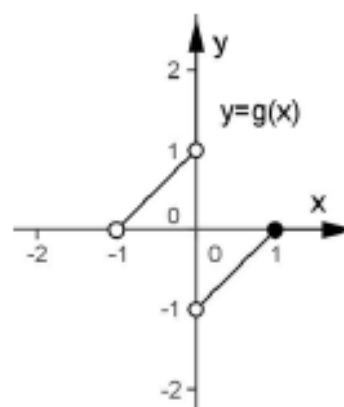
## Θέμα 9

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$ ,  $g$ ,  $\varphi$ ,  $h$ .

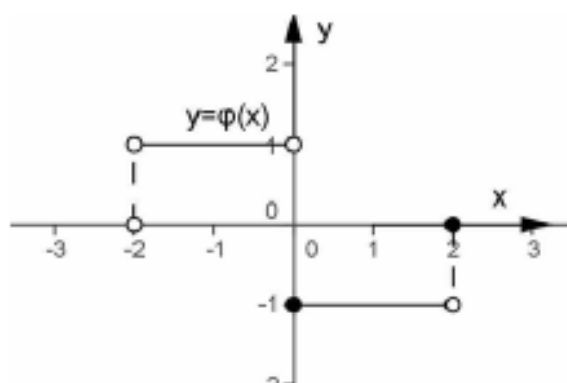
i.



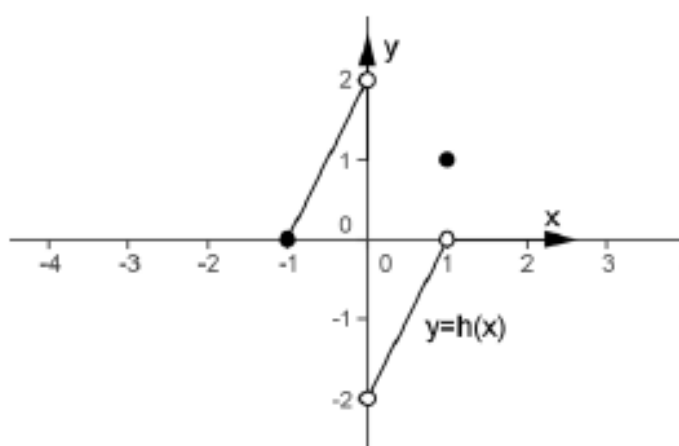
ii.



iii.



iv.



Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις  $f$ ,  $g$ ,  $\varphi$ ,  $h$  είναι περιττές.

### Θέμα 10

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \ln|x|$ .

Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

- i.  $y = f(x)$
- ii.  $y = |f(x)|$
- iii.  $y = f(x-1)$
- iv.  $y = f(x+1)$
- v.  $y = f(x)+1$
- vi.  $y = f(x)-1$

### Θέμα 11

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο.

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

Να παρασταθούν γραφικά οι παρακάτω συναρτήσεις:

- i.  $y = f(x)$
- ii.  $y = -f(x)$
- iii.  $y = f(-x)$
- iv.  $y = -f(-x)$
- v.  $y = |f(x)|$
- vi.  $y = \frac{1}{2}(f(x) - |f(x)|)$

### Θέμα 12

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln|x| - \ln|x-1|$  και  $g(x) = \ln \frac{x}{x-1}$ .

Να εξετάσετε αν  $f = g$ . Στην περίπτωση που είναι  $f \neq g$ , να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο ισχύει  $f(x) = g(x)$ .

### Θέμα 13

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$  και  $g(x) = \sqrt{1-2x}$ .

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

$$f+g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}$$

### Θέμα 14

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με τύπους  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ,  $g(x) = x+1$ .

Να βρείτε τις συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ .

### Θέμα 15

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Αν  $(B\Gamma)=4$  και  $(AB)=x$ , να εκφράσετε την προβολή της κάθετης πλευράς  $A\Gamma$  πάνω στην υποτείνουσα ως συνάρτηση του  $x$ .

### Θέμα 16

Να βρεθεί η συνάρτηση  $f$  ώστε:

$$f(2x-1) = x^3, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

### Θέμα 17

Το κόστος  $x$  μονάδων ενός προϊόντος είναι  $K(x) = -4 - 2x^2$ .

Αν η τιμή πώλησης μιας μονάδας του προϊόντος είναι  $\Pi(x) = -x - 5$  τότε:

- i. Να εκφράσετε το κέρδος  $P$  ως συνάρτηση του  $x$ .
- ii. Να βρείτε πότε η επιχείρηση θα έχει κέρδος και πότε ζημιά.

### Θέμα 18

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = \frac{x}{1-x}$ . Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

### Θέμα 19

Αν  $f(x) = x^2 + 5$  και  $g(x) = \sqrt{x-9}$  να βρείτε τη συνάρτηση  $g \circ f$ .

### Θέμα 20

Αν  $f(x) = \ln(x-3)$  και  $g(x) = \sqrt{x}$  να βρεθούν οι συναρτήσεις  $g \circ f$  και  $f \circ g$ .

### Θέμα 21

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x+1$  και  $g(x) = \alpha x + 2$ . Για ποια τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f \circ g = g \circ f$ .

## Θέμα 22

Να προσδιοριστεί συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έτσι ώστε:

- i.  $f(x-1) = x^2 - 3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- ii.  $f(3x) = x^3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

## Θέμα 23

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  
Να δείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$  είναι άρτια.

ii. Η συνάρτηση  $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$  είναι περιττή.

- iii. Κάθε συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  γράφεται σαν άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης.

## Θέμα 24

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  ώστε  $f(x) = \ln x$ ,  $x > 0$  και  $g(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ .

- i. Να βρεθεί συνάρτηση  $t$  ώστε  $tof = g$ .
- ii. Να βρεθεί συνάρτηση  $\varphi$  ώστε  $fo\varphi = g$ .

## Θέμα 25

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και ο τύπος της συνάρτησης  $h$  με  $h(x) = f(\ln x - 1) + f(2-x)$ .

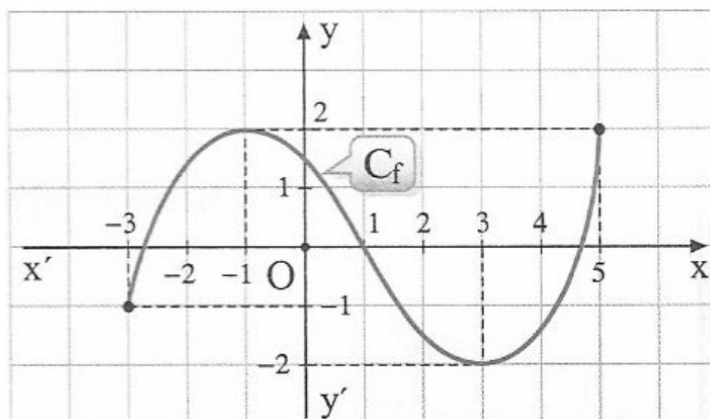
## Θέμα 26

Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $A=[1,2]$ . Να δείξετε ότι ορίζονται οι παρακάτω συναρτήσεις και να βρεθεί το πεδίο ορισμού των:

- i.  $h(x) = f(\sqrt{x} - 1)$
- ii.  $\varphi(x) = f(x^3 - 6)$

### Θέμα 27

Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



### Θέμα 28

Έστω δυο συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $g(x) = f(-2x+3)$ .

### Θέμα 29

Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = 2x + 3f(x)$  είναι γνησίως αύξουσα.

### Θέμα 30

Δίνεται περιττή συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ , να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και στο  $(-\infty, 0)$ .

### Θέμα 31

Να λυθεί η εξίσωση :  $\sqrt{10-x} = 3 + \ln x$ .

### Θέμα 32

Να λυθούν οι εξισώσεις :

- i.  $x^3 = 1 - \ln x$     ii.  $e^x + x = 1$     iii.  $\ln x = \frac{1}{x} - 1$     iv.  $2\sqrt{x-1} = 1 + \frac{8}{x^3}$   
 v.  $x + \ln x = 1$     vi.  $x^2 + \ln x - 1 = 0$     vii.  $1 - e^x = x + \eta\mu x$  στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

### Θέμα 33

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{8}{x^3} - 3\sqrt{x-1}$ .

- i. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.  
 ii. Να λύσετε την εξίσωση  $8 + 2x^3 = 3x^3\sqrt{x-1}$ .

### Θέμα 34

Να λυθεί η ανίσωση :  $x^3 + x < 2 - \ln x$ .

### Θέμα 35

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + 3x$ , αφού βρείτε τη μονοτονία της, να λύσετε την ανίσωση  $f(2x^2 - x + 3) < f(3x + x^2)$

### Θέμα 36

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:  $f(x) = 2x^{2011} + 5x - 7, x \in \mathbb{R}$ .

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .
- ii. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .
- iii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης  $f$ .

### Θέμα 37

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{-x} - x - 1$

- i. Να εξετάσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.
- ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της  $f$ .
- iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :  $g(x) = \ln f(x)$  και  $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ .
- iv. Να δείξετε ότι  $xf(x) < 0$  για κάθε  $x \neq 0$ .
- v. Να δείξετε ότι :  $f(x) + f(x+5) > f(x+3) + f(x+7)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

### Θέμα 38

Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + x$

- i. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.
- ii. Να δείξετε ότι αν  $x > e$ , τότε  $\ln x - \frac{1}{x} + x > 1 - \frac{1}{e} + e$
- iii. Να δείξετε ότι αν  $x > 1$ , τότε  $x \ln x + x^2 > 1$
- iv. Να δείξετε ότι αν  $\alpha, \beta > 0$  και  $\alpha < \beta$ , τότε  $\ln \frac{\alpha}{\beta} < \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \beta - \alpha$

### Θέμα 39

Να λυθούν οι ανισώσεις :

- i.  $9 - x^3 < e^{x-2}$
- ii.  $e^{x-1} + x < 2$
- iii.  $1 + \ln x < \frac{1}{x}$



#### Θέμα 40

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ .

- i. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία
- ii. Να λύσετε την ανίσωση :  $\frac{1}{x^2+5} - \frac{1}{2x^2+1} < \ln \frac{x^2+5}{2x^2+1}$

#### Θέμα 41

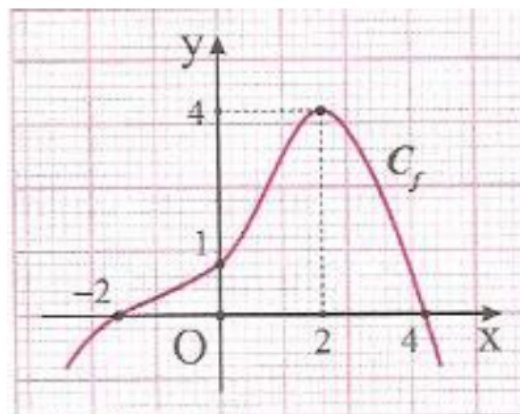
Δίνεται η συνάρτηση :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :  $f^3(x) + e^{f(x)} + x - 1 = 0$  (1) για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

#### Θέμα 42

Δίνεται η συνάρτηση :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :  $f^3(x) + f(x) - x + 2016 = 0$  (1) για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

#### Θέμα 43

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  του παρακάτω σχήματος.



- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.
- ii. Να βρείτε τα ακρότατα.
- iii. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας.
- iv. Να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης  $f(x) \geq 0$ .
- v. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .
- vi. Να βρείτε την τιμή  $f(0)$ .
- vii. Να δείξετε ότι :  $f(x) \leq 4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- viii. Να λύσετε την εξίσωση :  $f(x) = 4$  και την ανίσωση :  $f(x) < 4$ .
- ix. Να λύσετε την εξίσωση :  $4 + (x - 2)^2 = f(x)$
- x. Να λύσετε την εξίσωση :  $f(\alpha) + f(e^\beta) = 8$ .

#### Θέμα 44

Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1» και ποιες όχι :

- i.  $f(x) = 1 + \ln \sqrt{1 + e^{x-1}}$
- ii.  $f(x) = 2x^2 + 3$
- iii.  $f(x) = 1 - 4x - 3e^{2x-1}$

#### Θέμα 45

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :  $f^3(x) - 2f(x) = 3e^{2-x} - 5$  (1) για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι είναι «1-1».

#### Θέμα 46

Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1» και ποιες όχι

- i.  $f(x) = 3e^{2x-3} + 2$
- ii.  $f(x) = 1 + 3e^{1+\sqrt{1-x}}$
- iii.  $f(x) = e^{x-1} + 2x - 5$
- iv.  $f(x) = 3 \ln(x-2) + 3x + 3$
- v.  $f(x) = 3x^2 + 2$
- vi.  $f(x) = x^2 - 5x + 6$
- vii.  $f(x) = |x-2|$

#### Θέμα 47

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :  $f^3(x) + 2f(x) = 4x^3 - 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι είναι «1-1».

#### Θέμα 48

Αν η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως φθίνουσα, να λυθεί η εξίσωση :  $(f \circ f)(x^2 - 2x) = (f \circ f)(3x - 6)$ .

#### Θέμα 49

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha}{x} - \sqrt{x}$ , με  $\alpha \in \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $f(1) + f(4) = 12$ .

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$  και να δείξετε ότι  $\alpha = 12$ .
- ii. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{12}{|2x-1|+1} - \frac{12}{|x+4|+1} = \sqrt{|2x-1|+1} - \sqrt{|x+4|+1}$ .

#### Θέμα 50

Αν η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως φθίνουσα, να λυθεί η εξίσωση :  $(f \circ f)(x^2 + 4x) = (f \circ f)(x + 4)$ .

### Θέμα 51

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :  $f^3(x) + f(f(x)) = 2x + 3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- i. Να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι «1-1».
- ii. Να λυθεί η εξίσωση  $f(2x^3 + x) - f(4 - x) = 0$ .

### Θέμα 52

Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $(f \circ f)(x) - f(x) = 2x - 4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- i. Να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι «1-1».
- ii. Να βρείτε την τιμή  $f(2)$
- iii. Να λυθεί η εξίσωση  $f(4 - f(x^2 + x)) - 2 = 0$ .

### Θέμα 53

Μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει την ιδιότητα :  $f(3 - x) + f(x + 5) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και είναι γνησίως φθίνουσα .

- i. Να λυθεί η ανίσωση :  $f(x^2 + 2x - 4) < 0$ .
- ii. Να λυθεί η εξίσωση :  $f(x) = 0$ .

### Θέμα 54

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

- i.  $e^x = 1 - x^7$
- ii.  $\ln(x - 1) = 2 - x$

### Θέμα 55

Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση  $f(x) = 2e^{3x-2} + 1$  είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφή της.

### Θέμα 56

Να βρεθεί το σύνολο τιμών και η αντίστροφη καθεμιάς των παρακάτω συναρτήσεων. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε την  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$ .

- i.  $f(x) = 2x + 4$
- ii.  $f(x) = \ln(x - 2) + 1$

### Θέμα 57

Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & x \leq 1 \\ 3 - 2x, & x > 1 \end{cases}$ .

- i. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι αντιστρέψιμη.
- iii. Να βρείτε την αντίστροφη  $f^{-1}(x)$ .

### Θέμα 58

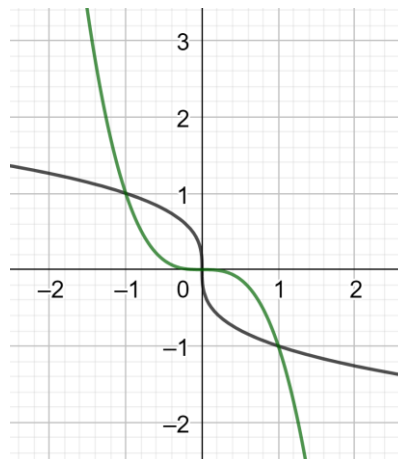
Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :  $f^3(x) + 3f(x) + x - 2 = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- Να δείξετε ότι η  $f$  είναι "1-1"
- Να βρείτε την αντίστροφη  $f^{-1}(x)$

### Θέμα 59

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x^3$ .

- Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.
- Να βρείτε την  $f^{-1}$
- Να βρείτε τα κοινά σημεία των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$ .



Σημείωση

Έχουν κοινά σημεία που δεν ανήκουν στην ευθεία  $y = x$ .

### Θέμα 60

Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα τότε τα σημεία τομής των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  (αν υπάρχουν) ανήκουν στην ευθεία  $y = x$ .

### Θέμα 61

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3x^5 + x + 3$  με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

- Να αποδειχθεί ότι η  $f$  αντιστρέφεται.
- Να βρείτε τα σημεία τομής των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$ .
- Να λύσετε την ανίσωση :  $f^{-1}(f(x^2 - 3) - 4) > 0$

### Θέμα 62

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -x^3 - 2x + 14$  με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

- Να αποδειχθεί ότι η  $f$  αντιστρέφεται.
- Να βρείτε τα σημεία τομής της  $C_{f^{-1}}$  με την ευθεία  $y = x$

### Θέμα 63

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία έχει σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$  και ικανοποιεί τη σχέση :  $2f^3(x) + f(x) = x + 16$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- Να δείξετε ότι η  $f$  είναι "1-1"
- Να βρείτε την αντίστροφη  $f^{-1}(x)$
- Να βρείτε τα σημεία τομής της  $C_f$  με την ευθεία  $y = x$

#### Θέμα 64

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 2\ln(\sqrt{x-1} + 1) + 3$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι “1-1”.
- iii. Να ορίσετε την  $f^{-1}$ .
- iv. Να λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}(1+x) = 2$ .

#### Θέμα 65

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 3x^{2011} + 2x - 5, x \in \mathbb{R}$ .

- i. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα τη  $x = 1$ .
- iii. Να βρείτε το πρόσημο της  $f$ .

#### Θέμα 66

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = -2x^3 - 3x - 1$

- i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της  $f$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.
- iii. Να λυθεί η εξίσωση  $f^{-1}(x) = 2$
- iv. Να λυθεί η ανίσωση  $f^{-1}(x) \geq x - 1$

#### Θέμα 67

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \ln(3e^x + 1) - 2$ .

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.
- iii. Να ορίσετε την  $f^{-1}$ .
- iv. Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2$ .

### Θέμα 68

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

- i.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
- ii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 1}$
- iii.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}$
- iv.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1}$

### Θέμα 69

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

- i.  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$
- ii.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$
- iii.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$

### Θέμα 70

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} ax^3 - x + a - 1, & x \geq 2 \\ (a+1)x - 1, & x < 2 \end{cases}$  όπου  $a$  πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το  $a$  ώστε να υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

### Θέμα 71

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq 1 \\ 3x + 1, & 1 < x < 2 \\ x^2 - \beta x + \alpha - 2, & x \geq 2 \end{cases}$  όπου  $\alpha, \beta$  πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τα  $\alpha, \beta$  ώστε να υπάρχουν συγχρόνως τα  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

### Θέμα 72

Να υπολογιστούν τα όρια :

- i.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2|x-1| - 3|x-5| + 2}{\sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}}$
- ii.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x-4|}{\sqrt{|x-4|} + 1 - 1}$

### Θέμα 73

Αν για τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)f(x) - x^2 + 1}{1 - \sqrt{x}} = 10$ , να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

### Θέμα 74

Αν για τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x^2}{x^2 - 5x + 6} = 5$ , να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2x}{x - 2}$ .

### Θέμα 75

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + \beta}{x - 1} = 4$

### Θέμα 76

Αν  $2 - |x - 1| \leq f(x) - 2x \leq x^2 - 2x + 3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

### Θέμα 77

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :  $x - x^2 \leq f(x) \leq x$ . Να βρεθούν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

### Θέμα 78

Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση για την οποία ισχύει :  $f^3(x) + f(x) + 1 = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

### Θέμα 79

Αν για τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $xf(x) - 2f(x) \leq x^2 - 5x + 6$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

### Θέμα 80

Να υπολογιστούν τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^2 - x}$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x - 2\eta \mu x}{x^2 + x}$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^2 - x}$

iv.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \phi x}{x}$

### Θέμα 81

Αν  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση με  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ , να βρεθούν τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$     ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5x) - \eta\mu x}{6x - \eta\mu 3x}$

### Θέμα 82

Να υπολογίσετε τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \eta\mu \frac{1}{x} \right)$     ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( (x^3 + 2x) \sigma\upsilon\nu \frac{3}{x^2} \right)$

### Θέμα 83

Να βρείτε (αν υπάρχει) το  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+2}{16-x^2}$

### Θέμα 84

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , όταν:

i.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{f(x)} = +\infty$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{4x+3} = -\infty$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(3x+4)] = +\infty$

### Θέμα 85

Δίνεται η 1-1 συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) + f(x) = 3x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = 3$$

i. Να βρείτε το  $f^{-1}(1)$ .

ii. Να βρείτε το  $f(3)$

iii. Να λυθεί η εξίσωση  $f^{-1}(x) = 3$

iv. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + x}{f(f(x)) + f(x) - 2}$



Θέμα 86

Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(x)}{\sqrt{x+4}-2} = -3$  να βρείτε τα

όρια: i.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$     ii.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^3(x) - 5f(x) + 3}{f^3(x) + 2f^2(x) - 7}$

Θέμα 87

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $(x^2 - 4x + 4)f(x) \leq x - 5$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

Θέμα 88

Να βρεθούν τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x)$   
 ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 2} - 3x)$

Θέμα 89

Η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x > 0$  ισχύει :  
 $1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3} \geq f(x) + x \geq \sqrt{x^2 + 4x + 6}$ . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

Θέμα 90

Δίνεται η συνάρτηση :  $f(x) = \sqrt{9x^2 + 1}$ , να βρεθούν τα παρακάτω όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   
 ii.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$   
 iii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$

Θέμα 91

Να βρεθεί το όριο :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{16x^2 + 8x} + \sqrt{4x^2 - 1} - 6x)$

Θέμα 92

Αν  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} + ax + \beta$ , να βρεθούν οι  $\alpha, \beta$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 11$

Θέμα 93

Να βρεθούν τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \eta\mu x}{x + 2} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + \eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x}{3x + \sigma\upsilon\nu x} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \sigma\upsilon\nu x + x^2 \eta\mu x + 2}{x^4 + \eta\mu^4 x + x}$$

Θέμα 94

Να βρεθούν τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x^2}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^3 \eta\mu \frac{1}{x} \right)$$

Θέμα 95

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :  $3x^5 - 2x^2 \leq (x^5 + 2x + 1)f(x) \leq 3x^5 + 3x^2 + 5$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Θέμα 96

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + 2x - 3}{x + 5} = 7$ . Να

βρείτε τα όρια :  $\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Θέμα 97

Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση :  $f(x) = \begin{cases} \ln x + 2x^2 - 3, & x > 1 \\ \sqrt{x} & \\ 2x - 3, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Θέμα 98

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} e^x + \sigma\upsilon\nu x & , x < 0 \\ 2 & , x = 0 \\ x^2 - \eta\mu x + 5 & , x > 0 \end{cases}$ .

- i. Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ .

Θέμα 99

Για ποια τιμή του  $\alpha$  η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\alpha, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu x}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$  είναι συνεχής;

Θέμα 100

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & x < 1 \\ \beta + 1, & x = 1 \\ ax^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$ . Να βρείτε την τιμή των  $\alpha, \beta$  ώστε η  $f$  να

είναι συνεχής.

Θέμα 101

Έστω συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $(x-2)f(x) = x^2 - 5x + 6$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε την τιμή  $f(2)$ . Στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της  $f(x)$ .

Θέμα 102

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $(x-2)f(x) \leq \eta\mu(x-2) + x^2 - 2x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το  $f(2)$ .

Θέμα 103

Αν η συνάρτηση  $f(x)$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$  να βρεθεί η τιμή  $f(1)$  όταν

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x) - \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x} - 1} = 4.$$

Θέμα 104

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:  $f^3(x) + f(x) + 1 = x^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

Θέμα 105

Έστω συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $(x-2)f(x) = \sqrt{x+7} - 3$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε την τιμή  $f(2)$ .

Θέμα 106

Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x+2}$ , για κάθε  $x \neq -2$ , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(-2,3)$ .

- i. Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- ii. Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

### Θέμα 107

Έστω συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :  $xf(x) \leq \eta\mu x + x^2 - 4x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το  $f(0)$ .

### Θέμα 108

Να δείξετε ότι η εξίσωση  $4x + 2 = 3\sigma\upsilon\nu x$  έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα  $(0, \pi)$ .

### Θέμα 109

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \eta\mu x - x + 1$  τέμνει τον άξονα  $x'$  σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα  $(0, \pi)$ .

### Θέμα 110

Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση  $f(x)$  είναι συνεχής στο  $\mathfrak{R}$ , ώστε  $f(0) < 1$  και  $f(1) > 3$ , τότε η εξίσωση  $f(x) = e^x$  έχει τουλάχιστον μια λύση στο  $(0, 1)$ .

### Θέμα 111

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 + 1$  και  $g(x) = \ln x + 3$ . Να δειχθεί ότι γραφικές παραστάσεις των  $f$ ,  $g$  έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα  $(1, e)$ .

### Θέμα 112

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathfrak{R}$  και για κάθε  $x \in \mathfrak{R}$  ισχύει  $0 < f(x) < 1$ . Να δειχθεί ότι η εξίσωση  $f^2(x) - 2f(x) + 2x = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 1)$ .

### Θέμα 113

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  για την οποία ισχύει :  $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$  για κάθε  $x \in \mathfrak{R}$ , όπου  $\beta, \gamma \in \mathfrak{R}$  με  $\beta^2 < 3\gamma$ . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ .

### Θέμα 114

Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x^4 + 2x^2 = 1$  έχει τουλάχιστον δυο ρίζες στο διάστημα  $(-1, 1)$ .

### Θέμα 115

Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = (x - 2)e^x - (x + 2)$  έχει :

- i. μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(1, 3)$
- ii. δυο τουλάχιστον ρίζες αντίθετες.

### Θέμα 116

Μια συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα  $[-3,3]$  και για κάθε  $x \in [-3,3]$  ισχύει  $|f(x)| \leq 3$ . Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση  $f(x) = x$  έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο  $[-3,3]$ .

### Θέμα 117

Έστω  $f$  συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  με  $f(\alpha) + f(\beta) = 0$ . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $[\alpha, \beta]$ .

### Θέμα 118

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  που είναι συνεχείς στο  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $f(\alpha) > g(\alpha)$  και  $f(\beta) < g(\beta)$ , να αποδειχθεί ότι υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f(\xi) = g(\xi)$ .

### Θέμα 119

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $e^x = 2 - x$  έχει μοναδική ρίζα στο  $(0, 1)$

### Θέμα 120

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3 \ln x + x - 2$ . Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε ένα μόνο σημείο, του οποίου η τετμημένη ανήκει στο  $(1, e)$ .

### Θέμα 121

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^3 - 2x$  και  $g(x) = 15 - 5x$ . Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  τέμνονται σε ένα μόνο σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα  $(2, 3)$ .

### Θέμα 122

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^5 + 5x^3 - x + 10$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιο ώστε  $f(\xi) = 50$ .

### Θέμα 123

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $[0, 1]$ . Αν  $f(0) = 2$  και  $f(1) = 4$  να δείξετε ότι :

i. Η ευθεία  $y = 3$ , τέμνει τη  $C_f$ , σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0, 1)$

ii. Υπάρχει μοναδικό  $x_1 \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε :  $f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$

### Θέμα 124

Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in [1, 4]$  τέτοιο, ώστε :  $f(x_0) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(4)}{6}$ .

### Θέμα 125

Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση με  $f(0) = 3$ , η οποία είναι συνεχής και ισχύει :  $f^2(x) = x^2 + 9$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

### Θέμα 126

Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι συνεχής. Οι αριθμοί 1 και 3 είναι διαδοχικές ρίζες της  $f$  και  $f(2) < 0$ . Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3^-} e^{\frac{1}{f(x)}}$ .

### Θέμα 127

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x + x^2 + e^x$ .

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

### Θέμα 128

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}$ .

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

### Θέμα 129

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\ln(x-1) + e^{x-2} = 1$  έχει μια μόνο ρίζα. Στη συνέχεια να βρεθεί η ρίζα αυτή.

### Θέμα 130

Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνεχής συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Αν η  $f$  έχει σύνολο τιμών το διάστημα  $\Delta = (-\infty, 0)$ , να βρείτε το όριο :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{x-1}$ .

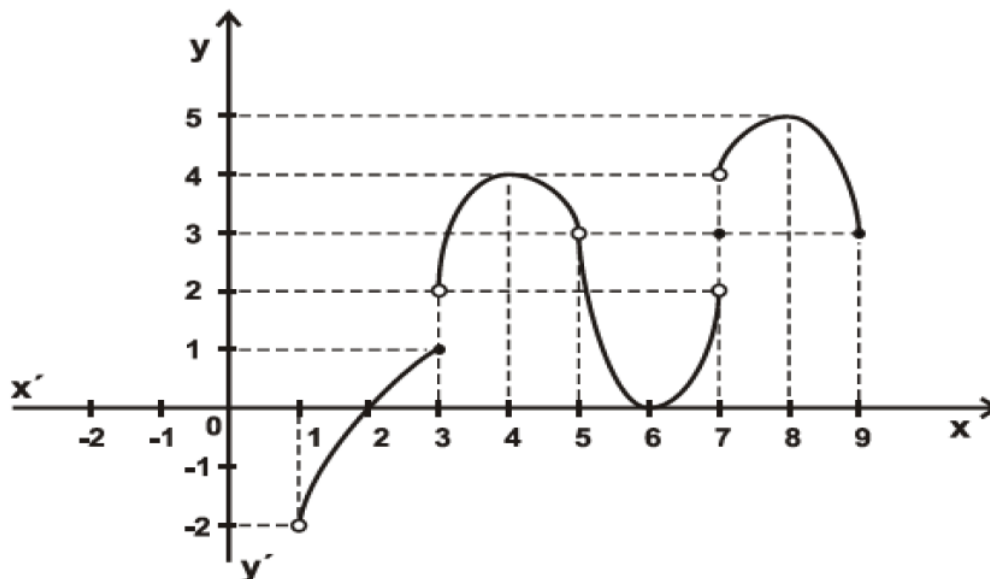
### Θέμα 131

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + \ln x + x - 1$ .

- Να υπολογίσετε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\kappa \in \mathbb{R}$  η εξίσωση  $f(x) = \kappa$  έχει μια μόνο ρίζα.
- Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = e$
- Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε να ισχύει :  $e^{\lambda^2+1} - e^{2\lambda} = \ln(2\lambda) - \ln(\lambda^2 + 1) - \lambda^2 + 2\lambda - 1$ .

Θέμα 132

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .



- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της  $f$ .
- ii. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια :  
 α)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$     β)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$     γ)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$     δ)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$     ε)  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$   
 Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- iii. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια  
 α)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$     β)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$     γ)  $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$   
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- iv. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η  $f$  δεν είναι συνεχής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα 133

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2$ .

- i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της  $f$
- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός  $x \in \mathbb{R}$  για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση:  $3x2^x + 2^x < 1$

### Θέμα 134

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$  και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία  $A(-1,0)$  και  $B(2,3)$ .

- i. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να βρείτε το πρόσημο της  $f$ .
- iii. Να λύσετε την εξίσωση  $f(2e^x + 1) = 3$ .
- iv. Να λύσετε την ανίσωση  $f(3x + 5) \leq 0$ .

### Θέμα 135

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  και η συνάρτηση  $g$  με τύπο  $g(x) = \ln \frac{x+2}{2-x}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f \circ g$ .
- ii. Να βρείτε συνάρτηση  $h$  για την οποία να ισχύει:  $(h \circ g)(x) = x$ .
- iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  είναι περιττή.

### Θέμα 136

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(2) = 5$ .

- i. Να βρείτε το  $f(5)$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.
- iii. Να βρείτε το  $f^{-1}(2)$ .
- iv. Να λύσετε την εξίσωση:  $f(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1) = 2$ .



### Θέμα 137

i. Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - 4}{x} = 2$ , να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

ii. Δίνεται η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$xg(x) + 2 \leq 2\sigma\eta\chi - \eta\mu\chi + x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ , αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

iii. Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f^2(x) + \eta\mu^2(2x)}{\varepsilon\varphi^2 x + x^2 g(x)}$

### Θέμα 138

Δίνεται η συνεχής στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x} + \eta\mu(x-1)}{x^2 - 1} = 2$

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  περνάει από το σημείο  $M(1,1)$

ii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3f(x) - 2| - 1}{x^2 - 1}$

### Θέμα 139

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3$ .

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

ii. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

iii. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να μελετήσετε την  $f^{-1}$  ως προς τη συνέχεια.

iv. Να βρείτε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

### Θέμα 140

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έτσι ώστε να ισχύει  $f(\alpha) = 2\beta$  και  $f(\beta) = 2\alpha$  με  $0 < \alpha < \beta$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε:

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[\alpha, \beta]$ .

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  έτσι ώστε  $f(x_0) = \alpha + \beta$ .

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 2x$ , έχει ακριβώς μια λύση στο  $(\alpha, \beta)$ .

### Θέμα 141

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $x^4 + 1 \leq 4f(x) \leq x^4 + 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

i. Να αποδείξετε ότι:  $\frac{1}{4} \leq f(0) \leq \frac{1}{2}$  και  $\frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{3}{4}$ .

ii. Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$ .

iii. Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) + 4\eta\mu 3x}{2x^2 + 3\eta\mu x}$ .

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in [0, 1]$  τέτοιο, ώστε  $f(\xi) - \xi = 0$ .

### Θέμα 142

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:

$$f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3.$$

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της  $f$ .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μια λύση στο  $\mathbb{R}$ .

### Θέμα 143

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$ .

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να ορίσετε την  $f^{-1}$ .

Θέμα 144

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$  και  $g(x) = 2 - x$ .

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .
- ii. Να ορισθεί η συνάρτηση  $f \circ g$ .
- iii. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$ .
- iv. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης  $f \circ f \circ g$ .

Θέμα 145

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \kappa\eta\mu x}{x - x^2}, & x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & x > 0 \end{cases}$

- i. Να βρείτε τα  $\kappa, \lambda$ .
- ii. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- iii. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 2 \ln(8x + 1)$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ .

### Θέμα 146

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{4(x^3 - 2x^2)}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \\ \frac{\kappa x + 1}{2(x^2 - 4)}, & x \in (2, +\infty) \end{cases} \quad \text{και η } g : \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu \chi \cdot g(x) + 2x}{3x} = 5 \quad \text{και} \quad g(x+3) = g(x) + f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

- i. Το  $\kappa$  αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .
- ii. Το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
- iii. Το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .
- iv. Το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ .

### Θέμα 147

Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f : [1, 5]$  της οποίας η γραφική παράσταση περνάει από τα σημεία  $A(1, 8)$  και  $B(5, 12)$ .

- i. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  παίρνει την τιμή  $\frac{29}{3}$
- iii. Υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (1, 5)$  τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9}$$

### Θέμα 148

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = 3 \ln 2x + e^{3x} + 4x - 2$ .

- i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την  $f$ .
- ii. Να υπολογίσετε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- iii. Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = e^{\frac{3}{2}}$
- iv. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό  $\mu$  για το οποίο ισχύει:

$$3 \ln 4\mu - 3 \ln(2\mu^2 + 2) - 4(\mu^2 + 1) = e^{3(\mu^2+1)} - e^{6\mu} - 8\mu$$

### Θέμα 149

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- $4f(x) + 3f(x+1) = 2x^2 - 2013$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

- i. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
- ii. Να βρείτε το  $f(1)$ .
- iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = x - 1$  σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0, 1)$ .

### Θέμα 150

Θεωρούμε τη συνεχή και γνησίως αύξουσα συνάρτηση  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $4\eta\mu(x-2) \leq (x-2)f(x) \leq x^2 - 4$ , για κάθε  $x \in (0, 2)$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x} = 5$ .

1. Να βρείτε τους αριθμούς  $f(0)$  και  $f(2)$ .
2. Αν  $g(x) = 4 - e^x - f(x)$ ,  $x \in (0, 2)$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $t(x) = \ln(-f(x) + 4)$ ,  $x \in (0, 2)$  τέμνει την  $y = x$  σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0, 2)$ .

### Θέμα 151

Δίνονται οι συνεχείς στο  $\mathbb{R}$  συναρτήσεις  $f$  και  $g$  για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο  $A(2, -1)$ .
- $\rho_1 = -1$  και  $\rho_2 = 5$  είναι δύο διαδοχικές ρίζες της  $g(x) = 0$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

β)  $g(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-1, 5)$ .

γ) 
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(3) \cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2) \cdot x^3 + 5} = -\infty$$

### Θέμα 152

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 9} \leq 3 + xf(x) \leq x^8 \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3} + 3 \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να βρείτε:}$$

i. Το όριο: 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{2x}.$$

ii. Το όριο: 
$$\lim_{x \rightarrow 0} x^7 \eta \mu \frac{2}{x}.$$

iii. Το όριο: 
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

iv. Το  $f(0)$ .

### Θέμα 153

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:  $f(x) = -2x^5 - 2kx^3 + 2k^5$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $k > 0$ .

α) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$ .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα  $(0, k)$ .

δ) Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f(x) + 2k^5}{\eta\mu^3 x} = \lambda^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , να βρείτε τη καμπύλη στην οποία βρίσκονται τα σημεία  $M(k, \lambda)$ .

### Θέμα 154

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f^2(x) = \alpha^{2x} + 2\alpha^x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

i. Να αποδείξετε ότι η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

ii. Αν  $f(0) = -2$  να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

iii. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$ ,  $\alpha < 2$ .

iv. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$ ,  $\alpha > 3$

### Θέμα 155

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έτσι ώστε να ισχύει  $f^2(x) + 4\eta\mu^2 x = x^2 - 3x + 4f(x)\eta\mu x + 10$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f(x) - 2\eta\mu x$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση  $f$  αν  $f(0) = \sqrt{10}$ .

iii. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sigma\upsilon\nu x - 1 - \sqrt{10}}{x}$ .

### Θέμα 156

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x) = 2x^4 + 3\ln x + 1.$$

- i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $f$ .
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .
- iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ , η εξίσωση  $f(x) = \alpha$  έχει μοναδική ρίζα.
- iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός  $\lambda > 0$  για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda}$$

### Θέμα 157

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  και  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .

1. Να αποδείξετε ότι  $f(0) = 0$ .
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή.
3. Αν η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα στο  $\mathbb{R}$  να αποδείξετε ότι:
  - a. Η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται.
  - b. Ισχύει:  $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .

### Θέμα 158

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $[-3, 3]$  για την οποία ισχύει  $3x^2 + 4f^2(x) = 27$  για κάθε  $x \in [-3, 3]$ .

- i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $(-3, 3)$ .
- iii. Να βρεθεί ο τύπος της  $f$ .

- iv. Αν επιπλέον  $f(1) = \sqrt{6}$  να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$ .



### Θέμα 159

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Αν  $1 < f(x) < e$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = e^x$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 1)$ .

2. Αν  $f(0) > 1$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = e^x + x \ln \frac{1}{x}$  έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.

3. Αν  $f(k) + f(2k) = 4k$ ,  $k > 0$  και η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση:  $\frac{f(x) - k}{x - 2k} = \frac{f(x) - 2k}{x - k}$ , έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(k, 2k)$ .

4. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $g : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = f(x) - x$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in [1, 3]$  έτσι ώστε  $g(\xi) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3)}{6} - \frac{7}{3}$ .

### Θέμα 160

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύουν:

- $f(e^{f(x)}) = \ln x + 2$ , για κάθε  $x > 0$  και
- $(f \circ f)(e^{f(x)}) = \ln(\ln x + 1)^2$  για κάθε  $x > \frac{1}{e}$ .

1. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1.

2. Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 2 \ln(x-1)$ ,  $x > 1$ .

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $(f \circ f)(x) = f(e^{-x} + 2)$  έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο  $(1+e, 1+e^{3/2})$ .

### Θέμα 161

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε:  $\kappa \eta \mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1 + \eta \mu^2 x} - \lambda$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  (1) και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

i. Να βρείτε τα  $\kappa$  και  $\lambda$

ii. Αν  $\kappa = 1$  και  $\lambda = 1$  να βρείτε την  $f$ .

iii. Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x}$ .

### Θέμα 162

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \frac{x^3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x - 4}{2^x}$

- i. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- iii. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = \kappa$  έχει μία ακριβώς ρίζα στο  $\mathbb{R}$  για κάθε  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

### Θέμα 163

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + 5x - 2021$ .

- α) Να μελετηθεί η  $f$  ως προς την μονοτονία.
- β) Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) + f(3x) = f(2x) + f(4x)$ .

### Θέμα 164

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $2f(x) \geq f(1) + f(2)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  δεν είναι 1-1

### Θέμα 165

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$ .

Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right)$

### Θέμα 166

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} e^{-x+1} - x - 2, & x \leq 1 \\ \ln x + x - 3, & x > 1 \end{cases}$

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει ακριβώς δυο ρίζες.
- iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $\frac{f(\alpha)+2}{x-1} + \frac{f(\beta)+2}{x-2} = 0$  έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα  $(1,2)$  για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{1\}$ .
- iv. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \lambda$ , για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Θέμα 167

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + 1}{x^2 - 1}, & x < -1 \\ \ln(x + \beta), & x \geq -1 \end{cases}$$

να έχει όριο πραγματικό αριθμό στο  $x_0 = -1$ .

### Θέμα 168

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(1 - \ln x)$ .

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- β) Να βρείτε τα όρια της  $f$  στα άκρα του  $D_f$ .
- γ) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $D_f$ .
- δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  αφού πρώτα αποδείξετε ότι είναι συνεχής.

### Θέμα 169

Αν  $|f(x)| \leq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο 0.

### Θέμα 170

Να δείξετε ότι:

- α) η εξίσωση  $(x + 1) 2^{x+1} = 1$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(-1, 0)$
- β) η εξίσωση  $x^3 - 6x^2 + 3 = 0$  έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο  $(-1, 1)$ .

### Θέμα 171

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\ln x + e^x = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 1)$ .

## Θέμα 172

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0, \quad \kappa, \lambda, \mu \neq 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα  $(-1, 1)$ .

β) Αν οι δύο ρίζες είναι οι  $\rho_1, \rho_2$ , να δείξετε ότι:  $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}$ .

## Θέμα 173

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{-x} + \lambda$  και το  $A(0,3)$  που είναι ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 2$ . (3μ)

**B2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα. (6μ)

**B3.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. (6μ)

**B4.** Να λύσετε την ανίσωση  $f(e^x - 21) < 3$  (6μ)

**B5.** Εξετάστε αν η ευθεία  $y = 1$  τέμνει την  $C_f$ . (4μ)

## Θέμα 174

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 + 2$  και  $g(x) = \sqrt{x-3}$ .

**Γ1.** Μελετήστε την  $f$  ως προς τη μονotonία. (5μ)

**Γ2.** Δείξτε ότι η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο 0.

Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της  $f$ ; (5μ)

**Γ3.** Να μελετήσετε την  $g$  ως προς τη μονotonία. (4μ)

**Γ4.** Έχει η  $g$  ελάχιστη τιμή; Ποια; (3μ)

**Γ5.** Να βρείτε τις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ . (8μ)

Θέμα 175

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$

**Δ1.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1. (6 μ)

**Δ2.** Να βρείτε την  $f^{-1}$ . (6 μ)

**Δ3.** Αν  $g(x) = 1 + \frac{1}{e^x + 1}$  να δείξετε ότι  $f = g$ . (4 μ)

**Δ4.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία. (6 μ)

**Δ5.** Να αποδείξετε ότι  $\frac{e^{\sqrt{2019}} + 2}{e^{\sqrt{2019}} + 1} > \frac{e^{\sqrt{2020}} + 2}{e^{\sqrt{2020}} + 1}$ . (3 μ)

Θέμα 176

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

**B1.** Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της  $f$ ; (3 μ)

**B2.** Ποιο είναι το σύνολο τιμών της  $f$ ; (4 μ)

**B3.** Υπολογίστε τα όρια:

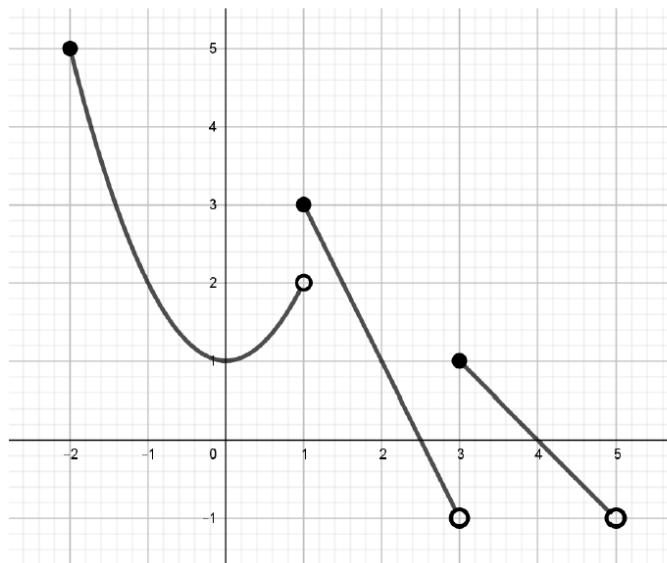
i)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  (3 μ)

ii)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  (3 μ)

**B4.** Υπολογίστε τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$  (3 μ)

ii)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$  (3 μ)



**B5.** Ποιες είναι οι λύσεις της ανίσωσης  $f(x) > 1$ ; (6 μ)

Θέμα 177

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x + \sqrt{e^x} + x^2$$

**A.** Να μελετήσετε τη μονοτονία της.

**B.** Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2 + \ln x + \sqrt{e^x} - 1 < \sqrt{e}.$$

Θέμα 178

- Δ1.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $f(f(x)) = x + 6$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται. (5 μ)
- Δ2.** Αν  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και  $g$  γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , να δείξετε ότι η  $h = f - g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . (5 μ)
- Δ3.** Δίνονται οι συναρτήσεις :  $f(x) = x + 3$  και  $g(x) = e^{-2x+1} - e + 3$ .
- α) Να μελετήσετε την  $g$  ως προς τη μονοτονία. (5 μ)
- β) Να βρείτε την  $g^{-1}$ . (5 μ)
- γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) - g(x) = 0$ . (5 μ)

Θέμα 179

Δίνεται συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta & , x \in [-2, 1] \\ (\beta + 1)x + 4\alpha & , x \in (1, 2] \end{cases}$

- B1.** Αν  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$ , να υπολογίσετε τα  $\alpha, \beta$ . (9 μ)
- B2.** Αν  $\alpha = -1$  και  $\beta = 2$  τότε :
- i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$ . (5 μ)
- ii) Ποιο είναι το σύνολο τιμών της  $f$ ; (3 μ)
- iii) Να υπολογίσετε το όριο :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x}{\sqrt{-x} - 1}$  (8 μ)

Θέμα 180

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = \ln(3e^x + 1) - 2$$

- A.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- B.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.
- Γ.** Να ορίσετε την  $f^{-1}$

### Θέμα 181

Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :

$$(f(x))^3 + e^{f(x)} - 1 = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται. (5 μ)

**Δ2.** Να βρείτε την αντίστροφη της  $f$ . (5 μ)

**Δ3.** Αν  $f^{-1}(x) = x^3 + e^x - 1$  και  $g(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x}-1}{x-1} + \alpha x + \beta & , x > 1 \\ 2\alpha x - \beta + f(0) & , x \leq 1 \end{cases}$

τότε :

i) να βρείτε το πρόσημο της  $f^{-1}$  για τις διάφορες τιμές του  $x$ . (5 μ)

ii) να υπολογίσετε το όριο :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - e^x}{\eta\mu(x-1)}$  (5 μ)

iii) να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta$  ώστε να ισχύει :  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{7}{2}$  (5 μ)

### Θέμα 182

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2-2x} & , x > 2 \\ \alpha x + \beta & , 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3 & , x < 1 \end{cases}$

**B1.** Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$

**B2.** Να υπολογίσετε τα  $\alpha, \beta$  ώστε να υπάρχουν τα όρια :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

**B3.** Για κάθε  $x \in (2, +\infty)$  να δείξετε ότι :  $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$

**B4.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(2, +\infty)$ .

**B5.** Αν  $\alpha = 4$  και  $\beta = -6$  να βρείτε τα σημεία τομής της  $C_f$

με τους άξονες συντεταγμένων.

### Θέμα 183

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + x - 2$ .

**Γ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία. (5 μ)

**Γ2.** Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της  $f$  είναι πάνω από τον άξονα  $x'x$ . (5 μ)

**Γ3.** Να λύσετε την ανίσωση:  $x^{12} + x^4 < 16^3 + 16$  (5 μ)

**Γ4.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\eta\mu(x-1)}$  (5 μ)

**Γ5.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(f(x)) \cdot (x-1)}{(f(x))^2}$  (5 μ)

### Θέμα 184

Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:

$f$  γνησίως φθίνουσα στο  $[0, \sqrt{5}]$ ,  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $[\sqrt{5}, +\infty)$

$f(1) = f(3) = 0$  και  $f$  άρτια.

**Δ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς το πρόσημο. (10 μ)

**Δ2.** Αν  $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$  τότε:

i) να δείξετε ότι η  $f$  δεν αντιστρέφεται. (5 μ)

ii) να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \eta\mu\left(\frac{1}{x-3}\right)$  (5 μ)

iii) να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{\sqrt{x+1} - 2}$  (5 μ)

### Θέμα 185

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = -2x^3 - 3x - 1$$

**A.** Να βρείτε το είδος μονοτονίας της  $f$ .

**B.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται.

**Γ.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}(x) = 2.$$



Θέμα 186

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{-x^2 + x + 1}{1-x}$ ,  $x \in (1, +\infty)$

**Δ1.** Υπολογίστε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ . (5 μ)

**Δ2.** Υπολογίστε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . (5 μ)

**Δ3.** Υπολογίστε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1^+} [(\sqrt{x} - 1)f(x)]$  (5 μ)

**Δ4.** Να δείξετε ότι  $f(x) = x + \frac{1}{1-x}$  για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ . (5 μ)

**Δ5.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται. (5 μ)

Θέμα 187

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{(\mu^2 - 4)x^3 + (\mu - 2)x + 1}{x + 1}$ ,  $x \in (-1, +\infty)$ .

**Γ1.** Για τις διάφορες τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  να υπολογίσετε

το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . (10 μ)

**Γ2.** Αν  $\mu = 2$  τότε :

i) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία. (5 μ)

ii) Να λύσετε την εξίσωση :  $f(x) + e^{-x} - 2 = 0$  (5 μ)

iii) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  (5 μ)

Θέμα 188

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x, x \in \mathbb{R}$$

**A.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι «1-1».

**B.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

Θέμα 189

**Δ1.** Αν  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ , να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2f(x)}{f(x) + 5x + 1}$  (5 μ)

**Δ2.** Αν  $f(x) = 2x + 4$  τότε :

i) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{\frac{f(x)}{2}} - \sqrt{2f(x)} \right)$  (5 μ)

ii) Να λύσετε την ανίσωση  $f(e^{x+2}) - f(-x-1) < 0$  (5 μ)

iii) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{(x+2)^3}$  (5 μ)

iv) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{\sqrt{x+3} - 1}$  (5 μ)

Θέμα 190

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & , x \in (-\infty, 2) \\ \frac{x^2 - 16}{x-4} & , x \in [2, 4) \\ \sqrt{x^2 + x + 1} & , x \in [4, +\infty) \end{cases}$

**B1.** Να υπολογίσετε τα:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  (6 μ)

**B2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη συνέχεια. (5 μ)

**B3.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 21x)$  (4 μ)

**B4.** Για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x)$  (5 μ)

**B5.** Για τις διάφορες τιμές του  $\mu \in \mathbb{R}$  να υπολογίσετε το

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\mu x^2 + x + 1)f(x)]$  (5 μ)

Θέμα 191

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{16\sqrt{x} - 16\alpha}{x^2 - 4x} & , x > 4 \\ \alpha x + \beta & , x \leq 4 \end{cases}$$

**Γ1.** Να υπολογίσετε τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε η  $f$  να είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ . **(9 μ)**

**Γ2.** Αν  $\alpha = 2$  και  $\beta = -7$  τότε να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

i)  $\lim_{x \rightarrow \frac{7}{2}} \frac{f(x)}{\left(x - \frac{7}{2}\right)^3}$  **(4 μ)**

ii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\sqrt{x} - 1}$  **(4 μ)**

iii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ f(x) \eta \mu \left( \frac{1}{f(x)} \right) \right]$  **(4 μ)**

iv)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^2 \eta \mu \left( \frac{1}{f(x)} \right) \right]$  **(4 μ)**

Θέμα 192

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{x+1} - e$

**Δ1.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται. **(5 μ)**

**Δ2.** Να βρείτε την αντίστροφη της  $f$ . **(5 μ)**

**Δ3.** Να λύσετε την εξίσωση  $x^3 + f(x) = 0$  **(5 μ)**

**Δ4.** Να λύσετε την ανίσωση  $x^3 - x^6 < f(x^2) - f(x)$  **(5 μ)**

**Δ5.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(e^{2x} - 1)x^2}$  **(5 μ)**

Θέμα 193

**Δ1.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής με  $f(21) < 21$  και  $(f(x) - x)^2 = x^2 + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε τον τύπο της  $f$ . (6 μ)

**Δ2.** Έστω  $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (0, \sqrt{3})$

τέτοιο ώστε  $2f(x_0) - \sqrt{3} + 3 = 0$ . (6 μ)

β) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . (4 μ)

γ) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . (3 μ)

δ) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + f(x)}{x}$ . (6 μ)

Θέμα 194

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \geq 1$$

**A.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι «1-1».

**B.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(f(x)) = \frac{5}{2}.$$